This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

MATHEMATICS
QA
303
.A668
1899

FRANCESCO D'ARCAIS
Professore nella R. Università di Padova

CORSO

DI

CALCOLO INFINITESIMALE

5976

Seconda edizione con aggiunte e modificazioni

VOLUME II.

PADOVA
ANGELO DRAGHI
Libraio Editore
1901

Proprietà letteraria

PADOVA - R. STAB. PROSPERINI

Tra le modificazioni ed aggiunte contenute in questo secondo volume notiamo un breve cenno delle funzioni analitiche secondo il concetto del WEIERSTRASS, una dimostrazione dell' esistenza dell' integrale per le equazioni differenziali di primo ordine, ed il metodo di integrazione per approssimazioni successive pei sistemi di queste equazioni.

Oltre alle opere già citate nella prefazione del primo e di quelle citate nel testo di questo secondo volume, servirono utilmente nella compilazione del presente volume le opere seguenti :

FORSYTH — *Treatise on differential equations.*

BOOLE — *A treatise on differential equations.*

LAURENT — *Traité d' analyse.*

SOHNCKE — *Sammlung von Aufgaben aus der Diff.- und Integral-rechnung.*

TOMASELLI — *Esercizi sulle equazioni differenziali.*

MEYER — *Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale.*

INDICE

Numeri		Pagine
	I. — Applicazioni geometriche del calcolo differenziale	
1-5.	Curve piane — Tangenti e normali	» 1
6-8.	Assintoti	» 10
9-13.	Convessità e concavità — Flessi	» 15
14-17.	Punti singolari delle curve piane — Descrizione delle curve	» 24
18.	Curve riferite a coordinate polari	» 37
	Esercizi	» 41
19-21.	Lunghezza d'arco di curva piana, e formole relative .	» 47
22-26.	Curvatura delle curve piane	» 51
27-28.	Contatto delle curve piane	» 63
	Esercizi	» 67
29-32.	Curve gobbe o a doppia curvatura — Tangente — Piano normale — Arco di curva gobba . . .	» 70
33-34.	Piano osculatore di una curva gobba — Normale principale — Binormale	» 76
35-38.	Curvatura delle curve gobbe	» 79
	Esercizi	» 88
39-40.	Superficie — Piano tangente — Normale . . .	» 89
41 44.	Curvatura delle sezioni normali — Linee di curvatura	» 92
45.	Limiti di figure variabili	» 102
46-48.	Curve inviluppi	» 105
49-50.	Superficie inviluppi	» 113
	Esercizi	» 120
	II. — Integrali definiti	
-64.	Alcuni teoremi sugli integrali definiti	» 126
	Esercizi	» 147

Numeri		Pagine
65-74.	Integrali definiti pei quali la funzione integranda non si mantiene finita nell'intervallo di integrazione, e integrali definiti con limiti infiniti	» 149
	Esercizi	» 182
75-79.	Integrazione per serie	» 185
	Esercizi	» 204
80-83.	Alcuni teoremi sulle funzioni a due o più variabili indipendenti	» 208
84-96.	Continuità, derivazione e integrazione degli integrali definiti rispetto ad un parametro	» 213
	Esercizi	» 249
97-100.	Calcolo di alcuni integrali definiti. Proprietà fondamentali degli integrali Euleriani	» 253
	Esercizi	» 265
101-102.	Rettificazione delle curve	» 270
103-105.	Quadratura delle curve piane	» 279
	Esercizi	» 284
106-113.	Integrali doppi definiti estesi ai punti di un campo .	» 288
114-116.	Integrali doppi definiti pei quali la funzione integranda non si mantiene finita nel campo di integrazione e integrali doppi estesi ad un campo infinito . .	» 308
	Esercizi	» 319
117-122.	Applicazione degli integrali doppi allo spianamento delle superficie, ed alla cubatura dei solidi . . .	» 323
123-124.	Integrali tripli — Cubatura dei solidi	» 334
	Esercizi	» 340
125.	Integrali multipli	» 346
	Esercizi	» 354

III. — Elementi della teoria delle funzioni di variabili complesse

126-132.	Nozioni preliminari — Serie a termini complessi — Le trascendenti elementari ad argomento complesso .	» 357
133-137.	Concetto di funzione di variabile complessa . .	» 366
138-149.	Serie di potenze — Funzioni analitiche . . .	» 377
150-155.	Integrali delle funzioni di variabili complesse . .	» 393
156-159.	Teoremi di Cauchy	» 404
160-164.	Serie del Taylor e del Laurent	» 409
165-168.	Teorema sulle serie di funzioni — Considerazioni sulle funzioni analitiche e sulle espressioni aritmetiche	» 418
169-170.	Residui — Calcolo di alcuni integrali	» 427
	Esercizi	» 436

Numeri | Pagine

IV. — Equazioni differenziali

171-173.	Integrazione delle espressioni differenziali con due o più variabili	» 442
	Esercizi	» 450
174-176.	Equazioni differenziali. Equazioni differenziali ordinarie di primo ordine	» 452
177-180.	Dimostrazione dell' esistenza dell' integrale generale per le equazioni differenziali di primo ordine	» 456
181-186.	Integrazione delle equazioni differenziali di primo ordine risolute rapporto alla derivata	» 469
187-190.	Del fattore integrante o moltiplicatore delle equazioni differenziali $Mdx + Ndy = 0$	» 479
	Esercizi	» 484
191-194.	Equazioni differenziali di primo ordine non risolute rapporto alla derivata	» 490
	Esercizi	» 500
195.	Equazioni differenziali d' ordine superiore al primo	» 502
196-198.	Alcune operazioni coi simboli D e xD	» 504
199-201.	Equazioni differenziali lineari d' ordine n	» 510
202-204.	Equazioni differenziali lineari d'ordine n a coefficienti costanti o a coefficienti funzioni speciali di x	» 517
	Esercizi	» 530
205-213.	Integrazione di alcune equazioni differenziali d' ordine superiore al primo	» 533
	Esercizi	» 554
214-216.	Applicazioni geometriche	» 556
	Esercizi	» 566
217.	Soluzioni singolari delle equazioni differenziali di primo ordine	» 572
	Esercizi	» 576
218-220.	Equazioni a differenziali totali	» 577
	Esercizi	» 585
221-222.	Sistemi di equazioni differenziali simultanee	» 586
	Esercizi	» 595
223-228.	Metodo di integrazione per approssimazioni o integrazioni successive. Integrazione per serie delle equazioni differenziali	» 598
	Esercizi	» 624
9.	Integrazione di equazioni differenziali mediante integrali definiti	» 627
	Esercizi	» 631

Numeri		Pagine
230-232.	Equazioni a derivate parziali che contengono le derivate rapporto ad una sola delle variabili indipendenti, ed equazioni a derivate parziali lineari con tre o più variabili	» 633
	Esercizi	» 642
233-234.	Equazioni a derivate parziali di primo ordine non lineari fra tre o più variabili. Integrale completo, singolare, generale	» 645
235-236.	Integrazione delle equazioni a derivate parziali di primo ordine fra tre variabili. Metodo di Lagrange-Charpit. Integrazione di alcune equazioni a derivate parziali di primo ordine fra quante si vogliono variabili . .	» 652
	Esercizi	» 665

V. — Elementi del Calcolo delle Variazioni.

237-238.	Variazioni — Variazione prima di un integrale semplice	» 669
239-242.	Problemi di massimo e di minimo relativi al calcolo delle variazioni	» 674
243.	Problemi di massimi e minimi relativi, nel calcolo delle variazioni	» 692
244.	Variazione di un integrale multiplo col campo di integrazione fisso e con valori dati delle funzioni sul contorno del campo stesso, e quando sotto il segno integrale compariscono le sole derivate prime — Relativi problemi di massimo e minimo	» 698
	Esercizi	» 703

I. Applicazioni geometriche del Calcolo Differenziale.

Curve piane. — Tangenti e normali.

1. Ci limiteremo alle più semplici e fondamentali applicazioni geometriche del calcolo differenziale, poichè esse sono così estese ed importanti da formare un corpo di dottrina a se, come si è già anche riconosciuto nell' insegnamento universitario.

Preso un sistema di assi coordinati ortogonali nel piano, cominciamo dal precisare ciò che si intende per angoli di una retta cogli assi.

Sopra una retta distinguiamo le due direzioni opposte lungo le quali essa può venire percorsa a partire da un suo punto, fissandone una come direzione positiva. Parte positiva della retta, a partire da un suo punto, è quella che viene percorsa da un punto che si muove nella direzione positiva.

Immaginiamo descritto col centro nell' origine delle coordinate un cerchio di raggio *uno*; A, B i punti d' incontro di esso colle parti positive dell' asse delle x e delle y. Per direzione positiva degli archi che misurano gli angoli che le rette uscenti dall'origine fanno colla parte positiva dell' asse x, suole scegliersi quella per la quale si muoverebbe un punto che da A va a B lungo il quadrante AB, e direzione positiva degli archi, che misurano gli angoli colla parte positiva dell' asse y, quella per la quale si muoverebbe un punto che da B va ad A lungo il quadrante BA.

Per angolo, cogli assi, di una retta, che passa per l' origine, si ende l' angolo che la parte positiva della retta, a partire dall' orie, fa colla parte positiva degli assi, misurato nel modo sopra licato.

Per angolo di una retta qualunque cogli assi si intende l'angolo che la parallela ad essa, condotta per l'origine, fa cogli assi, avendo preso su questa parallela per direzione positiva la stessa della retta data.

Segue da ciò che, indicati con α, β gli angoli che una retta fa rispettivamente coll'asse delle x e delle y, è sempre

$$\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta\,,\ \cos\beta = \operatorname{sen}\alpha\,,\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1\,,\ \operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta = 1.$$

2. È noto come, facendo uso di un sistema di coordinate cartesiane, che per semplicità supporremo ortogonali, possa venire, in generale, rappresentata geometricamente una funzione $y = y(x)$. Noi supporremo che nell'intervallo di valori per x, che si dovrà considerare, la $y(x)$. sia, o sia ridotta ad essere, univalente e generalmente (fatta cioè eccezione di un numero finito di punti) ammetta derivata determinata e finita [1].

---

[1] Intorno alla rappresentazione geometrica delle funzioni osserviamo che (Vedi « Harnack, *Die Elemente der Differential-und Integralrechnung* » pag. 23) ad ogni valore di x, e al corrispondente valore di y corrispondendo un punto del piano (l'estremo della ordinata y) per ogni valore x dell'intervallo che si considera si può sempre determinare il corrispondente punto del piano. L'insieme di questi infiniti punti ci danno la curva rappresentata da $y = y(x)$ Ma poiché materialmente non possiamo costruire una curva assegnandone tutti gli infiniti suoi punti, così ci procuriamo una immagine dell'andamento della funzione segnando quanti si vogliono punti, corrispondenti ad altrettanti valori della funzione, e congiungendo questi punti successivamente con rette, ottenendo così un poligono di quanti si vogliano lati e che ci darà un'immagine tanto più approssimata ed esatta della curva corrispondente alla funzione, quanto maggiore è il numero dei punti che si sono costruiti; ma nelle sue parti più piccole questa rappresentazione non sarà giammai esatta. In particolare poi i punti che rappresentano geometricamente la funzione possono, nelle vicinanze di un punto speciale, succedersi in modo così ondulato, che quella immagine rappresenterà molto incompletamente la funzione, e subirà notevoli cambiamenti quanti più punti verranno a costruirsi in vicinanza di questo punto speciale; la vera immagine della funzione in questo luogo non potrà in alcun modo fissarsi.

Il ch. prof. Dini a pag. 54 della sua opera « *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* » osserva ancora che « Quando il numero dei tratti di invariabilità di una funzione sia infinito, ben si intende che non potrà costruirsi per essa una curva rappresentativa, e solo col pensiero potremo talvolta riferirci a una curva rappresentativa *con un numero infinito di vertici*. S'intende

Così per la funzione a due valori $y = x\sqrt{a^2 + x^2}$ si considereranno separatamente i due rami univalenti della funzione, $y = -x\sqrt{a^2 + x^2}$, $y = -x\sqrt{a^2 + x^2}$, cui corrispondono due rami di curva, il cui insieme costituisce la curva $y = x\sqrt{a^2 + x^2}$. In pratica però, eccettuati casi speciali che diano luogo ad ambiguità, questa separazione della funzione nei rami suole sottintendersi, anzichè propriamente effettuarla.

Se la y è funzione implicita di x data dalla equazione $f(x, y)$ 0, si suppone che questa definisca, nell' intervallo di valori che si considera, una funzione univalente (o più rami distinti di una funzione) che ammetta generalmente derivata.

---

poi che questa mancanza di una rappresentazione geometrica può presentarsi anche quando la funzione sempre continua in tutto l' intervallo non ha tratti di invariabilità o ne ha soltanto un numero finito, come p. es.: quando la funzione sia tale che per essa non possa pensarsi che una curva rappresentativa costituita dalla porzione di un poligono i cui lati sono in numero infinito e non sono nè perpendicolari nè paralleli all' asse delle x ». Supponendo però che la funzione, che si considera in un certo intervallo, sia in esso continua ed ammetta in ogni punto derivata a destra e a sinistra e non abbia infiniti massimi e minimi o infiniti tratti di invariabilità. potremo asserire che essa sarà, in quell' intervallo, rappresentabile geometricamente mediante una curva intuitiva; o, se si vuole, si potrebbero chiamare funzioni rappresentabili geometricamente quelle che soddisfanno alle precedenti condizioni. E si intende che potrà avvenire che, tolti da un intervallo alcuni punti, in numero finito, mediante intorni comunque piccoli, negli intervalli parziali restanti la funzione sia rappresentabile geometricamente; come avviene, in qualunque intorno che contenga il punto zero. per la funzione che per x diversa da zero è $y = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ e per $x = 0$ è zero, per quella che per x diversa da zero è $y = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ e per $x = 0$ è zero, le quali hanno un numero infinito di massimi e minimi in un intorno qualunque del punto zero, e la prima delle quali non ammette derivata, nè a destra nè a sinistra, per $x = 0$.

Su questo soggetto tra altri si potranno consultare i lavori seguenti: Klein: *Ueber den allgemeinen Functionsbegriff* etc. Math. Annalen, vol. 22 pag. 249; du scritti di Köpcke nei Math. Annalen, volumi 29 e 34, pag 123 e 161; l'. *nleitung in die Diff. und Integralrechnung* del Pasch; G. Ascoli. *Le curve lim: di una varietà di curve*, vol. 18 Atti Acc. dei Lincei (serie 3.ª; ed « *Osserva ni critiche alla medesima* » dello stesso autore nel vol. 11 serie 2.ª) dei Rendi nti del R Istituto Lombardo di Scienze e lettere.

A questi rami univalenti della funzione corrispondono rami della curva, il cui insieme costituisce la curva $f(x, y) = 0$. Ogni retta parallela all'asse delle y incontra ciascuno di questi rami al più in un punto.

I valori di x, y, dati dalle equazioni $x = x(t)$, $y = y(t)$ corrispondenti allo stesso valore di t, si possono considerare come coordinate dei punti di una curva, definita da quelle due equazioni. E qui pure si suppone che le $x(t)$, $y(t)$ siano univalenti e continue e che ammettano derivate determinate. in generale, pei valori di t appartenenti ad un certo intervallo.

Consideriamo sulla curva, rappresentazione geometrica della nostra funzione, un punto M di coordinate x, y; ammesso che esista e sia finita la corrispondente derivata $\frac{dy}{dx}$, l'equazione della tangente alla curva nel punto M è (Vedi Vol. I, n. 38)

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x), \qquad \text{o} \qquad \frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy}$$

indicando X, Y la coordinate correnti.

La $\frac{dy}{dx}$, e i dx, dy si ricavano dalla equazione della curva $y = f(x)$; o dalle $x = x(t)$, $y = y(t)$, nel caso che le coordinate dei suoi punti venissero espresse così mediante il parametro t.

Se la equazione della curva fosse in forma implicita $f(x, y) = 0$, sostituendo per $\frac{dy}{dx}$ il valore $-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$, si avrebbe l'equazione della della tangente

$$(X - x)\frac{\partial f}{\partial x} - (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

La equazione della *normale* alla curva nel punto M, cioè della retta perpendicolare alla tangente e che passa per M, risulterà subito la

$$Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x)$$

oppure

$$(X - x)\frac{\partial f}{\partial y} - (Y - y)\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

3. Indicati con α, β gli angoli della tangente, nel punto $M(x, y)$, cogli assi abbiamo $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$, qualunque sia la direzione che si scelga come positiva sulla tangente e

$$\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta = \pm\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}, \quad \operatorname{sen}\alpha = \cos\beta = \pm\frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}},$$

nelle quali dobbiamo prendere contemporaneamente il segno superiore o l'inferiore. Questo segno dipende dalla direzione che si sceglie come positiva; così se si sceglie per direzione positiva quella, nella quale si dovrebbe muovere un punto sulla tangente per percorrere, a partire dal suo punto d'intersezione coll'asse delle ascisse, la parte di essa che è situata, rispetto a quest'asse, dalla stessa parte ove è situata la parte positiva dell'asse delle ordinate, il coseno di β è positivo e dovremo quindi prendere quello dei due segni che rende positivo $\cos\beta$; se si prendesse per positiva la direzione opposta, dovremo scegliere quel segno che rende negativo $\cos\beta$.

Possiamo anche scrivere

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad \cos\beta = \pm\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

dove $y' = \frac{dy}{dx}$, e, se l'equazione della curva è $f(x, y) = 0$,

$$\cos\alpha = \pm\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}, \quad \cos\beta = \pm\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

dove dobbiamo prendere contemporaneamente i segni superiori o gli inferiori.

Indicati con μ, ν gli angoli della normale cogli assi, abbiamo $\operatorname{tg}\mu = -\frac{dx}{dy}$, qualunque sia la direzione che sopra di essa si scelga

come positiva, e

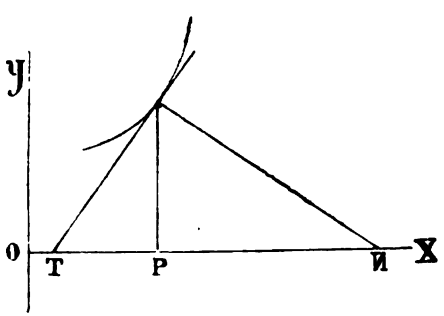
$$\cos\mu = \operatorname{sen}\nu = \pm\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \pm\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \mp\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\operatorname{sen}\mu = \cos\nu = \mp\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \mp\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \mp\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

nelle quali formole dovremo prendere contemporaneamente il segno superiore o l'inferiore, e questo segno dipenderà dalla direzione che si sceglie come la positiva sulla normale.

In quei punti x, y ove la derivata $\frac{dy}{dx}$ risulta comunque infinita (si tenga presente quanto fu dimostrato al n. 60 del vol. I) la tangente è parallela all'asse delle y e la sua equazione è $X = x$, e la equazione della normale è $Y = y$.

4. Si chiamano *tangente geometrica o lunghezza della tangente*, e *normale geometrica o lunghezza della normale* le parti di tangente e di normale comprese tra il punto M sulla curva e il punto d'intersezione della tangente, e della normale con uno degli assi p. e. coll'asse x; e si chiama *sottotangente* la porzione di asse compresa tra il piede della coordinata abbassata da M sull'asse ed il punto nel quale la tangente interseca l'asse, e *sottonormale* la porzione di asse compresa tra il piede della coordinata e il punto nel quale la normale interseca l'asse stesso.



Così indicando con L_t, L_n S_t, S_n la lunghezza della tangente e della normale, la sottotangente e sottonormale relativamente all'asse x, avremo

$$L_t = MT,\ L_n = MN,\ S_t = TP,$$
$$S_n = PN.$$

Convenendo di considerare la sottotangente positiva se il punto P è alla destra di T e negativa se alla sinistra; e la sot-

tonormale positiva se il punto P è alla sinistra del punto N e negativa se alla destra, i triangoli MTP, MPN ci danno, qualunque sia la mutua posizione dei punti M, T, P, N,

$$S_n = y\frac{dy}{dx}, \qquad S_t = y\frac{dx}{dy}.$$

Gli stessi triangoli ci danno altresì

$$L_t = \pm y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}, \quad L_n = \pm y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

ed i segni nei secondi membri di queste due ultime formole si sogliono prendere in modo che le corrispondenti espressioni di L_t, L_n risultino positive.

5. Applichiamo la teoria a qualche curva particolare.

1) *Cicloide.* — La cicloide è la curva generata da un punto di una circonferenza, la quale, mantendosi sempre nel suo piano, rotola senza strisciare sopra una retta indefinita, alla quale si mantiene sempre tangente. Dal modo di generazione di questa curva risulta subito, che essa è composta di un numero infinito di rami tutti uguali aventi per *base* una parte della retta uguale in lunghezza alla circonferenza del circolo generatore.

Per determinare l'equazione di questa curva prendiamo per asse delle x la retta sulla quale rotola il circolo e per asse delle y una retta ad esso perpendicolare e che passi per uno qualunque dei punti nei quali la curva è incontrata dall'asse delle x, punto che si può riguardare come origine del movimeuto. Consideriamo un punto M della curva e siano x, y le sue coordinate. Immaginiamo il circolo generatore, di cui indichiamo con a il raggio, nella posizione che ha dovuto assumere affinchè il punto generatore sia venuto in M.

Avremo allora *arco* BM = OB essendo B il punto di contatto del circolo coll'asse x. Designando con t l'angolo MAB, contato nel verso indicato dalla freccia nella annessa figura, essendo A il centro del circolo, avremo

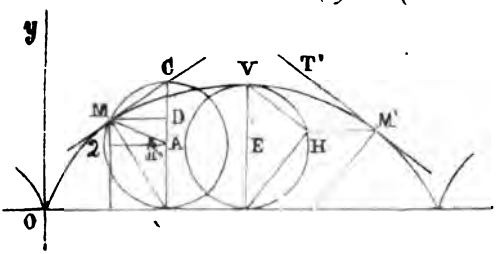
$$x = OP = OB - PB = \text{arco } MB - OA$$

$$= at - a\cos(MAQ = at - a \operatorname{sen} t,$$

$$y = QP + MQ = a + a \operatorname{sen}(MAQ) = a - a\cos t.$$

Le coordinate x, y vengono quindi espresse per mezzo della variabile t dalle formole

$$(1)\quad \begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t). \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$



L'angolo t è compreso tra 0 e π per tutti i punti della curva appartenenti all'arco 0 V, V essendo il vertice o punto più alto, rispetto all'asse x, della curva stessa e, pei punti dell'arco V 0', t è compreso tra π e 2π. Si ottengono tutti i punti della curva facendo variare t da $-\infty$ a $+\infty$.

Se si vuole la equazione della cicloide in coordinate cartesiane basterà eliminare t tra le equazioni (1). A tale scopo dalla seconda di esse ricaviamo

$$\cos t = \frac{a-y}{a}, \quad t = \operatorname{arc\,cos} \frac{a-y}{a}, \quad \operatorname{sen} t = \pm \frac{1}{a}\sqrt{2ay - y^2}$$

e la prima delle (1) diviene quindi

$$(2)\qquad x = a \operatorname{arc\,cos} \frac{a-y}{a} \mp \sqrt{2ay - y^2}$$

che è l'equazione della curva, nella quale dobbiamo prendere il segno superiore pei punti pei quali sen t è positivo cioè pei punti dell'arco 0 V, e il segno inferiore pei punti pei quali sen t è negativo cioè pei punti dell'arco V0'.

Per determinare ora il $\frac{dy}{dx}$, ed avere così l'equazione della tangente, invece di ricavare questa derivata dalla equazione (2) della curva in coordinate cartesiane, giova meglio ricavarla dalle (1), dalle quali

$$dx = a(1 - \cos t)\,dt = y\,dt, \qquad dy = a \operatorname{sen} t\,dt = \sqrt{2ay - y^2}\,dt$$

dove nella seconda formola è sottinteso il segno $+$; e quindi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y}$$

e per conseguenza le equazioni della tangente e della normale sono rispettivamente

$$Y - y = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y}(X - x), \quad Y - y = -\frac{y}{\sqrt{2ay - y^2}}(X - x).$$

Abbiamo inoltre

$$S_t = \frac{y^2}{\sqrt{2ay - y^2}}, \; S_n = \sqrt{2ay - y^2}, \; L_t = y\sqrt{\frac{2a}{2a - y}}, \; L_n = \sqrt{2ay}.$$

La formola che dà la sottonormale può scriversi.

$$S_n = \sqrt{y(2a - y)} = \sqrt{MP \,.\, CD} = \sqrt{DB \,.\, CD} = MD = PB.$$

Quindi la normale si ottiene immediatamente unendo il punto M col punto B, ed in conseguenza la tangente unendo M con C: per cui la tangente e la normale in un punto della cicloide vengono con molta semplicità determinate mediante il circolo generatore nella posizione che ha assunto quando il punto generatore è venuto nel punto che si considera. Ci si può anche risparmiare di descrivere il corrispondente circolo per ogni punto nel quale si vuol condurre la tangente; basta di questi circoli averne tracciato uno, p. es. il circolo VHF, perchè, volendosi ad es. la tangente e la normale nel punto M', basta condurre per M' una parallela all'asse x sino ad incontrare in H il circolo, unire H con V ed F, essendo VF il diametro del circolo parallelo all'asse y, e le rette M'T' e M'N' rispettivamente parallele alle HV, HF sono la tangente e la normale nel punto M'.

2) *Catenaria.* Consideriamo la curva che ha per equazione

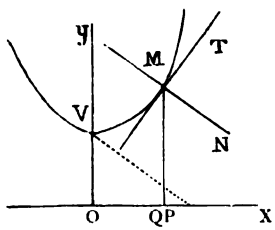
$$y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right)$$

dove prenderemo h positiva. Si scorge che questa curva è situata tutta al disopra dell'asse x (cioè nella parte del piano che contiene la parte positiva dell'asse delle y), che è simmetrica rispetto all'asse y e che h è l'ordinata del punto nel quale la curva taglia l'asse delle y, il qual punto è il punto più basso della curva, perchè per $x = 0$ abbiamo un minimo per la funzione y, come facilmente si può verificare, e non abbiamo minimi per nessun altro valore di x. Questa

curva notevole si chiama *catenaria*, perchè, come si dimostra in meccanica, è la curva lungo la quale si dispone un filo pesante flessibile e inestendibile quando venga sospeso a due suoi punti; la quantità h è allora la tensione orizzontale che ha luogo nel punto più basso del filo. Per condurre la tangente in un punto M di questa curva osserviamo che

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right)$$

e perciò



$$\frac{y^2}{h^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1,$$

dalla quale

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{\left(\frac{y}{h}\right)^2 - 1} = \pm\frac{\sqrt{y^2 - h^2}}{h},$$

nella qual formola dovremo prendere il segno + quando x è positivo, il segno — quando x è negativo, perchè $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right)$ è positiva per x posisivo, negativa per x negativo.

Ora col centro nel punto più basso V e con raggio uguale a $MP = y$ descriviamo un circolo che taglia in Q l'asse x; abbiamo $OQ = \sqrt{\overline{VQ}^2 - \overline{VO}^2} = \sqrt{y^2 - h^2}$ e quindi $\operatorname{tg} QVO = \operatorname{tg}\alpha$. Perciò la MT perpendicolare alla VQ sarà la tangente nel punto M alla catenaria e la MN parallela alla VQ sarà la normale.

Assintoti

6. Ricordiamo che una retta dicesi *assintoto* d'una curva, avente rami che si estendono all'infinito, se la distanza tra un punto M della curva e la retta converge a zero, quando il punto M si allontana indefinitamente rimanendo sempre sulla curva.

Per riconoscere se una curva ha assintoti paralleli all'asse delle x (o delle y), si osservi se l'equazione della curva è soddisfatta da

qualche valore finito per y (o per x) quando si faccia crescere indefinitamente la x (o la y). Così ad esempio l'equazione $x^2y^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ossia la $y^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)$ è soddisfatta da x infinito e da $y^2 = a^2$, esprimendo brevemente con ciò che, quando x cresce indefinitamente, il valore di y^2 che soddisfa alla equazione converge verso a^2; la corrispondente curva ha quindi gli assintoti $y = a$, $y = -a$, paralleli all'asse delle x. Così ancora riconosciamo che la curva $y^2(x - 2a) = x^3 - a^3$ ha l'assintoto $x = 2a$, parallelo all'asse delle y; che la curva $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ ha l'asse delle x per assintoto; che la curva $x^3 + y^3 - axy = 0$ non ha assintoti paralleli ad alcuno degli assi.

Vediamo ora come possano determinarsi gli assintoti non paralleli all'asse delle y. Affinchè la retta

$$Y = gX + h$$

sia assintoto della nostra curva occorre che la distanza dal punto $M(x, y)$ a questa retta, distanza che è data dal valore assoluto della espressione

$$\frac{y - gx - h}{\sqrt{1 + g^2}},$$

converga a zero quando x cresce indefinitamente per valori positivi o per valori negativi. Dovremo quindi avere $y - gx - h = \varepsilon$, essendo ε quantità che converge a zero quando x cresce, ossia $y = gx + h + \varepsilon$, $\frac{y}{x} = g + \frac{h + \varepsilon}{x}$, e quindi $g = \lim\limits_{x=\infty} \frac{y}{x}$. Determinato così g, la $h = y - gx + \varepsilon$ ci dà $h = \lim\limits_{x=\infty} (y - gx)$.

Ad esempio, per la iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ossia

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2},$$

abbiamo

$$g = \lim_{x=\infty} \frac{y}{x} = \pm \frac{b}{a} \lim \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = \pm \frac{b}{a},$$

ed inoltre

$$h = \lim_{x=\infty} (y - gx) = \pm \frac{b}{a} \lim (\sqrt{x^2 - a^2} - x)$$

$$= \pm \frac{b}{a} \lim \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = 0,$$

e perciò gli assintoti $Y = \pm \frac{b}{a} X$.

7. Data l'equazione di una curva è, il più delle volte, difficile determinarne gli assintoti procedendo nel modo che abbiamo ora indicato.

Ma, come è noto, si dimostrano in geometria analitica altre regole di agevole applicazione, e che noi qui semplicemente riporteremo.

Supponiamo che alla equazione della curva possa darsi la forma

$$x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x^p \psi\left(\frac{y}{x}\right) + x^q \chi\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots = 0$$

dove $n, p, q, \ldots$ sono numeri qualunque, tali che

$$n > p > q > \ldots,$$

avendo così aggruppato i termini omogenei di grado n, quelli omogenei di grado $p, \ldots$ e dove le funzioni $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\chi(z), \ldots$ si suppone siano finite, continue, e che ammettano le derivate fino a quell'ordine che occorre considerare.

Sia g radice della equazione $\varphi(z) = 0$, e non sia radice della $\varphi'(z) = 0$, cioè sia

$$\varphi(g) = 0, \qquad \varphi'(g) \gtrless 0.$$

Allora se $n - 1 < p$ non abbiamo, in generale, alcun assintoto di equazione $Y = gX + h$. Se $n - 1 = p$ vi è un assintoto la cui equazione è

$$Y = gX - \frac{\psi(g)}{\varphi'(g)}.$$

Se $n - 1 > p$ vi è un assintoto di equazione $Y = gX$.

Esempi

1) La curva $y - 3x + \sqrt[5]{x^2 + y^2} - a = 0$, per la quale $\varphi(\zeta) = \zeta - 3$, $\psi(\zeta) = \sqrt[5]{\zeta^2 + 1}$, $\chi(\zeta) = -a$, $n = 1$, $p = \frac{2}{5}$, $q = 0$, $g = 3$, $\varphi'(3) = 1$, $n - 1 = 0 < \frac{2}{5}$ non ha assintoti di equazione $Y = gX + h$.

2) La curva $y^2(x - 2a) = x^3 - a^3$, per la quale $\varphi(\zeta) = \zeta^2 - 1$, $\psi(\zeta) = -2a\zeta^2$, $\chi(\zeta) = a^3$, $n = 3$, $p = 2$, $q = 0$, $g = \pm 1$, $\varphi'(\pm 1) = \pm 2$, $\frac{\psi(\pm 1)}{\varphi'(\pm 1)} = \mp a$, $n - 1 = 2 = p$, ha gli assintoti

$$Y = X + a, \quad Y = -X - a.$$

3) La curva $y^2(x - 2a) = -x^3 - a^3$, per la quale $\varphi(\zeta) = \zeta^2 + 1$, $g = \pm\sqrt{-1}$ non ha assintoti di equazione $Y = gx + h$.

4) La curva $x^2 - y^2 + x\left(\operatorname{sen}\frac{y}{x} - 1\right) = 0$, per la quale $n = 2$, $p = 1$, $n - 1 = p$, $\varphi(\zeta) = 1 - \zeta^2$, $\psi(\zeta) = \operatorname{sen}\zeta - 1$, $g = \pm 1$, $\varphi'(\pm 1) = \pm 2$, $\psi(\pm 1) = \pm \operatorname{sen} 1 - 1$, ha gli assintoti

$$Y = \pm X + \frac{\operatorname{sen} 1 \pm 1}{2}$$

ossia

$$Y = X - 0{,}079265\ldots, \quad Y = -X + 0{,}920735\ldots$$

5) La curva $xy^2 - ax^3 + y + bx + c = 0$ ha gli assintoti $y = \pm x\sqrt{a}$.

Se poi g, radice di $\varphi(\zeta) = 0$, annulla anche la derivata prima $\varphi'(\zeta)$ ma non la seconda, così che sia $\varphi(g) = 0$, $\varphi'(g) = 0$, $\varphi''(g) \lesseqgtr 0$, allora, in generale, se $n - 2 < p$ non vi è assintoto di equazione $Y = gX + h$; se $n - 2 = p$ vi è l'assintoto

$$Y = gX + \sqrt{-\frac{2\psi(g)}{\varphi''(g)}}$$

se posto $-\frac{2\psi(g)}{\varphi''(g)} > 0$; e se $n - 2 > p$ abbiamo l'assintoto $Y = gX$.

E così di seguito, si potrebbero considerare i casi in cui $\varphi(g)=0$, $\varphi'(g)=0$, $\varphi''(g)=0$, $\varphi'''(g)\lesseqgtr 0$, etc. ma non ci estenderemo più oltre. — Così ad esempio riconosciamo subito, applicando queste regole, che la curva

$$x^2(y-x)^2+ay^3+bx^3+cx+dy+e=0$$

non ha assintoti di equazione $Y=gX+h$; che la curva $x^2(x-y)^2-a^2(x^2+y^2)=0$ ha gli assintoti $Y=X\pm a\sqrt{2}$ (vi sono anche i due assintoti, paralleli all'asse delle y, $X=\pm a$); che la curva $x^2(y+2x)^2+ax^2+by^2+d=0$ ha l'assintoto $Y=-2X$.

8. Dimostriamo ora che, se la tangente alla curva in un pnnto $M(x, y)$ converge verso una retta limite, quando M si allontana indefinitamente sulla curva, questa retta limite è un assintoto.

Scriviamo la equazione

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$$

della tangente nella forma

$$Y=\frac{dy}{dx}X+\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)$$

e supponiamo che sia

$$(1)\qquad \lim_{x=\infty}\frac{dy}{dx}=g',\qquad \lim_{x=\infty}\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)=h',$$

cosichè la retta limite delle posizioni della tangente sia la

$$Y=g'X+h'.$$

Dico che è $g'=\lim\limits_{x=\infty}\frac{y}{x}$, $h'=\lim\limits_{x=\infty}(y-g'x)$, e allora questa retta sarà appunto un assintoto.

Basta perciò osservare che, applicando la regola di l'Hôspital, il che può farsi dietro la supposizione dell'esistenza dei limiti (1), si ha

$$\lim_{x=\infty}\frac{y}{x}=\lim\frac{\frac{dy}{dx}}{1}=g',$$

$$\lim_{x=\infty}(y-g'x)=\lim\frac{\frac{y}{x}-g'}{\frac{1}{x}}=\lim\frac{\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)=h'.$$

Notiamo che, ove al crescere di x la $\frac{dy}{dx}$ o la espressione $y-x\frac{dy}{dx}$ non avessero limiti determinati (ed allora la tangente non convergerebbe verso una retta determinata), potrebbe ciò non ostante la curva avere asisntoti. Ciò accade ad es.: per la curva $y=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, che ha per assintoto l' asse delle x.

Convessità e concavità — Flessi.

9. Premettiamo le seguenti considerazioni.

Sia $f(x)$ funzione che ammette derivata n esima nel punto x_0, cosichè esiste un intorno c di x_0 per tutti i punti del quale esistono e sono continue le derivate degli ordini precedenti. La funzione di h

$$\varphi(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)-\frac{h^2}{2!}f''(x_0)-\ldots-\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)}{h^n},$$

dove x_0+h appartiene all' intorno c, è il rapporto di due funzioni di h, che si annullano per $h=0$ insieme alle loro derivate 1.ª 2ª.... $(n-1)^{ma}$; avremo quindi

$$\lim_{h=0}\varphi(h)=\lim_{h=0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)-hf''(x_0)-\ldots-\frac{h^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-1)}(x_0)}{n\,h^{n-1}},$$

$$\lim_{h=0} \varphi(h) = \lim_{h=0} \frac{f''(x_0+h) - f''(x_0) - h f'''(x_0) - \ldots - \frac{h^{n-3}}{(n-3)!} f^{(n-1)}(x_0)}{n(n-1)\, h^{n-2}}$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \lim_{h=0} \frac{f^{(n-1)}(x_0+h) - f^{(n-1)}(x_0)}{n(n-1)\ldots 3 \,.\, 2\, h} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0),$$

ed in conseguenza $\varphi(h) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) + \varepsilon_1 = \frac{1}{n!} [f^{(n)}(x_0) + n!\,\varepsilon_1]$ essendo ε_1 quantità che converge a zero con h, od anche

$$\varphi(h) = \frac{1}{n!} [f^{(n)}(x_0) + \varepsilon],$$

essendo ε quantità che converge a zero con h.

Avremo dunque

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \ldots$$

$$+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + \frac{h^n}{n!} [f^{(n)}(x_0) + \varepsilon],$$

e si ha così una nuova forma di resto dello sviluppo del Taylor [1].

10. Sia ora la curva $y = y(x)$ o $f(x, y) = 0$; sia M un suo punto di coordinate (x, y), dove supponiamo y positivo. Diamo ad x un aumento h positivo o negativo, e paragoniamo tra loro la ordinata della curva, Y_c, e quella della tangente. Y_t, corrispondenti allo stesso valore $x + h$ dell' ascissa.

Dall' equazione

$$Y - y(x) = y'(x)(X - x)$$

della tangente nel punto M, supposto $X = x + h$, abbiamo

$$Y_t = y(x) + h y'(x):$$

per cui

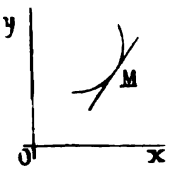
$$Y_c - Y_t = y(x+h) - y(x) - h y'(x).$$

Se si suppone che nel punto x esista la $\frac{d^2y}{dx^2}$ e sia diversa da zero

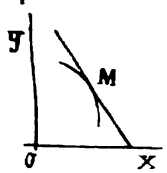
[1] Vedi - Peano - Calcolo Differenziale, pag. XIX; e Peano, Une nouvelle forme du reste dans la formule de Taylor, Mathesis, tomo IX.

avremo $Y_c - Y_t = \frac{h^2}{2}[y''(x) + \varepsilon]$ ed esisterà un intorno c di questo punto, per tutti i punti del quale $Y_c - Y_t$ avrà lo stesso segno di $y''(x)$, ed ove inoltre Y_c e Y_t saranno positive, perchè le funzioni $y(x)$ e $y(x) + hy'(x)$ sono continue e positive nel punto x Ai punti di c, sull'asse delle x, corrispondono sulla curva punti che costituiscono un tratto di curva, che potremo chiamare intorno del punto M, e pei punti di quest' intorno $Y_c - Y_t$ ha lo stesso segno di $y''(x)$.

Se è $y''(x) > 0$, le ordinate della curva, in quest' intorno di M, essendo maggiori delle corrispondenti della tangente, l' intorno è tutto nell' angolo ottuso che la tangente fa coll' asse delle x; si dice allora che la curva nel punto M volge la sua *convessità* all'asse delle x o che è *convessa* verso quest' asse.



Se è $y''(x) < 0$, le ordinate della curva sono minori delle corrispondenti della tangente; l' intorno del punto M è nell' angolo acuto della tangente coll' asse delle x; si dice allora che la curva nel punto M volge la sua *concavità* all'asse delle x o che è *concava* verso quest' asse.



Se la ordinata del punto M fosse negativa, seguiterebbero a sussistere le formole precedenti, e, poichè possiamo prender l' intorno c in modo che Y_c e Y_t siano negativi, si scorge facilmente che, se $y''(x) > 0$, l' intorno del punto M è nell' angolo acuto della tangente coll' asse x, e la curva è in M concava verso quest' asse; e se $y''(x) < 0$ la curva è convessa.

Da ciò si raccoglie che: *Se la ordinata* y *di un punto* M *d' una curva non è zero, e se la* $\frac{d^2y}{dx^2}$, *corrispondente a quel punto, è pure diversa da zero, la curva in* M *è convessa oppure concava verso l'asse delle* x *secondochè* y(x) e y''(x) *sono dello stesso segno oppure di segno diverso; ed in entrambi i casi vi è un intorno del punto* M *sulla curva tutto dalla stessa parte rispetto alla tangente in* M, *o, come suol dirsi, la curva è nelle vicinanze del punto* M *tutta dalla stessa parte della tangente.*

Se una curva è convessa o concava in tutti i punti di un suo tratto, e dicesi convessa o concava in tutto quel tratto verso l'asse delle x.

Se la ordinata y del punto M è zero, cioè il punto M e sull' asse c e x, le formole trovate rimangono inalterate.

Se è $y''(x) > 0$, i punti dell' intorno di M che sono al disopra dell' asse delle y sono nell' angolo ottuso che la tangente in M fa coll' asse stesso; diremo allora che la curva è, nel punto M e al disopra dell' asse x, convessa verso quest' asse. I punti dell' intorno di M che sono al disotto sono invece nell' angolo acuto; diremo che la curva è, nel punto M e al disotto dell' asse x, concava verso questo asse. L' inverso avviene se $y''(x) < 0$.

Laonde possiamo dire che:

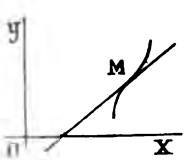
Se il punto M *è sull' asse dalle* x *e in esso* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *è diversa da zero, la curva nel punto* M *e al disopra dell' asse delle* x *è convessa, e al disotto concava verso quest' asse se in* M *è* $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$; *ed è concava al disopra e convessa al disotto se* $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$. *In entrambi i casi la curva è nelle vicinanze del punto* M *dalla stessa parte della tangente.*

Nelle precedenti ricerche si è tacitamente supposto che nel punto M sia $y'(x)$ diversa da zero. Sa ciò accadesse il valore $y(x)$ sarebbe massimo o minimo, e potremo chiamare il punto M punto di massimo o di minimo, secondochè in M è $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ o $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$.

11. Si supponga ora che nel punto M sia $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ e che esista la $\frac{d^3y}{dx^3}$ nel punto x. Allora possiamo scrivere

$$Y_c - Y_t = \frac{h^3}{1.2.3}\,[y'''(x) + \varepsilon].$$

Se la $y'''(x)$ è diversa da zero, avremo un intorno del punto x, e quindi un corrispondente intorno del punto M sulla curva, per tutti i punti del quale la quantità tra parentesi ha lo stesso segno di $y'''(x)$; in conseguenza $Y_c - Y_t$ cambia segno con h. Considerando dell' intorno di M le due porzioni che stanno da una parte e dall' altra del punto M, si vede così che se una di queste porzioni è da una parte rispetto alla tangente, l' altra è dall' altra parte. La tangente attraversa la curva nel punto di contatto.



Questi punti M si chiamano *flessi* o *punti di inflessione*. Sono caratterizzati da ciò che in essi è $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ e $\frac{d^3y}{d^3x}$ è diversa da zero.

12. Abbiamo nelle precedenti ricerche escluso che la tangente nel punto M fosse parellela all' asse delle y, caso che corrisponderebbe all' essere infinita la $\frac{dy}{dx}$ nel punto M. Ora se ciò appunto avviene, si intende che non potremo parlare nel punto M di convessità o concavità della curva verso l' asse delle x. Però, se la derivata è infinita e indeterminata di segno, sappiamo allora che (Vedi n. 175, vol. I) il punto M è punto di massimo o minimo, e la tangente in M non attraversa la curva. Se invece la derivata è infinita e determinata di segno, i due rapporti incrementali

$$\frac{y(x+h)-y(x)}{h}, \quad \frac{y(x-h)-y(x)}{-h}.$$

finiranno per essere dello stesso segno e quindi i loro numeratori di segno diverso; da ciò è facile riconoscere che la tangente nel punto M attraversa la curva. Il punto M è quindi un *flesso.*

13. Se nel punto M è $\frac{dy}{dx}$ diversa da zero, $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, $\frac{d^3y}{dx^3}=0$, ... $\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}=0$ e $\frac{d^my}{dx^m}$ diversa da zero, osservando che allora

$$Y_c - Y_t = \frac{h^m}{1.2\ldots m}[y^{(m)}(x)+\varepsilon],$$

si riconosce subito che: *se* m *è pari la curva è nel punto* M *convessa o concava verso l' asse delle* x *secondochè* y *e* $\frac{d^my}{dx^m}$ *sono dello stesso segno o di segno diverso: se* m *è dispari il punto* M *è un flesso.*

Se poi fosse anche $\frac{dy}{dx}=0$ nel punto M, allora, *se* m *è pari il punto* M *è punto di massimo o minimo*; *se* m *è dispari il punto* M *è un flesso.*

Esempi

1 Sia la curva $y=\operatorname{sen} x$ (*sinussoide*). Poichè sen x è funzione periodi ı col periodo 2π basterà esaminare la curva per l' intervallo $(0,2\pi)$ di ·. A questo intervallo corrisponde un tratto di curva, la quale

nella sua totalità è composta di infiniti altri tratti uguali a questo. Ora poichè $y' = \cos x$, $y'' = -\operatorname{sen} x$, $y''' = -\cos x$, si vede che la curva è concava all'asse delle x nell'intervallo $(0, \pi)$ nel quale le ordinate sono positive ed è pure concava nell'intervallo $(\pi, 2\pi)$ nel quale le ordinate sono negative; per $x = 0, \pi, 2\pi$ vi è un flesso, situato sull'asse delle x. La curva è facilmente disegnabile, come è noto.

2) Per la curva $y = x^2 - x^4 = x^2(1 - x^2)$ abbiamo

$$y' = 2x(1 - 2x^2),\ y'' = 2(1 - 6x^2\ ,\ y''' = -24x.$$

La curva è simmetrica rispetto all'asse delle y, perchè y assume lo stesso valore per i valori di x uguali e di segno contrario. Passa per i punti 0, 1, -1 dell'asse delle x. Ha due flessi per $x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$, cui corrisponde $y = \frac{5}{36}$. Il punto $(x = 0, y = 0)$ è punto di minimo, e i punti $\left(x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{1}{4}\right)$, $\left(x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{1}{4}\right)$ sono punti di massimo. Il tratto di curva corrispondente all'intervallo $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ di x è convesso verso l'asse delle x, i tratti corrispondenti agli intervalli $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, 1\right)$, $\left(-1, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ sono concavi, e quelli corrispondenti agli intervalli $(1, \infty)$, $(-\infty, -1)$ sono convessi verso quell'asse.

3) Per la curva $y^3 = ax^2$ ossia $y = \sqrt[3]{a}\, x^{\frac{2}{3}}$ (*parabola semicubica*) la ordinata è sempre positiva, supposto $a > 0$, e per $x = 0$ è zero; inoltre è $y' = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{a}{x}}$ per x diverso da zero, e $y'' = -\frac{2}{9}\frac{\sqrt[3]{a}}{x^{\frac{1}{3}}}$. La curva è dapertutto concava verso l'asse delle x, e per $x = 0$, essendo y' infinita e indeterminata di segno (Vedi n. 177, esempio 2°. vol. I) si ha un minimo, e non vi sono flessi perchè, inoltre, y'' non può annullarsi per alcun valore finito di x.

4) Per la curva $y = x^6 - x^4 + x + 1$ abbiamo

$$y' = 6x^5 - 4x^3 + 1, \qquad y'' = 6x^2(5x^2 - 2),$$
$$y''' = 24\,x(5x^2 - 1), \qquad y'''' = 24(15x^2 - 1).$$

La y'' si annulla per $x=0$, $x=\pm\sqrt{\frac{2}{5}}$; ai due ultimi valori di x corrispondono due flessi; pel primo, essendo ancora $y'''=0, y''''=-24$, non si ha flesso, e poichè è ivi $y=1$, la curva è concava verso l'asse delle x. Inoltre negli intervalli per x da $-\infty$ a $-\sqrt{\frac{2}{5}}$ e da $\sqrt{\frac{2}{5}}$ all'∞ è $y''>0$; nell'intervallo $\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right)$ è $y''<0$. Poichè $y'(0)=1$, $0<y'\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)<1$, la y' è positiva e decrescente da $x=0$ a $x=\sqrt{\frac{2}{5}}$, positiva e crescente da $x=\sqrt{\frac{2}{5}}$ a $x=\infty$; ed essendo $y(0)=1$ la y è quindi sempre positiva e crescente da $x=0$ a $x=\infty$, e il tratto di curva dal punto $(0, 1)$ al flesso è concavo verso l'asse delle x, quello da $(0, 1)$ all'infinito è invece convesso. Applicando inoltre opportunamente noti teoremi di algebra, si riconosce, senza difficoltà, che $y'(x)$ ha una sola radice negativa, che chiameremo $-a$, situata tra $x=-1$ e $x=-\sqrt{\frac{2}{5}}$; che $y'(x)$ è sempre negativa nell'intervallo $(-\infty, -a)$, sempre positiva nell'intervallo $(-a, \infty)$. La funzione $y(x)$ si annulla per $x=-1$; da $x=-\infty$ a $x=-1$ è sempre positiva e decrescente, è negativa per $x=-a$ dove ha un minimo, si annulla nuovamente per un certo valore $x=-b$ compreso tra $-a$ e $-\sqrt{\frac{2}{5}}$, è positiva nell'intervallo $(-b, \infty)$. Per cui la curva è convessa nel tratto corrispondente all'intervallo $(-\infty, -1)$ di x, è concava nel tratto corrispondente all'intervallo $(-1, -b)$, convessa pel tratto corrispondente all'intervallo $\left(-b, -\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$, concava pel tratto corrispondente all'intervallo $\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}, 0\right)$.

5) Sia la curva

$$f(x, y)=y^3+y+\varphi(x)=0,$$

dove $\varphi(x)$ è funzione univalente finita che ammette derivata prima e seconda.

Abbiamo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \varphi'(x),\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \varphi''(x),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0,$$

e poichè $\frac{\partial f}{\partial y}$ non si annulla mai per alcun valore (reale) di y e di x, la $f(x, y) = 0$ definisce una funzione univalente finita e che ammette derivata; e si riconosce che essa è formata da una solo ramo. perchè, se ad un certo valore di x potessero corrispondere tre radici reali y della $f(x, y) = 0$, tra due di queste radici dovrebbe esservene una della $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, che non ha mai radici reali. Per ogni valore di x abbiamo quindi un sol valore (reale) di y definito dalla $f(x, y) = 0$. Osservando che (Vedi n. 113, vol. I)

$$y'' = -\frac{\overline{\varphi'(x)}^2\, 6y + (3y^2 + 1)^2\, \varphi''(x)}{(1 + 3y^2)^3}$$

e introducendo in questa formola le coordinate del punto che si considera sulla curva, si riconosce se essa in quel punto sia concava o convessa verso l'asse delle x.

Se p: es: fosse $\varphi(x) = ax + b$, si avrebbe

$$y' = -\frac{a}{1 + 3y^2},\ y'' = -\frac{6a^2 y}{(1 + 3y^2)^3},\ yy'' = -\frac{6a^2 y^2}{(1 + 2y^2)^3}$$

e la curva sarebbe sempre concava verso l'asse delle x. Per $y = 0$ cui corrisponde $x = -\frac{b}{a}$, cioè nel punto $\left(x = -\frac{b}{a},\ y = 0\right)$, la curva ha un flesso, perchè è $y'' = 0$ e y''' è diversa da zero; e non ne ha altri, perchè y'' non si annulla per altri valori di y, e y' non è mai infinita.

Notiamo però che la ricerca dei flessi e della convessità e concavità d'una curva, la cui equazione sia data in forma implicita $f(x, y) = 0$, riesce quasi sempre malagevole.

6) Siano $x = t + t^2$, $y = t^2 + t^3$ le coordinate dei punti di una curva. Essendo

$$dx = (1 + 2t)dt,\ dy = (2t + 3t^2)dt,\ d^2x = 2dt^2,\ d^2y = (2 + 6t)dt^2,$$

abbiamo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2t + 3t^2}{1 + 2t}, \; y'' = \frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3} = 2 \frac{3t^2 + 3t + 1}{(1 + 2t)^3}.$$

Osservando che le radici della equazione $3t^2 + 3t + 1 = 0$ sono complesse, si vede che non vi saranno flessi provenienti dall'annullarsi di y''. Questo ci fa ancora vedere che y'' non può cambiar segno, altro che cambiando segno il denominatore del suo secondo membro, giacchè possiamo scrivere $y'' = \frac{3(1 + 2t)^2 + 1}{2(1 + 2t)^3}$. Cosichè se $1 + 2t > 0$, è $y'' > 0$, se $1 + 2t < 0$ è $y'' < 0$; ossia è $y'' > 0$ per $t > -\frac{1}{2}$, è $y'' < 0$ per $t < -\frac{1}{2}$. E poichè $y = t^2(t + 1)$ è > 0 per $t > -1$, è < 0 per $t < -1$, vediamo che pei valori di t da $-\infty$ a -1 la curva è convessa verso l'asse delle x, pei valori di t da -1 a $-\frac{1}{2}$ è concava, e per quelli da $-\frac{1}{2}$ a $+\infty$ è convessa.

Per avere una idea dell'andamento della curva, si osservi che $x = t(t + 1)$ prende i valori da ∞ a zero, quando t passa da $-\infty$ a -1 e la y i valori da $-\infty$ a zero, cosichè abbiamo un ramo di curva al disotto dell'asse positivo delle x che passa per l'origine delle coordinate e che è, come si è visto, sempre convesso verso l'asse delle x. La tangente a questo ramo nell'origine fa coll'asse delle x un angolo la cui tangente trigonometrica è -1, come risulta dal valore di y' per $t = -1$; la tangente è la bissettrice dell'angolo retto formato dalle parti negative degli assi coordinati. La x assume l'unico valore minimo $-\frac{1}{4}$ per $t = -\frac{1}{2}$; per i valori di t da -1 a $-\frac{1}{2}$ la x prende i valori da 0 a $-\frac{1}{4}$ e la y i valori da zero a $\frac{1}{8}$ ed abbiamo così un corrispondente ramo di curva che è, come abbiamo visto, concavo verso l'asse delle x; per i valori di t da $-\frac{1}{2}$ a zero la x prende i valori da $-\frac{1}{4}$ a zero e la

y un' altra successione di valori positivi da $\frac{1}{8}$ a zero e si ha così un corrispondente ramo di curva, convesso verso l' asse delle x. Per $t = -1$, $\left(x = -\frac{1}{4}, y = \frac{1}{8}\right)$, la tangente è parallela all'asse delle y. Per $t = 0$, $(x = 0, y = 0)$, la tangente è l' asse della x. Infine pei valori di t da zero a $+\infty$ la x prende i valori da zero a $+\infty$, la y i valori da zero a $+\infty$ e si ha un ramo di curva convesso all' asse delle x, tangente nell' origine all' asse delle x.

Per avere l' equazione della curva in coordinate cartesiane si elimini t dalle equazioni $x = t + t^2$, $y = t^2 + t^3$; perciò, osservando che $y = tx$, si ricavi il valore di t dalla prima equazione e si sostituisca in quest'ultima. Elevando poi al quadrato si ottiene: $y^2 + xy - x^3 = 0$.

Punti singolari delle curve piane — Descrizione delle curve.

14. Si sogliono chiamare *punti singolari* d' una curva piana i punti che ora andiamo a considerare.

1) *I flessi* della curva, che sono stati precedentemente studiati.

2) *Punti d' arresto o di fermata.* Sono punti nei quali un ramo di curva viene bruscamente a fermarsi. Ad es. la curva, la cui equazione è $y = x \log x$ per x diverso da zero e $y = 0$ per $x = 0$, ha per punto di fermata l' origine delle coordinate, perchè per valori negativi di x la funzione $x \log x$ non ha alcun valore (reale). Lo stesso avviene per la curva $y = e^{-\frac{1}{x}}$, $(x \lesseqgtr 0)$, e $y = 0$ per $x = 0$; il ramo di curva che passa per l' origine si arresta ivi bruscamente.

3) *Punti salienti o angolosi o vertici.* Sono punti di un ramo di curva, nei quali vi è una tangente da una parte distinta dalla tangente dall' altra; se $y = y(x)$ è l'equazione della curva, $y(x)$ funzione univalente, questi punti corrispondono a quei valori di x pei quali la $y(x)$ non ha derivata ordinaria, avendo però una derivata a destra e una a sinistra diverse tra loro. Ad es.: l' origine delle coordinate, per la curva $y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$, $(x \gtreqless 0)$, e $y = 0$ per $x = 0$, e per la curva $y = x \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$, $(x \gtreqless 0)$, e $y = 0$ per $x = 0$, è un punto saliente.

4) *Punti isolati o coniugati.* Sono punti le cui coordinate soddisfanno all' equazione di una curva, ma pei quali esiste un intorno dove non cade alcun altro punto della curva. Ad es: per la curva $y^2 = x^2(x^2 - 1)$ l' origine è un punto isolato perchè le sue coordinate $x = 0$, $y = 0$ soddisfanno alla equazione della curva, mentre poi solo attribuendo alla x valori tali che sia $x^2 \geqq 1$ sono possibili corrispondenti valori (reali) per y.

Per la curva $y^2 = x \operatorname{sen}^2 x$ sono punti isolati tutti quelli le cui coordinate sono $y = 0$, $x = -k\pi$, essendo k intero positivo.

5) *Punti di regresso o cuspidi o punti stazionari* sono quelli nei quali vengono ad arrestarsi due rami di curva e dove essi hanno una tangente comune. Ad es.: per la curva $y = y(x)$, $y(x)$ essendo univalente, ai valori di x, pei quali la derivata è infinita e indeterminata di segno. corrispondono punti di regresso.

Sia ancora la curva $y = (1 + x)^2 + \sqrt[4]{x^5}$; del radicale consideriamo i due valori reali $+\sqrt[4]{x^5}$, $-\sqrt[4]{x^5}$; cosichè $y = (1+x)^2 \pm \sqrt{x^5}$ dove allora $\sqrt[4]{x^5}$ indica il valore aritmetico della radice quarta di x^5. Ad ogni valore di x positivo corrispondono due valori per y; per x negativo la y non è reale; e i due valori reali di y diventano uguali tra loro e uguali a *uno* per $x = 0$. Quindi i due rami della curva vengono a riunirsi e ad arrestarsi nel punto $(0, 1)$. Inoltre essendo $y' = 2(x + 1) \pm \frac{5}{4}\sqrt[4]{x}$ è $y'(0) = 2$; quindi vi è una sola tangente comune ai due rami di curva nel punto $(0, 1)$, che è perciò effettivamente un punto di regresso.

Si sogliono anche distinguere i regressi di primo genere o prima specie, che sono quelli pei quali i due rami di curva stanno da una parte e dall' altra della tangente comune, e quelli di secondo genere o seconda specie, pei quali i due rami di curva sono dalla stessa parte della tangente comune.

6) *Punti multipli.* Son quelli nei quali si incontrano due o più rami della curva. In particolare sono punti doppi, tripli,.... quelli pei quali passano due, tre,... rami della curva. La curva ammette, in generale, più tangenti in questi punti.

Ad es.: sia la curva $y = \pm x\sqrt{1 - x^2}$. Essa è simmetrica rispetto agli assi. Ad ogni valore di x dell' intervallo

$(-1, 1)$ corrispondono per y due valori uguali e di segno contrario; questi valori diventano uguali tra loro e uguali a zero per $x=0$; nell' origine delle coordinate passano quindi due rami della curva. Inoltre, essendo

$$y' = \pm\sqrt{1-x^2} \mp \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \pm\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}},$$

è $y'(0) = \pm 1$; vi sono quindi due tangenti distinte nell'origine delle coordinate, e sono le bissettrici degli assi.

Essendo poi ancora $y'' = \pm\dfrac{2x^3-3x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$,

$$y''' = \pm\frac{(6x-3)\,(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + 3x(3x^2-3x)\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-x^2)^3}$$

e quindi $y''(0)=0$, $y'''(0) = \mp 3$, si vede che l'origine è anche un flesso per ciascuno dei due rami della curva che passa per esso. Questa curva ha la forma di un otto rovesciato, ∞.

15. Sia la equazione della curva data sotto forma implicita $f(x, y) = 0$, dove supponiamo la $f(x, y)$ funzione univalente finita delle due variabili x, y e che ammetta tutte quelle derivate parziali, che man mano si presenteranno, e tutte queste funzioni siano continue per i sistemi dei valori per x, y che dovremo considerare. Affinchè il punto di coordinate x_0, y_0, appartenente alla curva, sia punto multiplo occorre che le $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ siano entrambe nulle per $x=x_0, y=y_0$. Infatti se $f'_y(x_0, y_0)$ è diverso da zero, pel teorema al n. 89, vol. I, esiste un intervallo $(x_0 - h, x_0 + h)$, per tutti i punti x del quale la $f(x, y) = 0$ definisce una unica funzione univalente $y = y(x)$, che per $x = x_0$ prende il valore $y_0 = y(x_0)$; cosichè pel punto (x_0, y_0) passa un solo ramo di curva, quello corrispondente a questa funzione $y = y(x)$.

Sia dunque $f'_y(x_0, y_0) = 0$; ma dovrà anche essere $f'_x(x_0, y_0) = 0$, affinchè (x_0, y_0) possa essere punto multiplo: perchè se ciò non fosse la $f(x, y) = 0$ definirebbe in un certo intervallo $(y_0 - k, y_0 + k)$ di y una funzione $x = x(y)$ univalente di y etc.

Vediamo così che le coordinate dei punti multipli d' una curva

$f(x, y) = 0$ devono, oltre che all'equazione della curva, soddisfare alle due equazioni $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Supponiamo adunque sia

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

e $f''_{yy}(x_0, y_0)$ diverso da zero.

Avremo, applicando la formola del Taylor relativa al caso di due variabili indipendenti,

$$(1) \qquad f(x_0 + h, y_0 + k) = \frac{1}{2}\{h^2 f''_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$$

$$+ 2hk f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + k^2 f''_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)\}$$

dove $0 < \theta < 1$.

Supponiamo esista un intorno del punto (x_0, y_0) per tutti i punti del quale, escluso al più il punto (x_0, y_0), sia

$$(2) \qquad \varphi(x, y) = [f''_{xy}(x, y)]^2 - f''_{xx}(x, y)\, f''_{yy}(x, y) > 0;$$

e poichè vi è pure un intorno di (x_0, y_0) nel quale $f''_{yy}(x, y)$ ha sempre lo stesso segno di $f''_{yy}(x_0, y_0)$, avremo un intorno c nel quale, oltre a quest'ultima condizione, sarà ancora verificata la (2). I valori di h, k che compariscouo nella (1) siano tali che i punti (x_0+h, y_0+k) appartengano a c. La (1) può scriversi così:

$$f(x_0 + h, y_0 + k)$$

$$= \frac{1}{2} f''_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)\,[k - \alpha(h, k)]\,[k - \beta(h, k)]$$

dove

$$\alpha(h, k) = h\,\frac{-f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + \sqrt{\varphi(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)}}{f''_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)},$$

$$\beta(h, k) = h\,\frac{-f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) - \sqrt{\varphi(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)}}{f''_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)}.$$

Fissiamo un valore $k = k_0$ positivo. Potremo anche fissare h_0 in gi a che, per $|h| \leq h_0$, $|k| \leq k_0$, sia $|\alpha(h, k)| < k_0$, $|\beta(h, k)| < k_0$: cosi è, essendo perciò

$$k_0 - \alpha(h, k_0) > 0, \qquad -k_0 - \alpha(h, -k_0) < 0,$$

vi sarà almeno un valore k_1 di k, compreso tra $-k_0$ e k_0, tale che

$$k_1 - \alpha(h, k_1) = 0.$$

In modo analogo si vede che dovrà esservi almeno un valore k_2 di k tale che

$$k_2 - \beta(h, k_2) = 0.$$

Con ciò rimane dimostrata l'esistenza di un certo intervallo $(x_0 - h_0, x_0 + h_0)$ del punto x_0, tale che ad ogni suo punto $x = x_0 + h$ corrispondono per y almeno due valori distinti, $y_0 + k_1, y_0 + k_2$ tali che risulti

$$f(x_0 + h, y_0 + k_1) = 0, \qquad f(x_0 + h, y_0 + k_2) = 0.$$

Ma di questi valori non possono esservene più di due. Ed invero, ove per un terzo valore $y_0 + k_3$ fosse $f(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0$, e supponessimo $y_0 + k_1, y_0 + k_2, y_0 + k_3$ in ordine di grandezza crescente, tra $y_0 + k_1$ e $y_0 + k_2$ dovrebbe esservi un valore $y_0 + k'$ tale che fosse $f'_y(x_0 + h, y_0 + k') = 0$; tra $y_0 + k_2$ e $y_0 + k_3$ un valore $y_0 + k''$ tale che $f'_y(x_0 + h, y_0 + k'') = 0$; ed allora altresì tra $y_0 + k', y_0 + k''$ un valore $y_0 + k'''$ tale che fosse $f''_{yy}(x_0 + h, y_0 + k''') = 0$, il che non può essere.

Possiamo adunque dire che nell'intervallo $(x_0 - h_0, x_0 + h_0)$ la equazione $f(x, y) = 0$ definisce due funzioni $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ che per $x = x_0$ divengono entrambe uguali a y_0, cioè $y_1(x_0) = y_2(x_0)$.

Si riconosce subito che queste due funzioni sono continue, perchè k_0 lo si può scegliere piccolo quanto si vuole, e la differenza tra due valori che una qualunque di queste due funzioni prende in due punti qualunque dell'intervallo $(x_0 - h_0, x_0 + h_0)$ è numericamente minore di k_0. Quindi k_1 e k_2 convergono a zero con h. Inoltre queste due funzioni ammettono derivata nel punto (x_0, y_0), perchè abbiamo

$$y'_1(x_0) = \lim_{h=0} \frac{k_1}{h} = \lim \frac{\alpha(h, k_1)}{h} = \frac{-f''_{xy}(x_0, y_0) + \sqrt{\varphi(x_0, y_0)}}{f''_{yy}(x_0, y_0)},$$

$$y'_2(x_0) = \lim_{h=0} \frac{k_2}{h} = \lim \frac{\beta(h, k_2)}{h} = \frac{-f''_{xy}(x_0, y_0) - \sqrt{\varphi(x_0, y_0)}}{f''_{yy}(x_0, y_0)}. \text{ [1]}$$

---

[1] Queste considerazioni, relative al caso in cui per $x = x_0$, $y = y_0$ è $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, e che servono di complemento al teorema del n. 89, vol. I, sono tolte dalla tesi per l'abilitazione all'insegnamento « *Sulla teoria delle funzioni implicite* » presentata dal Dott. *Elcia Sadun* alla R. Scuola Normale superiore di Pisa e stampata nel volume 4° degli Annali della Scuola medesima.

Il punto (x_0, y_0) è quindi un punto doppio, perchè per esso passano i due, e due soli, rami di curva $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$.

I valori precedenti di $y'_1(x_0)$, $y'_2(x_0)$ sono i coefficienti angolari delle due tangenti in (x_0, y_0) ai due rami di curva. Se fosse, in particolare, $\varphi(x_0, y_0) = 0$, i due rami di curva avrebbero la stessa tangente, ossia sarebbero tangenti tra loro nel punto doppio.

La condizione dell' esistenza di un intorno di (x_0, y_0) pei punti del quale sia $\varphi(x, y) > 0$ è soddisfatta se $\varphi(x_0, y_0) > 0$. Se invece si suppone $\varphi(x_0, y_0) < 0$ vi è un intorno del punto (x_0, y_0) pel quale è $\varphi(x, y) < 0$; ma la (1) può scriversi così:

$$f(x_0 + h, y_0 + k)$$

$$= \frac{1}{2} f''_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \left\{ \left(k + h \frac{f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)}{f''_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)} \right)^2 \right.$$

$$\left. + \frac{-h^2 \varphi(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)}{[f''_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)]^2} \right\},$$

e si vede perciò che l' equazione $f(x_0 + h, y_0 + k) = 0$ non può essere soddisfatta da alcun sistema di valori di h, k eccettuato il sistema $h = 0$, $k = 0$. Pel punto (x_0, y_0) non passa quindi alcun ramo di curva; esso è perciò un punto isolato.

Se poi è $\varphi(x_0, y_0) = 0$ non possiamo subito decidere nulla intorno alla natura della curva nel punto (x_0, y_0). Se esiste un intorno di (x_0, y_0) per tutti i punti del quale è $\varphi(x, y) > 0$ allora siamo nel caso accennato più sopra, e il punto (x_0, y_0) è un punto doppio dove i due rami di curva si toccano. Se esiste un intorno nel quale $\varphi(x, y) < 0$ il punto (x_0, y_0) è punto isolato. Se poi, condotta pel punto (x_0, y_0) una parallela all' asse delle y, si trova che vi è un intorno del punto (x_0, y_0) da una parte di questa parallela, nel quale $\varphi(x, y) > 0$, e uno dall' altra parte, nel quale $\varphi(x, y) < 0$, allora i due rami di curva si arrestano nel punto (x_0, y_0) ed hanno ivi una tangente comune; il punto (x_0, y_0) è quindi un punto di regresso. Notiamo però che queste condizioni sono sufficienti, non necessarie, affinchè si abbia un punto doppio coi due rami che si toccano, o un punto isolato, o un punto di regresso.

Da tutte le considerazioni precedenti, ritenute per la $f(x, y)$ le condizioni poste in principio, risulta il teorema:

Sia (x_0, y_0) *un sistema di valori che soddisfa alle equazioni*

$f(x, y) = 0, \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ *e sia* $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ *diverso da zero per* $x = x_0, y = x_0$.

Allora se nel punto (x_0, y_0) *è* $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$, *il punto* (x_0, y_0) *è punto doppio della curva* $f(x, y) = 0$ *e le tangenti trigonometriche degli angoli, che le due tangenti nel punto* (x_0, y_0) *fanno coll' asse delle* x, *si ottengono dalla espressione*

$$\frac{1}{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}} \left\{ -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}} \right\}$$

facendo in essa $x = x_0$, $y = y_0$.

Se $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$ *per* $x = x_0$, $y = y_0$, *il punto* (x_0, y_0) *è un punto isolato.*

Se $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ *nel punto* (x_0, y_0), *questo è, generalmente, o un punto isolato o un punto di regresso o un punto doppio in cui si toccano i due rami di curva che passano per esso; ed occorre studiare come si comporta la* $f(x, y)$ *o la espressione* $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ *negli intorni di* (x_0, y_0).

16. Se nel punto (x_0, y_0) è $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, ma è diversa da zero $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, si intende subito come, prendendo per variabile indipendente la y, i ragionamenti precedenti seguitino a sussistere, e come si possa decidere, in modo completamente analogo, intorno alla natura del punto (x_0, y_0).

Ove poi nel punto (x_0, y_0) fosse contemporaneamente $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ ma $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ diversa da zero, allora può giovare, per decidere della natura del punto (x_0, y_0), fare ruotare gli assi intorno all' origine di un angolo qualunque α, che può venire poi convenientemente scelto secondo i casi; indicate con x', y' le nuove coordinate cartesiane, e con $F(x', y') = 0$ l' equazione cui si riduce la $f(x, y) = 0$

mercè le note relazioni

$$x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha, \qquad y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha,$$

e con (x'_0, y'_0) le coordinate del punto (x_0, y_0) relativamente al nuovo sistema di assi, le formule

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\operatorname{sen}\alpha, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = -\frac{\partial f}{\partial x}\operatorname{sen}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\alpha,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\operatorname{sen}^2\alpha - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cos\alpha$$

ci mostrano che nel punto (x'_0, y'_0) è $\frac{\partial F}{\partial x'} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ (le quali provano. come era da prevedersi, essere i punti singolari che stiamo studiando indipendenti dalla posizione degli assi coordinati) e che $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ è diverso da zero, riducendosi a $-2f''_{xy}(x_0, y_0)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$. Possiamo quindi applicare alla funzione $F(x', y')$ l'analisi che ci ha condotto al teorema del n. precedente.

Qualora poi fossero zero tutte e tre le derivate parziali di secondo ordine della $f(x, y)$ per $x = x_0, y = y_0$, ma fosse diversa da zero la $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$, allora si potrebbero istituire ricerche analoghe a quelle del n. 15, e saremo così condotti a risolvere la equazione

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\,\partial x}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x^2}\,\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0$$

per avere i valori di $\frac{dy}{dx}$ nel punto (x_0, y_0); ma l'esame accurato di questo caso e degli altri più complicati, che ancora possono presentarsi, ci porterebbe troppo in lungo.

Esempi

1) Sia la curva $f = (x^2 + y^2 - bx)^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0$.

Abbiamo
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(2x - b)\,(x^2 + y^2 - bx) - 2a^2x,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y(x^2 + y^2 - bx) - 2a^2y.$$

Cerchiamo se vi sono valori di x, y che soddisfacciano a tutte e tre le equazioni $f=0$, $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$. Dalle due ultime abbiamo

$$y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}=-2by(x^2+y^2-bx)=0,$$

e i valori di x, y che la annullano soddisfanno alla equazione $x^2+y^2-bx=0$ oppure alla $y=0$. Pei valori che soddisfanno alla prima la $f=0$ diviene $x^2+y^2=0$ che è solo soddisfatta da $x=0$, $y=0$, i quali valori soddisfanno alle tre $f=0$, $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$. Per $y=0$ la $f=0$ diviene $x^2[(x-b)^2-a^2]=0$, che è soddisfatta da $x=0$ (cui corrisponde la soluzione precedente $x=0$, $y=0$) e da $x=b\pm a$; ma per $y=0$, $x=b\pm a$ la $\frac{\partial f}{\partial x}$ diviene $\pm 2a(b\pm a)^2$, che è zero solo nel caso di $a=b$, e quando si prenda il segno inferiore; ma allora $x=0$. Vediamo adunque che in ogni caso le sole soluzioni comuni alle equazioni $f=0$, $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ sono $x=0$, $y=0$.

Abbiamo inoltre

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2(6x^2+2y^2-6bx+b^2-a^2),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=4y(2x-b),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4x(x-b)+12y^2-2a^2,\quad \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2}=-2a^2,$$

$$\left(\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2}=4a^2(b^2-a^2).$$

Perciò se $b^2>a^2$ l'origine delle coordinate è un punto doppio, se $b^2<a^2$ è un punto isolato; e le tangenti nel punto doppio fanno angoli coll'asse delle x le cui tangenti trigonometriche sono $\pm\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}$.

Esaminiamo il caso $b^2=a^2$. Abbiamo

$$\varphi(x,y)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$=16y^2(2x-a)^2-8(3x^2+y^2-3ax)\,[2x(x-a)+6y^2-a^2];$$

poichè $2x(x-a)+6y^2-a^2$ diventa $-a^2$ per $x=0$, $y=0$ esiste un

intorno c del punto $(0, 0)$ nel quale questa espressione è negativa; e nella parte c_1 di questo intorno, dove è $x \leq 0$, è $3x^2 + y^2 - 3ax > 0$ se $a > 0$ ed allora pei punti di c_1, escluso $(0, 0)$, è $\varphi(x, y) > 0$. Se fosse $a < 0$ ciò avverrebbe nella parte dell' intorno c dove $x \geq 0$. Dunque intanto abbiamo due rami di curva situati da una parte rispetto all' asse delle y, che passano per l' origine delle coordinate ed hanno per tangente comune l' asse delle x.

Per esaminare l'andamento della curva per $x > 0$, oppure per $x < 0$, secondochè $a > 0$ oppure $a < 0$, osserviamo che dall'equazione della curva $(x^2 + y^2 - ax)^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0$, risolvendola rispetto a $x^2 + y^2$ dopo aver sviluppato il quadrato, si ottiene $2(x^2 + y^2) = a^2 + 2ax \pm \sqrt{a^4 + 4a^3x}$ e si vede che i due rami di curva che passano per l' origine corrispondono al segno —, e quindi avremo per essi

$$2y^2 = a^2 + 2ax - 2x^2 - \sqrt{a^4 + 4a^3x};$$

ma $(a^2 + 2ax - 2x^2)^2 = a^4 + 4a^3x - 4x(2a - x)$ è $< a^4 + 4a^3x$ per $x < 2a$ se $a > 0$, e quindi $a^2 + 2ax - 2x^2 < a\sqrt{a^2 + 4ax}$, e perciò nelle vicinanze dell' origine, per x positivo, y non può essere reale. Allo stesso modo si vede che, se $a < 0$, y non può essere reale per x negativo.

Da tutto ciò si conclude che l'origine delle coordinate è un punto di regresso per la nostra curva nel caso $a^2 = b^2$.

La curva che abbiamo studiato si chiama *Lumaca di Pascal*; quella corrispondente al caso $a^2 = b^2$ si chiama anche *cardioide*, perchè ricorda la forma di un cuore.

Si abbia nel piano una curva C, un punto O ed una retta di determinata direzione positiva che passa per O; a partire dal punto B nel quale questa retta incontra la curva C, e nella direzione positiva, si porti una lunghezza costante a; si otterrà così un punto M. Il luogo geometrico del punto M, quando la retta che passa per O ruota di un angolo uguale a due retti intorno ad O, chiamasi *concoide* della curva C rispetto al polo O.

La *lumaca di Pascal* è la concoide di un circolo di diametro b rispetto ad un punto O della sua circonferenza, preso come polo. Per riconoscere ciò, si faccia uso di un sistema di coordinate polari col polo nel punto O, e il cui asse polare sia il diametro del circolo che passa per O. Allora si ha $\rho = a + b \cos \theta$ (ρ raggio vettore, θ angolo polare). Passando poi al sistema cartesiano ortogonale, coll' origine

in O e coll' asse delle x coincidente coll' asse polare, mediante le note formole $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \theta$, otteniamo la equazione $f = 0$.

2) Sia la curva $f = x^2(x^2 + y^2) - a^2(y - x)^2 = 0$. Le equazioni $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ hanno la sola soluzione comune $x = 0, y = 0$, pei quali valori $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ è diversa da zero; inoltre, essendo

$$\varphi(x, y) = 4\,[3x^2y^2 + a^2(2x + y)^2 + 3x^2(a^2 - 2x^2)],$$

è $\varphi(0, 0) = 0$. Ma per $2x^2 < a^2$ è sempre $\varphi(x, y) > 0$; in conseguenza l' origine delle coordinate è un punto doppio nel quale i due rami di curva hanno tangente comune, che è, come si riconosce subito, la bissetrice dell' angolo retto formato dalle parti positive degli assi.

3) Per la curva $f = x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (*Folium di Descartes*) abbiamo l' unica soluzione $x = 0$, $y = 0$ comune alle equazioni $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, e per essa è $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3a$

Per decidere sulla natura del punto singolare $(0, 0)$ faremo qui un cambiamento di coordinate, passando dal sistema di coordinate (x, y) attuale ad un altro (x', y') tale che l' asse delle x' faccia coll' asse delle x un angolo semiretto, mediante le note formole

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y').$$

L' equazione della curva diviene:

$$F = \sqrt{2}\,x'^3 + 3\sqrt{2}\,x'y'^2 - 3a(x'^2 - y'^2) = 0,$$

ed allora per $x' = 0, y' = 0$ è

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} = -6a, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 6a, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'} = 0, \quad \varphi(0, 0) = 36a;$$

l' origine delle coordinate è quindi un punto doppio e le due tangenti in esso alla curva fanno coll' asse delle x' angoli le cui tangenti trigonometriche sono ± 1; cioè le due tangenti sono i primitivi assi delle x, y.

4) Sia la curva $f = y^x - x^y = 0$. Supposti x, y positivi abbiamo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^x \log y - y x^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x y^{x-1} - x^y \log x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^x (\log y)^2 - y(y-1) x^{y-2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x(x-1) y^{x-2} - x^y (\log x)^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = y^{x-1} - x^{y-1} + x y^{x-1} \log y - y x^{y-1} \log x.$$

Le equazioni $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ sono soddisfatte da $x = e$, $y = e$, e non vi sono altri valori che le soddisfacciano. Inoltre le precedenti funzioni sono tutte continue per x, y positivi e $\frac{\partial^2 f(e, e)}{\partial y^2} = -e^{e-1}$, e $\varphi(e, e) = e^{2e-2}$; il punto (e, e) è quindi un punto doppio e le tangenti fanno coll'asse delle x angoli le cui tangenti trigonometriche sono $+1$ e -1.

Si noti che la retta $y = x$, cioè la bissettrice dell'angolo retto formato dalle parti positive degli assi, fa parte della nostra curva, perchè la $f = 0$ è soddisfatta ponendo $y = x$. Questa retta costituisce uno dei rami di curva che passano pel punto doppio (e, e). Per determinare facilmente quanti si vogliano punti dell'altro ramo pel quale x è diverso da y, si ponga $y = tx$; allora dalla equazione $y^x = x^y$ si ottiene $t^x x^x = x^{tx}$, dalla quale, elevando alla potenza $\frac{1}{x}$, si ha $tx = x^t$, e quindi $x = t^{\frac{1}{t-1}}$, $y = t^{\frac{t}{t-1}}$. Ponendo ancora $t - 1 = \frac{1}{u}$ si ha

$$x = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u, \qquad y = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u+1}$$

che esprimono le coordinate del ramo di curva mediante la variabile u. Facendo ad es.: $u = 1, 2, 3, 4 \ldots$ abbiamo

$$x = 2, y = 4; \; x = \frac{9}{4}, y = \frac{27}{8}; \; x = \frac{64}{27}, y = \frac{256}{81}; \; x = \frac{625}{256}, y = \frac{2125}{1024}; \ldots$$

) Sia la curva $y = x^x$ —. Per $x > 0$ è $y > 0$ e per calcolare y p remo usare la equazione $\log y = x \log x$, che ricaviamo dalla e azione della curva. Per $x = 0$ abbiamo il valore indeterminato 0^0: ri rdando che $\lim_{x=+0} x^x = 1$ (n. 173, vol. I) attribuiremo alla y il va-

lore *uno* per $x = 0$. Per $x = 1$ abbiamo $y = 1$; la $y' = x^x(1 + \log x)$ si annulla per $x = \frac{1}{e} = 0{,}36787944...$ e la y' è sempre positiva. quindi $y = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} = 0{,}6922005...$ è la ordinata minima. Attribuendo ad x i valori da zero a $\frac{1}{e}$ l'ordinata diminuisce sempre e pei valori di x da $\frac{1}{e}$ a ∞ la ordinata cresce sempre; la curva è sempre convessa al l'asse delle x. Se alla espressione x^x attribuiamo il significato che risulta dalla definizione data al n. 10 vol. 1 per la funzione esponenziale, non potremo dare alla x valori negativi; rimane così esaurita la curva e il punto $(0, 1)$ è un punto d'arresto.

Sappiamo però che la espressione $(-x)^x$ (x positivo) ha un significato determinato per infiniti valori di x, cioè se x è intero, o è una frazione avente pari il numeratore, o una frazione avente dispari il numeratore e denominatore. In questi casi è $(-x)^{-x} = \frac{1}{(-x)^x}$, e quindi $(-x)^{-x}$ ha un significato determinato, e un unico valore, perchè qui dei radicali si deve considerare il valore aritmetico. Se dunque vogliamo prendere in considerazione anche questi valori di x, la curva avrà un numero infinito di punti, che non costituiranno una successione continua, ma un numero infinito di punti discreti, le cui coordinate soddisfanno alla equazione della curva. E, attenendosi alla definizione che abbiamo data dei punti isolati, non potremo neanche chiamarli punti isolati, perchè in qualunque intorno comunque piccolo di ciascuno di essi vi sono sempre di tali punti, cioè punti della curva.

Se, inoltre, consideriamo tutti i valori reali che hanno i radicali, avremo ancora un numero infinito di punti discreti, le cui coordinate soddisfanno alla equazione della curva, e che corrispondono anche a tutti i valori positivi di x uguali ad una frazione col denominatore pari.

Questo esempio mostra l'esistenza di un altra specie di punti singolari, e come sia necessario precisare bene il significato delle quantità che compariscono nell'equazione di una curva, onde evitare possibili equivoci. Così, ancora ad es.: la equazione $y = \sqrt{x}$, ove al radicale si attribuisca il suo significato più generale $+\sqrt{x}$ o $-\sqrt{x}$, rappresenta la parabola $y^2 = x$, mentre, se col radicale intendiam

il valore aritmetico $+\sqrt{x}$, ci rappresenta una curva (la parte della parabola al dissopra dell'asse delle x), che ha un punto d'arresto nell'origine delle coordinate.

17. Data una curva mediante la sua equazione $y = y(x)$ o $f(x, y) = 0$, occorre spesso costruirla, o almeno avere una idea della sua forma. Senza entrare in particolari su questo soggetto, quanto abbiamo finora esposto è spesso sufficiente a questo scopo [1].

Mediante l'equazione della curva si comincino a segnare quei punti, che, dalla ispezione della equazione stessa, appariscono subito appartenenti alla curva. Poi si potranno cercare gli assintoti e i punti singolari. Lo studio delle derivate ci farà conoscere le tangenti e se, e in quali tratti, la ordinata sia crescente o decrescente e se la curva sia concava o convessa verso l'asse delle x o delle y. Si determineranno anche i punti di massimo e di minimo. Questi procedimenti sono stati adoperati negli esempi che abbiamo dato nei n. precedenti, e quindi li riteniamo con essi sufficientemente sviluppati.

Curve riferite a coordinate polari.

18. Sia $$\rho = f(\theta), \text{ o } \varphi(\rho, \theta) = 0$$
l'equazione di una curva in coordinate polari, dove ρ indica il raggio vettore, e θ l'angolo polare; facciamo per le funzioni $f(\theta)$ e $\varphi(\rho, \theta)$ supposizioni analoghe a quelle del n. 2.

Le formole che servono a passare dal sistema cartesiano al polare, quando il polo è l'origine delle coordinate cartesiane e l'asse polare è la parte positiva dell'asse x, sono, come è noto,

$$x = \rho \cos \theta, \qquad y = \rho \operatorname{sen} \theta.$$

---

(1) Nel caso delle curve algebriche sono state, già da lungo tempo, date r ole assai utili praticamente per la loro costruzione, ma che non formano a licazione diretta del Calcolo differenziale. — Si vedano, tra altre, le opere di (mer, Introduction à l'Analyse des courbes planes algebriques, 1750; *Iohnson*, (ve Tracing, 1885, *Reuschle*, Praxis der Kurvendiskussion, 1886: e le opere (trattano analiticamente le curve di ordine superiore.

dalle quali,

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta - \rho \operatorname{sen}\theta, \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta,$$

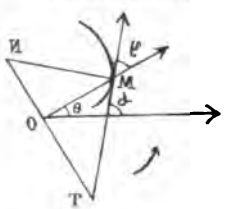
e quindi, α essendo l'angolo della tangente nel punto M coll'asse x e coll'asse polare,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d\rho}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta}{\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta} = \frac{\frac{d\rho}{d\theta}\operatorname{tg}\theta + \rho}{\frac{d\rho}{d\theta} - \rho\operatorname{tg}\theta}$$

e da questa

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \rho\,\frac{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\theta} = \rho\,\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha - \theta)}.$$

Indichiamo con μ l'angolo che il raggio vettore fa colla tangente nel punto M contato dal raggio vettore alla tangente nel verso nel quale è contato l'angolo θ, verso indicato dalla freccia nella figura; allora, qualunque sia la posizione del punto M e della tangente MT e la direzione positiva sulla tangente, $\alpha - \theta$ è l'angolo della tangente col raggio vettore, cioè $\mu = \alpha - \theta$, ed in conseguenza



$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\rho}{\operatorname{tg}\mu}, \quad \operatorname{tg}\mu = \rho\,\frac{d\theta}{d\rho}.$$

La conoscenza dell'angolo μ, che rimane determinato mediante questa formola, risolve il problema di condurre la tangente alla curva nel punto che si considera.

Per il polo O conduciamo una perpendicolare al raggio vettore OM e su di essa segnamo i punti T, N nei quali viene intersecata dalla tangente e dalla normale alla curva nel punto M. Il segmento OT chiamasi *sottotangente polare*, il segmento ON *sottonormale polare*, e conveniamo di riguardare positiva la sottotangente polare S_t quando il punto T rimane alla destra di chi, situato in O. guarda da) nella direzione positiva del raggio vettore, e negativa quando il pun o T rimane alla sinistra; e positiva la sottonormale polare quando il pun o N è alla sinistra, negativa quando è alla destra nel modo indica .

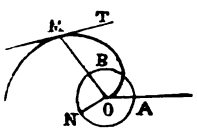
Allora, qualunque sia la posizione dei punti M, N, T e qualunque sia la direzione positiva sulla tangente, i triangoli OMT, OMN ci danno

$$S_t = \rho^2 \frac{d\theta}{d\rho}, \qquad S_n = \frac{d\rho}{d\theta}.$$

ESEMPI

Applichiamo la teoria ad alcune *curve spirali*, così chiamate dai ripetuti avvolgimenti che fanno intorno ad un centro o polo.

1) *Spirale d' Archimede*, la cui equazione è $\rho = a\theta$.



Per costruirla si descriva col centro nel polo un circolo di raggio a; l'arco AB di questo circolo, contato a partire dall'asse polare fino al punto B nel solito verso, è la lunghezza del raggio vettore che passa per B. Quando a è positivo facendo variare θ tra 0 e ∞ la curva fa un numero infinito di giri intorno al polo; variando θ da 0 a $-\infty$ si ottengono punti che formano un altro ramo di curva simmetrico al precedente rispetto alla perpendicolare all'asse polare che passa pel polo.

Per questa curva abbiamo

$$\operatorname{tg}\mu = \rho\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{\rho}{a} = \theta, \; S_t = \rho^2\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{\rho^2}{a} = a\theta, \; S_n = \frac{d\rho}{d\theta} = a,$$

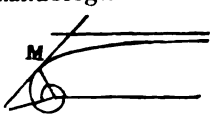
la quale ultima formola mostra che per la spirale d' Archimede la sottonormale polare è costante ed uguale ad a, e ci porge quindi un mezzo molto semplice di condurre la tangente e la normale in un punto qualunque della curva.

2) *Spirale iperbolica*, così chiamata perchè la sua equazione

$$\rho\theta = a$$

ha la forma dell'equazione della iperbole riferita ai suoi assintoti come assi coordinati cartesiani.

Per θ convergente a zero ρ converge all' infinito e ρ decresce quando θ aumenta, e converge a zero per θ crescente indefinitamente; la curva fa quindi un numero infinito di giri intorno al polo avvicinandosegli indefinitamente.



Essa ha per assintoto la retta parallela all' asse polare distante da esso della lunghezza a; perchè la equazione di questa retta essendo $\rho' \operatorname{sen}\theta' - a = 0$ (ρ', θ' coordinate cor-
nti), la distanza tra essa e il punto (ρ, θ) è il valore assoluto di

$\rho \operatorname{sen} \theta - a$. che, se questo punto è sulla spirale, diviene $a\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} - 1\right)$, che ha per limite zero quando, θ convergendo a zero, ρ cresce indefinitamente.

Abbiamo poi

$$\operatorname{tg}\mu = -\frac{\rho\theta^2}{a} = -\theta,\ S_t = -a,\ S_n = -\frac{a}{\theta^2}.$$

La sottotangente è costante ed uguale a $-a$; perciò la costruzione della tangente e della normale è, anche per questa curva, molto semplice.

3) *Spirale logaritmica o logistica.* La sua equazione è

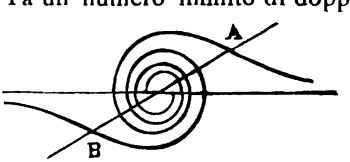
$$\rho = ae^{m\theta}.$$

Per $\theta = 0$ abbiamo $\rho = a$, e ρ cresce con θ; attribuendo a θ dei valori negativi ρ diminuisce. Quindi la curva fa un numero infinito di giri intorno al polo, allontanandosene e avvicinandosegli indefinitamente.

Per questa curva è costante l'angolo μ, poichè abbiamo

$$\operatorname{tg}\mu = \rho\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{\rho}{ame^{m\theta}} = \frac{1}{m}.$$

4) *Lituus*, la cui equazione è $\rho^2\theta = a^2$, cosí chiamata da *Cotes* (Harmonia mensurarum, anno 1722). ρ cresce indefinitamente per θ convergente a zero, e converge a zero per θ crescente indefinitamente Fa un numero infinito di doppi giri intorno al polo ed ha per assintoto l'asse polare, perchè la distanza $\rho \operatorname{sen}\theta = \frac{a^2 \operatorname{sen}\theta}{\rho\theta}$ da un suo punto (ρ, θ) all'asse polare ha per limite zero al diminuire indefinitamente di θ. La curva ha due flessi, che si determinano nel modo seguente, che può usarsi per una curva qualunque in coordinate polari.



Sia $y = y(x)$ l'equazione della curva in coordinate cartesiane; osserviamo che $y''(x) = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3}$, ove si cambino le coordinate cartesiane nelle polari colle formole $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\theta$

si assuma θ come variabile indipendente, diviene

$$\frac{2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 - \rho\,\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho^2}{\left(\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta - \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\right)^3}.$$

I flessi della curva, riferita al sistema polare, corrispondono quindi ai valori di θ che soddisfanno alla equazione

$$2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 - \rho\,\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho^2 = 0.$$

Ora nel nostro caso, in cui $\rho = \frac{a}{\sqrt{\theta}}$, la precedente equazione diviene $\frac{1}{\theta}\left(4 - \frac{1}{\theta^2}\right) = 0$, che è soddisfatta dai soli valori finiti, di θ, $\theta = \pm\frac{1}{2}$. Abbiamo così i due flessi

$$\left(\theta = \frac{1}{2},\ \rho = a\sqrt{2}\right),\quad \left(\theta = \frac{1}{2},\ \rho = -a\sqrt{2}\right).$$

La curva ha la forma della annessa figura (*lituus*, bastone augurale degli auguri romani); A, B sono i flessi.

Esercizi.

1. La perpendicolare dall' origine delle coordinate sulla tangente nel punto (x, y) alla curva $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (*astroide*) è uguale al valore assoluto di $\sqrt[3]{axy}$, e la parte di tangente compresa tra gli assi è uguale ad a. Indicando con α l' angolo che la normale alla curva nel punto (x, y) fa coll' asse delle x, alle equazioni della normale e della tangente in quel punto si può dare la forma, rispettivamente:

$Y\cos\alpha - X\,\mathrm{sen}\,\alpha = a\cos 2\alpha$, $Y\,\mathrm{sen}\,\alpha + X\cos\alpha = a(1 - \mathrm{sen}\,2\alpha)$.

2. Tutte le curve rappresentate dalla equazione $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$, a ibuendo in essa ad n qualunque valore, hanno comune la tangente r punto (a, b).

. Determinare n in modo che l' area triangolare, racchiusa tra la t gente e gli assi, sia costante per tutti i punti della curva $y^n = a^{n-1}x$.

4. L'equazione d'una curva sia della forma

$$f = u_n + u_m + u_p + \ldots = 0$$

dove $u_n, u_m, u_p, \ldots$ indicano funzioni omogenee delle x, y di grado $n, m, p, \ldots$, e $n > m > p > \ldots$ essendo $n, m, p \ldots$ numeri qualunque.

Si dimostri che:

1.° All'equazione della tangente nel punto (x, y) alla curva può darsi la forma

$$X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + (n-m)u_m + (n-p)u_p + \ldots = 0.$$

2.° Se da un punto di coordinate (h, k) si conducono le tangenti alla curva, i punti di contatto sono situati sopra la curva

$$F = h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} + (n-m)u_m + (n-p)u_p + \ldots = 0,$$

dove qui (x, y) indicano le coordinate correnti.

Questa curva possiamo chiamarla la *prima polare* o semplicemente la *polare* del polo (h, k) rispetto alla curva $f = 0$; poichè nel caso particolare che la $f = 0$ sia curva algebrica (e l'equazione di qualunque curva algebrica si può sempre ridurre alla forma $f = 0$) la $F = 0$ si chiama la *polare* del polo (h, k) rispetto alla $f = 0$.

3.° Se il polo (h, k) è sulla $f = 0$, la polare passa pel polo, ed ha ivi la tangente in comune colla $f = 0$, escluso il caso di $n = 1$.

Se $n = 1$ la polare ha nel polo una singolarità la cui natura dipende dalla espressione

$$[f''_{xy}(h, k)]^2 - f''_{xx}(h, k) f''_{yy}(h, k).$$

Se la polare passa pel polo, questo è sulla $f = 0$, eccetto il caso $n = 0$, nel quale la polare passa sempre pel polo.

5. Il luogo geometrico dei piedi delle perpendicolari abbassate da un punto 0 sopra le tangenti d'una curva chiamasi *pedale* della curva rispetto al punto 0. Consideriamo come corrispondentesi il punto M sulla curva e il punto μ della pedale, piede della perpendicolare da 0 alla tangente in M.

Sia $y = y(x)$ la curva e sia 0 l'origine delle coordinate; $y(x)$ ammetta derivata prima e seconda. Si dimostri che la tangente in

alla pedale coincide colla tangente in μ al circolo descritto su OM come diametro.

(Se X, Y indicano le coordinate correnti della pedale, si esprimano mediante x; si calcoli il $\frac{dy}{dx}$ relativo al punto μ. Si trovi la equazione del circolo che ha per diametro OM, e si provi che il valore precedente di $\frac{dy}{dx}$ è uguale al valore di $\frac{d\beta}{d\alpha}$, relativo al punto μ, indicando con α, β le coordinate correnti del circolo).

6. Le curve $y = y(x)$, $y = \frac{c}{y(x)}$ hanno, nei punti corrispondenti alla stessa ascissa, le sottotangenti uguali e di segno contrario; e le curve $y = y(x)$, $y = \sqrt{c + (y(x))^2}$ hanno uguali le sottonormali.

7. Gli assintoti delle curve seguenti:

$$x^3y - 2x^2y^2 + xy^3 - a^4 = 0;\ xy^2 + yx^2 = a^3;$$

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0,\ (\textit{folium di Descartes});\ x^2y^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0;$$

$$y^2(ay + bx) - a^2y^2 - b^2x^2 = 0;\ (y - 2x)(y^2 - x^2) - a(y-x)^2 + 4b(x + y) = c;$$

$$y^2 + x^3\left(\text{arc tg}\,\frac{y}{x} - 1\right) - x^2 + x\,\text{sen}\,\frac{y}{x} + y\,\text{sen}\,\frac{x}{y} + a = 0;$$

$$y^2(x - y)^2 + a^2x(x - y) - 3a^2y^2 - b = 0;\ y^2(x - y)^2 - a^2(x - y) + b = 0$$

sono rispettivamente:

$$x = 0, y = 0, y = x;\ x = 0, y = 0, y = -x;\ y + x + a = 0;$$

$$x = \pm a, y = \pm a;\ ay + bx - 2a^2 = 0;\ y = x, 3(y + x) = 2a,$$

$$3y - 6x - a = 0;\ 256y - 64\pi(4k + 1)x + \pi^4(4k + 1)^4 - 256 = 0,\ k$$

intero qualunque; $y = x \pm a\sqrt{3}$; $y = \pm a$, $y = x$.

8. Affinchè gli assi delle x e delle y (il sistema può essere anche non ortogonale, perchè le considerazioni del n. 7 valgono in ogni caso) siano assintoti per la curva di 2° ordine

$$ay^2 + (bx + c)y + dx^2 + ex + f = 0$$

bisogna che sia $a = 0$, $c = 0$, $d = 0$, $e = 0$; quindi, se una curva di secondo ordine si riferisce ai suoi assintoti come assi, la sua equazione sarà della forma $bxy + f = 0$.

9. Dimostrare che, se una curva di terzo ordine si riferisce a due assintoti come assi, la sua equazione si ridurrà alla forma

$$xy(ax + by + c) + a'x + b'y + c' = 0$$

e vi sarà un terzo assintoto la cui equazione è $ax + by + c = 0$.

10. I punti singolari delle curve seguenti:

$y = \varphi(x) \pm (x - a)\ (x - b)^{\frac{p}{q}}$, p, q numeri interi;

$y = \varphi(x) \pm \psi(x)\,(x - a)^{\frac{p}{2q}}$, p, q interi, $\frac{p}{2q} > 1$; $y = \pm x\sqrt{x - a}$;

$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ (*Lemniscata di Bernoulli*);

$(xy + 1)^2 + (x - 1)^3(x - 2) = 0$; $y^4 - 4xy^2 + x^4 = 0$;

$x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = 0$; $x^4 + 2ayx^2 - ay^3 = 0$;

$x^4 + 2ax^2y + y^4 - 2ay^3 = 0$; $x^4 - ax^2y - ay^3 + (a^2 - b^2)y^2 = 0$, quando $0 < a < b$ e quando $4b^2 < 3a^2$;

sono rispettivamente:

se $a > b$, il punto $x = a . y = \varphi(a)$ è punto doppio, se $a < b$ è punto isolato, se $a = b$ punto di regresso; $x = a, y = \varphi(a)$ punto di regresso; $x = 0, y = 0$ punto isolato se $a > 0$, punto doppio se $a < 0$ e $\operatorname{tg} \alpha = \pm\sqrt{-a}$, regresso se $a = 0$ e $\operatorname{tg} \alpha = 0$, essendo α angolo di una delle tangenti o della tangente coll'asse delle x; $x = 0$, $y = 0$ punto doppio e flesso, $\operatorname{tg} \alpha = \pm 1$; $x = 1, y = -1$ regresso, $\operatorname{tg} \alpha = 1$; $x = 0, y = 0$ punto triplo, $\operatorname{tg} \alpha = 1, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; $(0, -a)$, $(a, 0)$, $(-a, 0)$ punti doppi e rispettivamente $\operatorname{tg} \alpha = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$; $x = 0, y = 0$ punto triplo e $\operatorname{tg} \alpha = 0, \pm\sqrt{2}$; $x = 0, y = 0$ punto triplo e $\operatorname{tg} \alpha = 0, \pm 1$; se $0 < a < b$, pel punto $(0, 0)$ passano due rami di curva che hanno per tangente comune l'asse del e x, e se $4b^2 < 3a^2$ il punto $(0, 0)$ è punto isolato.

11. Si dimostri che, onde la curva $xy^2 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ abbia punti singolari (esclusi i flessi), occorre sia $d = 0$, ed allora la curva è composta dalla retta $x = 0$ e da una curva di secondo ordine e i punti d'incontro di questa colla retta sono i punti doppi, se $c > 0$; oppure occorre sia

$$\begin{vmatrix} 3a & 2b & c & 0 \\ 0 & 3a & 2b & c \\ b & 2c & 3d & 0 \\ 0 & b & 2c & 3d \end{vmatrix} = 27\,a^2d^2 + 4ac^3 + 4b^3d - b^2c^2 - 18abcd = 0.$$

Si determinino, in questo caso, i punti singolari della curva.

12. Si abbia una curva $f=0$, come all'esercizio 4.

Si dimostri che la curva (la *Hessiana* di $f=0$)

$$H(x,y)=\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f'_x \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f'_y \\ (n-1)f'_x & (n-1)f'_y & nf \end{vmatrix}=0$$

passa pei flessi e pei punti doppi, isolati e cuspidi della $f=0$ (si eccettui il caso $n=1$, nel quale la $f=0$ fa parte della Hessiana); e che i punti isolati e doppi della $f=0$ sono punti isolati e doppi della $H=0$, nei quali ultimi la $H=0$ e la $f=0$ hanno le stesse tangenti (eccettuato, oltre il caso $n=1$, anche il caso $n=2$).

13. Si descrivano le curve seguenti: $xy^2-a^2y-b^3=0$;
$y=a^x$ (*logaritmica o logistica*); $y=\operatorname{tg} x$;
$x^3+bx^4-a^3y^2=0$; $a^4y^2=x^6-3a^2x^4+3a^4x^2-a^6$;
$y^2(x^2-a^2)-x^2(x^2-2a^2)=0$; $y^4-12y^2x-32y^2+4x^2=0$;
$x^2y^2-2bx^3y-b^2y^2-2a^2xy+b^2x^2+2b^3y+2a^2bx+2a^4-b^4=0$;

$$(a-x)y^2-x^3=0$$

(*Cissoide di Diocle.* Dato il circolo $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$, essa è il luogo geometrico dei punti M tali, che, se per ciascuno di essi si tiri la OM dall'origine O sino a tagliare la periferia in D e si abbassino le MP, DQ perpendicolari all'asse delle x, le intercette dal centro CP, CQ siano sempre uguali tra loro); $xy^2-a^2(a-x)=0$ (*versiera, curva di Agnesi.* Dato il circolo precedente, è il luogo geometrico dei punti M tali, che condotta MP perpendicolare all'asse delle x, che taglierà la periferia in D, sia OP : PD : : a : MP); $(x^2+y^2)(x-b)^2=a^2x^2$ (*concoide di Nicomede*, o concoide della retta $y=b$, rispetto all'origine delle coordinate come polo); $y=\frac{x}{\log x}$;
$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y=\frac{1}{2}$; $y=\frac{e^x}{x}$; $2\operatorname{sen} y-\operatorname{sen} x=0$;
$y^4+2(x^2+c^2)y^2+(x^2-c^2)^2-a^4=0$ (*Curva di Cassini*; luogo geometrico dei punti tali che il prodotto delle loro distanze dai punti $(c,0)$, $(-c,0)$ è sempre uguale ad a^2; si studino i vari casi $a<c$; $a=c$ *lemniscata di Bernoulli*; $a>c$ e $<c\sqrt{2}$; $a=c\sqrt{2}$; $a>c\sqrt{2}$).

. Per la lemniscata di Bernoulli, la cui equazione in coordinate

polari è $\rho^2 = 2c^2 \cos 2\theta$, l'angolo che la normale in un punto di coordinate (ρ, θ) fa col raggio vettore è il doppio di θ.

15. Se ρ, ρ_1 indicano i raggi vettori dei punti M, N di due curve, corrispondenti ad uno stesso angolo θ, ed è $\rho\rho_1 = k^2$, k costante, le due curve diconsi l'una *inversa* dell'altra rispetto al centro d'inversione O (polo del sistema polare), o l'una la *trasformata dell'altra per raggi vettori reciproci*. Chiamiamo M, N punti corrispondenti. Si dimostri che gli angoli interni (e quindi anche gli esterni), che le tangenti nei punti M e N alle due curve fanno col raggio vettore, che passa per essi, sono uguali.

16. La concoide d'una curva rispetto al polo O di un sistema polare, preso come polo della concoide, ha la stessa sottonormale polare della curva. Si determini, in conseguenza, la tangente in un punto qualunque della concoide di Nicomede, e della lumaca di Pascal.

17. Siano $\rho_1 = \rho_1(\theta)$, $\rho_2 = \rho_2(\theta)$ due curve; la sottonormale polare alla curva $\rho = \rho_1 \pm \rho_2$ (che potrà chiamarsi *cissoide*, perchè la cissoide di Diocle ne è caso particolare) è uguale alla somma o differenza delle sottonormali polari delle due curve. Per la cissoide di Diocle, una delle due curve è un circolo che passa pel polo col centro sull'asse polare, e l'altra è la perpendicolare, nell'altro estremo, al diametro che passa pel polo. Se ne deduca il modo di condurre la tangente in un punto alla cissoide di Diocle.

18. Si costruiscano le curve seguenti: $\rho^2 = a^2\theta$ (*spirale parabolica*): $\rho = a \operatorname{sen} 2\theta$ (*rosone a quattro rami*, luogo geometrico del piede della perpendicolare abbassata dal polo sopra una retta di lunghezza $2a$, che scorre coi suoi estremi sull'asse polare e sulla perpendicolare ad esso pel polo); $\rho = c \cos\theta - a \cos 2\theta$ (*scarabeo*, luogo geometrico del piede della perpendicolare abbassata dal polo sopra una retta di lunghezza $2a$, che scorre sopra i lati di un angolo retto, il cui vertice è sull'asse polare e distante di c dal polo e del quale l'asse polare è la bissettrice); $\rho = 4 + \cos 5\theta$; $\rho = a(\operatorname{tg}\theta - 1)$; $\rho \operatorname{sen}\theta = \frac{2a^\theta}{\ }$

(*Quadratrice di Dinostrato*. Descritto col centro nel polo un circolo di raggio a, che tagli in B l'asse polare, essa è il luogo geometrico dei punti M tali che il raggio vettore tagli il quadrante, che ha origine in B, nello stesso rapporto come la parallela all'asse, che pa per M, taglia il raggio del circolo perpendicolare all'asse. La cur si compone di un numero infinito di rami che hanno per assint le rette parallele all'asse e distanti da esso di $\pm 2a$, $\pm 4a$, $\pm 6a$, .

Come si riconosce facilmente, mediante questa curva si può dividere un angolo dato in quante si vogliono parti uguali, quindi anche in tre, e con questa appunto Dinostrato risolveva il problema, celebre nell'antichità, della trisezione dell'angolo. Se si indica con y la ordinata di M rispetto all'asse polare, con c il punto nel quale il ramo di curva, cui M appartiene, taglia l'asse, si hanno le formole $a\theta = \frac{ay}{\overline{OC}}$, $a^2\pi = \frac{2a^3}{\overline{OC}}$, che servono a calcolare la lunghezza di un arco e l'area del circolo di raggio a. Da ciò proviene il nome di quadratrice dato alla curva).

Lunghezza d'arco di curva piana, e formole relative

19. Preciseremo ciò che intendiamo ora per linea *continua*, indipendentemente da qualunque rappresentazione analitica della medesima, dicendo, con *Cantor*, che una linea è continua quando soddisfa a queste due condizioni:

Presi due punti qualunque appartenenti alla linea ed una quantità σ positiva, anche comunque piccola, si può sempre inscrivere nella linea una poligonale coi lati minori di σ, ed avente gli estremi in quei due punti;

Ogni punto limite di un gruppo infinito di punti, appartenenti alla linea, appartiene pure alla linea.

Porremo allora la seguente definizione:

Lunghezza d'un arco o tratto continuo di linea è il limite delle lunghezze delle linee poligonali inscritte nel tratto, cogli estremi negli estremi del tratto, e i cui vertici sono punti consecutivi del tratto stesso; e, come ben si intende, si dice che s è il limite di tali linee se, dato σ, esiste un δ tale che risulti $|s - L| < \sigma$, dove L indica la lunghezza di qualunque linea poligonale inscritta i cui lati siano minori di δ.

Quando esiste tal limite, l'arco dicesi *rettificabile* [1].

---

[1] Al Prof. *Peano* è dovuta la seguente definizione, in virtù della quale ogni tratto continuo di linea è rettificabile:

Lunghezza d'un arco continuo è il limite superiore (che sempre esiste) *delle lunghezze delle poligonali inscritte nell'arco, cogli estremi negli estremi dell'arco e i cui vertici sono punti consecutivi dell'arco.*

Nei casi più comuni il limite superiore è il limite di tali lunghezze, e perciò alle due definizioni coincidono.

Supponiamo ora che la curva, riferita ad un sistema di assi ortogonali nel suo piano, abbia la equazione $y = y(x)$, essendo $y(x)$ funzione univalente nell'intervallo (x_0, x), dove x_0, x sono le ascisse degli estremi M_0, M del tratto di curva e $x_0 < x$, e che ammette derivata finita $y'(x)$ tale che sia, in detto intervallo, integrabile la funzione $\sqrt{1 + y'(x)^2}$ [1]; allora esiste un tal limite, cioè l'arco è rettificabile.

Sia, invero, $M_0 M_1 M_2 \ldots M_r M_{r+1} \ldots M$, una poligonale qualunque inscritta, come precedentemente si è detto, nel tratto di curva, e siano $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots (x_r, y_r), \ldots (x, y)$ le coordinate dei vertici $M_0, M_1, M_2, \ldots$ Posto

$\Delta x_r = x_{r+1} - x_r$, $\Delta y_r = y_{r+1} - y_r = y(x_{r+1}) - y(x_r) = y(x_r + \Delta x_r) - y(x_r)$,

la lunghezza del lato $M_r M_{r+1}$ è $\sqrt{\overline{\Delta x_r}^2 + \overline{\Delta y_r}^2}$, e quindi la lunghezza della poligonale, che indicheremo con S, è

$$S = \sum \sqrt{\overline{\Delta x_r}^2 + \overline{\Delta x_r}^2} = \sum \Delta x_r \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_r}{\Delta x_r}\right)^2}.$$

Ma

$$\frac{\Delta y_r}{\Delta x_r} = y'(x_r + \theta_r \Delta x_r), \qquad 0 < \theta_r < 1,$$

ed in conseguenza

$$S = \sum \Delta x_r \sqrt{1 + y'(x_r + \theta_r \Delta x_r)^2}.$$

Ora, poichè per ipotesi è integrabile la funzione $\sqrt{1 + y'(x)^2}$ nell'intervallo (x_0, x), si vede subito che esiste il limite di S, essendo esso l'integrale $\int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx$. Indicando quindi con s il limite di S, cioè la lunghezza dell'arco $M_0 M$, abbiamo

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \text{ [2]}.$$

---

[1] Come vedremo in seguito, ciò sarà sempre vero se si trova che è integrabile la $y'(x)$.

[2] La lunghezza d'arco di curva si può anche definire del modo seguente. Decompongasi l'intervallo (x_0, x) in parti $h_1, h_2, h_3, \ldots h_r, \ldots$ mediante i punti $x_1, x_2, x_3, \ldots x_r, \ldots$, e si scelga un punto qualunque m_r nel tratto h_r; sia n_r il punto

Se si suppone $x_0 > x$, la lunghezza dell'arco $M_0 M$ sarebbe

$$\left| \int_{x_0}^{x} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \right| .$$

20. Indichiamo ora con $s = s(x)$ la lunghezza d'arco di curva da un punto origine M_0 ad un punto M di ascissa x (appartenente ad un tratto di curva soddisfacente alle condizioni precedenti), e contato positivamente in un verso da noi scelto e negativamente nell'opposto; avremo allora, in ogni caso,

$$s = s(x) = \pm \int_{x_0}^{x} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} .$$

Se nel punto M la $y'(x)$ è continua, avremo

$$\frac{ds}{dx} = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \pm \sqrt{1 + y'^2} ,$$

nella qual formola dobbiamo prendere il segno superiore se ds e dx hanno lo stesso segno, l'inferiore se hanno segni contrari; cioè il segno superiore quando l'arco cresce al crescere di x, l'inferiore quando l'arco cresce al decrescere di x.

Indicando α l'angolo, coll'asse delle x, della tangente alla curva nel punto M, trovammo

$$\cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + y'^2}}, \qquad \operatorname{sen} \alpha = \frac{y'}{\pm \sqrt{1 + y'^2}},$$

---

sulla curva la cui ascissa è m_r, e si conduca in n_r la tangente alla curva; si consideri sopra questa tangente il tratto k_r determinato dei punti P_{r-1}, P_r di incontro con essa delle perpendicolari, all'asse delle x, innalzate nei punti x_{r-1}, x_r. Facciasi analoga operazione per tutti i tratti h_1, h_2... e si consideri la somma $\sum k_r$; il limite di questa somma, all'impicciolire della h, si definisce come la lunghezza dell'arco $M_0 M$.

Il lettore può vedere facilmente che si arriva alla stessa espressione della lunghezza dell'arco, $\int_{x_0}^{x} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

Da qui si dovrebbe poi dimostrare, il che può farsi facilmente, che tale lunghezza è indipendente della scelta degli assi coordinati.

nelle quali formole, come si riconosce subito, dobbiamo prendere il segno superiore quando, muovendosi un punto sulla tangente nella direzione scelta come positiva, l'ascissa del punto cresce, perchè allora $\cos\alpha$ è positivo; ed il segno inferiore quando l'ascissa decresce. Cosichè se, nel punto di contatto M, la direzione positiva della tangente coincide colla direzione positiva dell'arco di curva che termina in M, si avrà, in ogni caso,

$$\cos\alpha = \frac{1}{\frac{ds}{dx}}, \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{y'}{\frac{ds}{dx}} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{ds}{dx}},$$

ossia

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{dy}{ds},$$

formole di continuo uso.

La formola $ds = \pm\, dx\sqrt{1+y'^2}$ può anche scriversi $ds = \pm\, dx\,\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{|dx|}$, ossia

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} \text{ e da questa } ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

nella prima delle quali si deve sottointendere nel radicale il doppio segno, che sarà quello di ds.

Passando dal sistema cartesiano al solito sistema polare, abbiamo subito l'espressione del differenziale d'arco, o elemento lineare di curva, ds, in coordinate polari,

$$ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\vartheta^2}.$$

21. Abbiamo poi, per le curve $y = y(x)$ che soddisfanno alle condizioni poste in principio, il teorema:

Il valore assoluto del limite del rapporto d'un arco infinitesimo alla sua corda è l'unità.

Chiamando Δs l'arco e c la corda corrispondente, i cui estremi siano (x, y), $(x+\Delta x, y+\Delta y)$, è

$$\frac{\Delta s}{c} = \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}$$

e perciò, quando, Δx convergendo a zero, convergono a zero Δy, Δs e c, è

$$\lim \left|\frac{\Delta s}{c}\right| = \left|\frac{\frac{ds}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\right| = 1.$$

Curvatura delle curve piane.

22. Sia un arco AMA' di curva, per tutti i punti del quale esista una tangente la cui direzione varii con continuità quando si muova con continuità il punto di contatto, e che non contenga flessi della curva. Fissata l'origine degli archi fuori di AMA', e presa come direzione positiva delle tangenti la direzione positiva dell'arco che termina ai punti di contatto, l'angolo delle direzioni positive delle tangenti AT, A'T' negli estremi dell'arco AMA' chiamasi la *curvatura assoluta* o *curvatura dell'arco*; e il rapporto della curvatura alla lunghezza dell'arco dicesi la *curvatura media* dell'arco.

Se, i punti A, A' avvicinandosi indefinitamente al punto M, le curvature medie degli archi AM, A'M hanno un unico limite determinato, questo chiamasi la *curvatura della curva nel punto* M; la quale è $\lim \frac{\Delta\tau}{\Delta s}$, quando Δs converge a zero, avendo indicato con Δs l'arco che ha un estremo in M e con $\Delta\tau$ l'angolo delle tangenti ai suoi estremi, calcolato come sopra si è detto, angolo che, quando s è infinitesimo, dicesi *angolo di contingenza*.

Se la curva è un cerchio, l'angolo che le tangenti agli estremi di un qualunque arco fanno tra loro è uguale all'angolo al centro corrispondente all'arco, e quindi la curvatura media è uguale all'inversa del raggio; perciò la curvatura in ogni punto di un circolo è tante ed uguale all'inversa del raggio.

Si vede poi che la curvatura media di un arco corrisponde al ıcetto espresso dalla parola curvatura nel linguaggio abituale; poichè archi di uguale lunghezza, appartenenti a curve diverse e che hanno

in un comune estremo la stessa tangente, diciamo che più si incurva, che ha maggior curvatura, quello che maggiormente devia dalla tangente, cioè quello pel quale l'angolo delle tangenti agli estremi è maggiore.

22. Si chiama *raggio di curvatura* della curva nel punto M il raggio r di un circolo la cui curvatura $\frac{1}{r}$ sia quella della curva in M; cosichè è $\frac{1}{r} = \lim \frac{\Delta\tau}{\Delta s}$, $r = \lim \frac{\Delta s}{\Delta\tau} = \frac{ds}{d\tau}$.

Calcoliamo r quando la curva è data da una equazione $y = y(x)$, dove, pei valori di x che dovremo considerare, si suppone che $y(x)$ ammetta derivata seconda finita; o, più generalmente, quando le coordinate x, y dei suoi punti sono espresse mediante una variabile qualunque t dalle formole $x = x(t)$, $y = y(t)$, dove si suppone anche qui che le $x(t)$, $y(t)$ ammettano derivate seconde finite.

Indicando con α l'angolo che la tangente nel punto M fa coll'asse delle x, si riconosce subito che $\pm\Delta\tau = \Delta\alpha$ e quindi $\pm d\tau = d\alpha$. Ma differenziando la formola $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$ si ha

$$\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^2};$$

e da questa, ricordando che $\cos^2\alpha = \frac{dx^2}{dx^2 + dy^2}$, si ricava $\pm d\tau = d\alpha = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^2 + dy^2}$, e quindi, coll'osservare che $ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2}$, si ottiene infine

$$r = \pm \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx d^2y - dy d^2x},$$

dove prenderemo dei due segni quello che rende il secondo membro positivo, perchè r è quantità essenzialmente positiva; cosichè, sottintendendo il doppio segno del radicale, potremo anche scrivere

$$r = \left| \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx d^2y - dy d^2x} \right|,$$

formola valevole qualunque sia la variabile indipendente, che in essa esplicitamente non comparisce. Se fosse $x = x(t)$, $y = y(t)$, si dovrebbe

bero allora sostituire pei differenziali di x e di y quelli che da queste formole si deducono. In particolare, se la variabile indipendente è x, come avviene quando la equazione della curva è $y = y(x)$, abbiamo

$$r = \left| \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx d^2 y} \right| = \left| \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}} \right|.$$

Si intende poi come in punti speciali ove, non essendo verificate le ipotesi precedenti, la curva abbia qualche particolarità relativamente alle derivate della funzione o delle funzioni che determinano le coordinate dei punti della curva, possa esistere una curvatura a destra ed una curvatura a sinistra, e corrispondenti raggi di curvatura, diverse tra loro; e come, quando si considera un tratto di curva, negli estremi del tratto, non si possa parlare altro che di curvatura solamente a destra o a sinistra.

24. Se il punto M non è, come ora supporremo, un flesso, vi è un intorno c del punto M tutto da una parte della tangente MT. Descriviamo un circolo di raggio r, tangente in M alla MT e il cui centro K, che è sulla normale alla curva in M, sia rispetto alla tangente dalla stessa parte di c.

Questo circolo chiamasi *circolo di curvatura* e il punto K *centro di curvatura*, relativi al punto M.

Per un altro punto M' sulla curva conduciamo la normale. Essa incontra la normale relativa ad M in un certo punto N, che possiamo supporre a distanza finita, ove si prenda M' sufficientemente prossimo ad M. Ora M' avvicinandosi indefinitamente ad M, dico che il punto N ha per posizione limite il punto K, intendendo con ciò che la distanza NK ha per limite zero.

Sia, infatti, $y = y(x)$ l'equazione della curva, (x, y) le coordinate di M, $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ quelle di M'. Il punto N essendo la intersezione delle due normali in M ed M' le cui equazioni sono rispettivamente

$$X - x + (Y - y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$X - x - \Delta x + (Y - y - \Delta y)\left(\frac{dy}{dx} + \frac{d\Delta y}{dx}\right) = 0,$$

le coordinate del punto N sono i valori di X, Y che le soddisfanno contemporaneamente. Allo scopo di cercare questi valori, la seconda equazione, in virtù della prima, può scriversi:

$$-\Delta x - \Delta y\left(\frac{dy}{dx} + \frac{d\Delta y}{dx}\right) + (Y - y)\frac{d\Delta y}{dx} = 0$$

od anche

$$(2) \qquad -1 - \frac{\Delta y}{\Delta x}\left(\frac{dy}{dx} + \frac{d\Delta y}{dx}\right) + (Y - y)\frac{d\Delta y}{\Delta x\, dx} = 0.$$

Ora $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x + \theta\,\Delta x)$; inoltre, essendo $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$, è

$$\frac{d\Delta y}{dx} = y'(x + \Delta x) - y'(x), \quad \frac{d\Delta y}{\Delta x\, dx} = \frac{y'(x + \Delta x) - y'(x)}{\Delta x} = y''(x + \theta_1 \Delta x),$$

per cui la equazione (2) diviene

$$-1 - y'(x + \theta\,\Delta x)\,y'(x + \Delta x) - (Y - y)\,y''(x + \theta_1\,\Delta x) = 0,$$

dalla quale e dalla (1) ricaviamo

$$X - x = -\frac{y'(x + \theta\,\Delta x)\,y'(x + \Delta x)}{y''(x + \theta_1\,\Delta x)}\,y'(x), \quad Y - y = \frac{y'(x + \theta\,\Delta x)\,y'(x + \Delta x)}{y''(x + \theta_1\,\Delta x)}.$$

Indicando con ξ, η i valori di X, Y al limite per Δx convergente a zero, abbiamo

$$(3) \qquad \xi - x = -\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \cdot \frac{dy}{dx}, \quad \eta - y = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

dalle quali, elevando al quadrato e sommando,

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2} = r^2;$$

per cui, chiamando con K_1 il punto (ξ, η), punto limite delle posizioni del punto N, ossia punto d'incontro, come suol dirsi, della

normale in M colla normale infinitamente vicina, vediamo intanto che MK_1 è uguale al raggio di curvatura della curva nel punto M.

Inoltre la seconda delle (3) mostra che $\eta - y$ ha lo stesso segno di $\frac{d^2y}{dx^2}$, e quindi lo stesso segno di $Y_c - Y_t$, avendo indicato con Y_c e Y_t le ordinate della curva e della tangente corrispondenti alla ascissa $x + \Delta x$. Ma esiste un intorno di M per tutti i punti del quale $\eta - Y_t$ ha lo stesso segno di $\eta - y$, giacchè $\eta - Y_t$ è funzione continua di x; ed in conseguenza, pei punti di quest' intorno, $\eta - Y_t$ e $Y_c - Y_t$ hanno lo stesso segno; il punto K_1 è quindi. rispetto alla tangente, dalla stessa parte di un certo intorno del punto M. Esso coincide dunque con K, centro di curvatura del punto M.

Le formole (3), che ci danno perciò le coordinate ξ, η del centro di curvatura nella ipotesi che x sia la variabile indipendente, diventano, quando la variabile indipendente è qualunque, le seguenti:

$$4) \quad \xi = x - \frac{(dx^2 + dy^2)dy}{dxd^2y - dyd^2x}, \qquad \eta = y + \frac{(dx^2 + dy^2)dx}{dxd^2y - dyd^2x}.$$

Supponiamo, in particolare, che la variabile indipendente sia l'arco s di curva, contato a partire da un certo punto origine sulla curva, cosichè le coordinate dei punti della curva siano date dalle

$$x = x(s), \qquad y = y(s).$$

Allora indicando con x', x'', y', y'' le derivate di $x(s)$, $y(s)$ rapporto ad s, abbiamo $dx^2 + dy^2 = (x'^2 + y'^2)ds^2$: ma essendo $dx^2 + dy^2 = ds^2$, qualunque sia la variabile indipendente, è $x'^2 + y'^2 = 1$, cosichè la formola

$$r = \left| \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y - dyd^2x} \right|$$

diviene ora

$$r = \left| \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}} ds^3}{(x'y'' - x''y')ds^3} \right| = \left| \frac{1}{x'y'' - x''y'} \right|$$

e analogamente, le (4) diventano

$$\xi = x - \frac{y'}{x'y'' - x''y'}, \quad \eta = y + \frac{x'}{x'y'' - x''y'}.$$

Notiamo ancora che in questo caso si ha la relazione

$$x'x'' + y'y'' = 0,$$

che si ottiene derivando la $x'^2 + y'^2 = 1$, e quindi

$$\begin{aligned}(x'y'' - x''y')^2 &= x'^2 y''^2 + x''^2 y'^2 - 2x'x''y'y'' \\ &= x''^2 + y''^2 - x'^2 x''^2 - y'^2 y''^2 - 2x'x''y'y'' \\ &= x''^2 + y''^2 - (x'x'' + y'y'')^2 = x''^2 + y''^2;\end{aligned}$$

cosichè abbiamo quest' altra espressione di r,

$$r^2 = \frac{1}{x''^2 + y''^2}.$$

Osserviamo infine che le formole del n. 116 a pag. 222 vol. I. che danno il valore della quantità ivi denotata con R, non sono altro che la espressione del raggio di curvatura in coordinate polari.

25. Il luogo geometrico dei centri di curvatura K dei punti M di una curva è una curva chiamata la *sviluppata* o *evoluta* della curva data, la quale, considerata in relazione colla sua sviluppata o evoluta, prende il nome di *sviluppante* o *evolvente* o *involuta.*

Le coordinate ξ, η dei punti della sviluppata sono date dalle formole trovate nel numero precedente e per ottenere una relazione tra ξ, η, indipendente da x, y, cioè l'equazione $F(\xi, \eta) = 0$ della sviluppata in coordinate cartesiane, dove ξ, η sono allora le coordinate correnti, si eliminerà x, y tra le equazioni (3) del n. precedente, o, cioè che è lo stesso, tra le

$$(1) \qquad x - \xi + (y - \eta)\frac{dy}{dx} = 0, \quad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y - \eta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

e la equazione $f(x, y) = 0$ della sviluppante, quando questa sia data sotto forma implicita; oppure si eliminerà x tra le (3) n. precedente o tra le (1), quando la equazione della sviluppante è della forma $y = y(x)$; oppure si eliminerà tra le (4) del n. precedente quella variabile per mezzo della quale sono espresse le coordinate x, y dei punti della sviluppante, quando avremo quest' ultimo caso.

Senza aver bisogno di eseguire tale eliminazione, che naturalmente non può effettivamente farsi se non è individuata la sviluppante, si possono però dimostrare le seguenti proprietà della sviluppat :

1.° *Le normali alla sviluppante sono tangenti alla sviluppata nei rispettivi centri di curvatura.*

Infatti, la equazione della normale in M alla sviluppante essendo

$$Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x)$$

e quella della tangente in K alla sviluppata essendo

$$Y - \eta = \frac{d\eta}{d\xi}(X - \xi)$$

e poichè il punto K è sulla normale in M, basterà, per dimostrare il teorema, provare che $\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{dx}{dy}$. Ciò si ottiene subito, perchè derivando la prima delle (1) rapporto alla variabile indipendente x, si ha

$$1 - \frac{d\xi}{dx} + \left(\frac{dy}{dx} - \frac{d\eta}{dx}\right)\frac{dy}{dx} + (y - \eta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

che in virtù della seconda delle (1), diviene

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dx}\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{ossia} \quad \frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{dx}{dy}.$$

2.° *La lunghezza assoluta di un arco di sviluppata è uguale al valore assoluto della differenza tra i raggi di curvatura corrispondenti ai suoi estremi, quando per tutti i punti dell' arco medesimo, ossia del corrispondente arco di sviluppante, il raggio di curvatura è funzione sempre crescente o sempre decrescente della variabile indipendente, e che ammette derivata finita.*

Per dimostrare questa proprietà, supporremo che la variabile indipendente sia l' arco s di sviluppante, cosichè le coordinate dei suoi punti siano date dalle $x = x(s)$, $y = y(s)$, e le coordinate ξ, η dei punti della sviluppata dalle (5) del n. 24, le quali, posto $R = \frac{1}{x'y'' - y'x''}$, c' :ntano $\xi = x - y'R$, $\eta = y + x'R$; e derivando quest' ultime rap- I :o ad s, ed indicando le derivazioni con apici, abbiamo

$$\frac{d\xi}{ds} = x' - y''R - y'R', \quad \frac{d\eta}{ds} = y' - x''R + x'R'.$$

Elevando al quadrato e sommando, e avuto riguardo alle formole $x'^2 + y'^2 = 1$, $x'x'' + y'y'' = 0$, $r^2 = \frac{1}{x''^2 + y''^2}$, $R'^2 = r'^2$, si ha

$$\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2 = r'^2 = \left(\frac{dr}{ds}\right)^2,$$

ossia $d\xi^2 + d\eta^2 = dr^2$, la quale, indicando con S l'arco di sviluppata contato a partire da una origine fissa ed essendo perciò $dS^2 = d\xi^2 + d\eta^2$, diviene $dS^2 = dr^2$ ossia $dS = \pm dr$.

In questa formola dovremo prendere il segno superiore o l'inriore secondochè dS e dr hanno o no lo stesso segno, ossia secondochè nel punto K di sviluppata, che si considera, l'arco S ed il raggio di curvatura r crescono e decrescono insieme oppure no; cioè quando esiste un intorno di K sulla sviluppata, per tutti i punti K_1 del quale $S - S_1$ e $r - r_1$ abbiano lo stesso segno oppure no, dove S_1 è l'arco che termina in K_1, l'origine degli archi essendo fuori dell'intorno, e r_1 il raggio di curvatura corrispondente a K_1.

Cosichè, quando per tutti i punti d'un tratto di sviluppata si verifica costantemente l'uno o l'altro di questi casi, avremo sempre $dS = dr$ oppure $dS = -dr$, cioè $dS = \pm dr$, prendendo costantemente, in quel tratto, il segno superiore o l'inferiore; ed allora per tutti i punti di questo tratto di sviluppata è $S = \pm r + C$, dove C è una certa costante.

In conseguenza, se, percorrendo un tratto K_0K_1 di sviluppata da un estremo all'altro si trova che il raggio di curvatura della sviluppante cresce sempre o decresce sempre e si indicano con r_0, r_1 i valori di r corrispondenti agli estremi K_0, K_1 e con S_0, S_1 gli archi di sviluppata che terminano in K_0, K_1, contati da una origine che supponiamo fuori del tratto K_0, K_1, o al più in un estremo di esso, avremo

$$S_1 = \pm r_1 + C, \qquad S_0 = \pm r + C$$

dalle quali $S_1 - S_0 = \pm (r_1 - r_0)$ ossia $|S_1 - S_0| = |r_1 - r_0|$; ma $|S_1 - S_0| = |\text{arco } K_0 K_1|$, per cui

$$|\text{arco } K_0 K_1| = |r_1 - r_0|,$$

formola che dimostra il teorema.

Il quale non è più vero se lungo l'arco $K_0 K_1$ il raggio di curvatura della sviluppante non varia costantemente nello stesso sens

poichè se, ad es.: lungo l'arco K_0K', da K_0 a K', il raggio di curvatura cresce sempre e lungo l'arco $K'K_1$, da K' a K_1, decresce sempre, essendo K' un punto interno all'arco K_0K_1, avremo, pel teorema ora dimostrato,

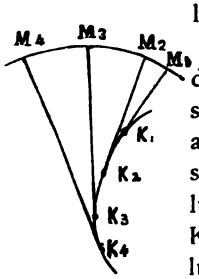
$$\text{arco } K_0K' = r' - r_0, \quad \text{arco } K'K_1 = r' - r_1$$

e quindi

$$\text{arco } K_0K_1 \quad 2r' - r_0 - r_1$$

dove r' indica il raggio di curvatura il cui centro è K'.

Dal teorema precedente si deduce un modo di descrivere la sviluppante per mezzo della sv luppata.



Supponiamo che lungo il tratto di sviluppata da K_4 a K_1 il raggio di curvatura della sviluppante sia sempre decrescente. Immaginiamo un filo che avvolga perfettamente l'arco K_1K_4 e di cui un capo sia fissato in K_4 e l'altro capo sia in M_1 sulla sviluppante, in modo che la parte rettilinea di filo K_1M_1 sia disposta sulla tangente K_1M_1 della sviluppata nel punto K_1. Immaginiamo inoltre che, tenendo sempre teso il filo, lo si svolga dalla sviluppata in modo che la parte rettilinea risulti sempre tangente alla sviluppata stessa; allora l'estremità libera del filo descriverà l'arco $M_1 M_2 M_3 M_4$ di sviluppante che corrisponde all'arco $K_1 K_2 K_3 K_4$ di sviluppata. Infatti, quando la parte rettilinea del filo si sarà disposta lungo la tangente K_2M_2 nel punto K_2 alla sviluppata, la sua estremità si troverà in un certo punto M'_2; dico che i punti M_2 ed M'_2 coincidono. Infatti abbiamo, evidentemente, $K_2M'_2 = K_1M_1 + \text{arco } K_1K_2$, e d'altra parte, per l'ultimo teorema, arco $K_1 K_2 = K_2 M_2 - K_1 M_1$ ossia $K_2M_2 = K_1M_1 + \text{arco } K_1K_2$, e quindi $K_2M_2 = K_2M'_2$.

L'estremità del filo, svolgendosi nel modo che si è detto, è venuta in M_2, e così si dimostrerebbe che essa passa per tutti i punti dell'arco $M_1 M_4$ di sviluppante.

A questa proprietà del luogo geometrico dei centri di curvatura è dovuto il nome, che gli venne dato, di sviluppata o evoluta.

Si vede poi come ad una data sviluppata possa corrispondere u i infinità di sviluppanti, che si ottengono accorciando od allung do il filo che si avvolge sulla sviluppata. Questa proprietà, del r to, risulta analiticamente, come potremo vedere altrove.

26. Diamo ora la sviluppata delle seguenti curve:

1) *Ellisse.* Sia la ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Abbiamo $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$ e da questa, servendoci di questo valore di $\frac{dy}{dx}$ e avuto riguardo alla relazione tra x e y data dalla equazione della ellisse, si ricava $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^4}{a^2y^2}$; per cui le formole (3) del n. 24 diventano

$$\xi=x-\frac{x(a^4y^2+b^4x^2)}{a^4b^2}, \qquad \eta=y-\frac{y(a^4y^2+b^4x^2)}{b^4a^2},$$

ovvero, adoperando la equazione della ellisse,

$$\xi=\frac{x^3}{a^4}(a^2-b^2), \qquad \eta=\frac{y^3}{b^4}(b^2-a^2).$$

Per eliminare x, y tra la equazione della ellisse e queste due, scriviamole così:

$$(a\xi)^{\frac{1}{3}}=\frac{x}{a}(a^2-b^2)^{\frac{1}{3}}, (b\eta)^{\frac{1}{3}}=\frac{y}{b}(b^2-a^2)^{\frac{1}{3}};$$

ed allora, elevando al quadrato e sommando e tenendo conto della equazione della ellisse, si ha:

$$(a\xi)^{\frac{2}{3}}+(b\eta)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}},$$

che è l'equazione della sviluppata richiesta, ξ. η figurando come le coordinate correnti.

Allo stesso risultato possiamo arrivare ancora partendoci dalle formole

$$x=a\cos t. \qquad y=b\operatorname{sen} t$$

che esprimono le coordinate x, y dei punti della ellisse mediante la variabile t; dalle quali, ricavandone dx, d^2x, dy, d^2y e sostituendo nelle (4) del n. 24, si ottiene

$$\xi=a\cos t-\frac{b\cos t(a^2\operatorname{sen}^2 t+b^2\cos^2 t)}{ab}=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t,$$

$$\eta=b\operatorname{sen} t-\frac{a\operatorname{sen} t(a^2\operatorname{sen}^2 t+b^2\cos^2 t)}{ab}=\frac{b^2-a^2}{b}\operatorname{sen}^3 t,$$

ossia $$(a\xi)^{\frac{1}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{1}{3}} \cos t, \quad (b\eta)^{\frac{1}{3}} = (b^2 - a^2) \operatorname{sen}^{\frac{1}{3}} t;$$

ed elevando al quadrato e sommando viene eliminato t e si ha la precedente equazione della sviluppata.

2) *Sviluppante di circolo.* La curva, le coordinate dei punti della quale sono espresse dalle formole

$$x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t), \qquad y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t),$$

chiamasi *sviluppante di circolo*, perchè, come facilmente si trova col processo testè tenuto per la ellisse, la sua sviluppata è il circolo $\xi^2 + \eta^2 = a^2$.

3) *Cicloide.* Per la cicloide

$$(1) \qquad x = a(t - \operatorname{sen} t), \qquad y = a(1 - \cos t)$$

le formole (4) del n. 24 diventano

$$\xi = a(t + \operatorname{sen} t), \quad \eta = -a(1 - \cos t).$$

Poichè la variabile t riceve tutti i valori da $-\infty$ a $+\infty$, è lecito scrivere in queste formole $t + \pi$ in luogo di t, ottenendo così

$$(2) \qquad \xi = a\pi + a(t - \operatorname{sen} t), \quad \eta = -a(1 + \cos t).$$

Inoltre trasportando gli assi delle coordinate cartesiane parallelamente a loro stessi in modo che l'origine venga nel punto di coordinate $x = a\pi, y = -2a$, chiamiamo x_1, y_1 le coordinate dei punti del piano relativamente a questo nuovo sistema. Le formole di trasformazione sono $x = x_1 + a\pi, y = y_1 - 2a$, e chiamate ξ_1, η_1 le nuove coordinate dei centri di curvatura della cicloide, le formole (2) diventano:

$$\xi_1 = a(t - \operatorname{sen} t), \quad \eta_1 = a(1 - \cos t),$$

le quali, messe a confronto colle (1), ci mostrano che la sviluppata della cicloide è una cicloide identica alla cicloide sviluppante ma diversamente situata, e precisamente situata rispetto agli assi delle x_1, y_1 come la cicloide proposta lo è rispetto a quelli delle x, y.

È notevole, per la cicloide, il valore del raggio di curvatura, giacchè si trova subito che $r = 2\sqrt{2ay}$, cioè il doppio della lunghezza della normale $L_n = \sqrt{2ay}$; il che permette di determinare facilmente il centro di curvatura di ogni suo punto.

4) *Spirale logaritmica* La sua equazione in coordinate polari $\rho = ae^{m\theta}$ diviene nel sistema cartesiano, corrispondente nel solito modo al polare,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = ae^{m \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2mk\pi}, \quad (k \text{ intero qualunque})$$

od anche

$$\log a + m \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} + 2mk\pi - \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) = 0.$$

Le formole (3) del n. 24 diventano in questo caso $\xi = -my$, $\eta = mx$; le quali, indicando con R, φ le coordinate polari del centro di curvatura (ξ, η) che corrisponde al punto (x, y) cosichè sia

$$\xi = R \cos \varphi, \quad \eta = R \operatorname{sen} \varphi, \quad x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta,$$

diventano

$$(3) \qquad R \cos \varphi = -m\rho \operatorname{sen} \theta, \qquad R \operatorname{sen} \varphi = m\rho \cos \theta,$$

tra le quali e la $\rho = ae^{m\theta}$ dobbiamo eliminare ρ, θ per avere la equazione della sviluppata in R e φ.

Perciò osserviamo che dalle (3) si ricava $R = m\rho$ e quindi ancora

$$(4) \qquad \cos \varphi = -\operatorname{sen} \theta, \qquad \operatorname{sen} \varphi = \cos \theta,$$

e da queste

$$\cos \varphi \cos \theta + \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta = \cos(\varphi - \theta) = 0,$$

e perciò $\varphi - \theta = \pm \frac{\pi}{2}$; ma dobbiamo prendere $\varphi - \theta = \frac{\pi}{2}$, ossia $= + \frac{\pi}{2}$, affinchè siano soddisfatte le (4).

Sostituendo ora $\rho = \frac{R}{m}$, $\theta = \varphi - \frac{\pi}{2}$ nella equazione $\rho = ae^{m\theta}$ abbiamo l'equazione della sviluppata

$$R = ame^{m\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)}$$

od anche

$$(5) \qquad R = ae^{\log m + m\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

La curva rappresentata da questa equazione è una spirale ugua

alla spirale sviluppante, ma diversamente situata. Per riconoscere ciò basta far ruotare l'asse polare di un angolo $\frac{\pi}{2} - \frac{\log m}{m}$; chiamando φ' l'angolo polare relativo al nuovo asse è $\varphi = \varphi' + \frac{\pi}{2} - \frac{\log m}{m}$ e la (5) diviene $R = ae^{m\varphi'}$. Quindi *la sviluppata della spirale logaritmica* $\rho = ae^{m\theta}$ *è una spirale uguale, diversamente situata, che fatta ruotare di un angolo* $\frac{\log m}{m} - \frac{\pi}{2}$ *intorno al polo viene a coincidere colla spirale sviluppante.*

Se il numero m soddisfacesse alla equazione $\frac{\log m}{m} = \frac{\pi}{2}$, la (5) diverrebbe $R = ae^{m\varphi}$ cioè la sviluppata sarebbe la stessa spirale sviluppante. Ciò avviene anche, più generalmente, quando m soddisfa alla relazione

$$(6) \qquad \frac{\log m}{m} = -(4k-1)\frac{\pi}{2} \quad (k \text{ intero qualunque}),$$

giacchè allora la (5) diviene $R = ae^{m(\varphi - 2k\pi)}$ che rappresenta la stessa curva rappresentata dalla $R = ae^{m\varphi}$.

Ora la derivata della funzione $\frac{\log m}{m}$ rapporto ad m è $\frac{1 - \log m}{m^2}$, che e positiva pei valori di m da 0 ad e e negativa per quelli da e a $+\infty$; la funzione $\frac{\log m}{m}$ cresce quindi da $-\infty$ a $\frac{1}{e}$, quando m va da 0 ad e e descresce da $\frac{1}{e}$ a 0 quando m va da e a $+\infty$. Quindi ad ogni valore positivo intero di k corrisponde un valore di m che soddisfa la (6).

Vi sono dunque infinite spirali logaritmiche dotate della notevole proprietà di essere le sviluppate di se stesse.

Contatto delle curve piane.

27. Siano le due curve

$$Y_1 = Y_1(X), \quad Y_2 = Y_2(X),$$

e $Y_1(X)$, $Y_2(X)$ ammettano derivata $(n+1)^a$ per $X = x$.

Se, per $X = x$, si ha

$$y = Y_1(x) = Y_2(x),\ Y'_1(x) = Y'_2(x),\ Y''_1(x) = Y''_2(x), \ldots\ Y_1^{(n)}(x) = Y_2^{(n)}(x),$$

si dice che le due curve nel loro punto comune (x, y) hanno un *contatto d' ordine* n^{esimo}.

Ciò supposto, avendosi allora (Vedi n. 9)

$$Y_1(x+h) - Y_2(x+h) = \frac{h^{n+1}}{1.2..(n+1)}[Y_1^{(n+1)}(x) - Y_2^{(n+1)}(x) \quad \varepsilon],$$

essendo ε quantità che converge a zero con h, la differenza delle ordinate delle curve, corrispondenti a $X = x + h$, è un infinitesimo di ordine $n + 1$, se h si prende per infinitesimo di primo ordine.

Inoltre, poichè esiste un intorno di x per tutti i punti $x + h$ del quale la quantità tra parentesi nel secondo membro della formola precedente mantiene lo stesso segno di $Y_1^{(n+1)}(x) - Y_2^{(n+1)}(x)$, la differenza $Y_1(x + h) - Y_2(x + h)$, pei punti di tale intorno, cambierà oppure non cambierà di segno con h, secondochè n è pari oppure dispari. Cioè, *due curve che hanno in un punto un contatto d' ordine pari si attraversano scambievolmente nel punto di contatto, e due curve che hanno un contatto d' ordine dispari sono, nelle vicinanze del punto di contatto, ciascuna intieramente dalla stessa parte rispetto all' altra o, come si dice, le due curve si abbracciano.*

Sia ora una terza curva $Y_3 = Y_3(X)$, che abbia con una delle due precedenti, poniamo colla $Y_1 = Y_1(X)$, un contatto d' ordine $m < n$ nel punto (x, y). Scrivendo, per brevità, $Y_1, \ldots$ in luogo di $Y_1(x + h) \ldots$ abbiamo

$$Y_3 - Y_2 = (Y_3 - Y_1) + (Y_1 - Y_2); \quad \frac{Y_3 - Y_2}{Y_3 - Y_1} = 1 + \frac{Y_1 - Y_2}{Y_3 - Y_1}$$

ossia

$$\frac{Y_3 - Y_2}{Y_3 - Y_1} = 1 + \frac{h^{n-m}\,1.2\ldots(m+1)}{1.2\ldots(n+1)}\,\frac{Y_1^{(n+1)}(x) - Y_2^{(n+1)}(x) + \varepsilon_1}{Y_3^{(m+1)}(x) - Y_1^{(m+1)}(x) + \varepsilon_2};$$

e, poichè il secondo membro diventa uguale ad *uno* per $h = 0$, esiste per h un intorno di $h = 0$ ossia, un corrispondente intorno di x, per tutti i punti del quale questo secondo membro è positivo, e qui[illegible] in esso $Y_3 - Y_2$ e $Y_3 - Y_1$ hanno lo stesso segno; cioè la cu[illegible] $Y_3 = Y_3(X)$ non passa tra la due prime curve nelle vicinanze d[illegible] punto di contatto. Quindi, *tra due curve, che hanno in un pu*[illegible]

un contatto d' ordine n, *non si può far passare, nelle vicinanze del punto di contatto, alcuna altra curva che abbia, in quel punto, un contatto d' ordine inferiore ad* n *con una delle due prime.*

28. Siano le due curve

$$(1) \qquad Y_1 = Y_1(X),$$

$$(2) \qquad f(X,\ Y_2,\ a_1\ ,a_2 \ldots a_{n+1}) = 0.$$

La seconda equazione contenendo le $n+1$ costanti $a_1\ ,a_2,\ldots a_{n+1}$ rappresenta tutte le curve di una stessa specie, i cui individui si ottengono attribuendo speciali valori alle costanti o parametri $a_1\ ,a_2,\ldots a_{n+1}$.

Queste costanti potranno determinarsi in guisa che la curva rappresentata dalla equazione (2) passi per un punto $(x\ ,y)$ della (1) ed abbia ivi con essa un contatto di un certo ordine $m \leqq n$, perchè le equazioni di condizione pel contatto d' ordine m sono in numero di $m+1$ cioè le

$$(3) \qquad Y_1(x) = Y_2(x),\ Y_1'(x) = Y_2'(x),\ldots\ Y_1^{(m)}(x) = Y_2^{(m)}(x),$$

intendendo qui con $Y_2(x)$, $Y_2'(x)$... i valori di Y_2 e delle sue derivate ricavate dalla (2); e a queste equazioni di condizione soddisfarà ognuna di quelle curve (2), nella equazione della quale porremo per $m+1$ delle costanti a valori che soddisfacciano alle equazioni (3). Avremo così, in generale, un numero infinito di curve (2) aventi colla curva (1) nel punto $(x\ ,y)$ un contatto d' ordine $m < n$, nessuna, in generale, che abbia un contatto d' ordine $m > n$ ed una sola che ha un contatto d' ordine n. Quest' ultima si dice che è, tra le curve della specie delle (2), la *osculatrice* alla curva (1) nel punto $(x\ ,y)$.

In punti speciali la curva (2) può avere un contatto d' ordine superiore ad n, cioè in quei punti della (1) le cui ascisse x soddisfanno alla equazione $Y_1^{(n+1)}(x) = Y_2^{(n+1)}(x)$. Per questi punti la curva osculatrice (2) ha un contatto d' ordine $n+1$, giacchè essa soddisfa alle $n+1$ equazioni (3) (qui è $m = n$) e alla $Y_1^{(n+1)}(x) = Y_2^{(n+1)}(x)$, le quali tutte sono appunto le condizioni pel contatto d'ordine $n+1$. E l' ordine del contatto potrà ancora elevarsi se, per speciali valori di x, fosse inoltre

$$Y_1^{(n+2)}(x) = Y_2^{(n+2)}(x),\ Y_1^{(n+3)}(x) = Y_2^{(n+3)}(x)\ldots$$

ESEMPI.

1) *Retta osculatrice.* Determiniamo le due costanti a_1, a_2 nella equazione della retta $Y_2 = a_1 X + a_2$, affinchè essa abbia un contatto di primo ordine, e con ciò sia osculatrice, nel punto $(x, y = Y_1(x))$ colla curva $Y_1 = Y_1(X)$. Le determineremo mediante le due equazioni di condizione pel contatto di primo ordine, che qui diventano

$$Y_1(x) = y = Y_2(x) = a_1 x + a_2, \quad Y_1'(x) = Y_2'(x) = a_1;$$

la seconda delle quali determina a_1 e dalla prima abbiamo allora $a_2 = y - xY_1'(x)$, cosichè la retta oscuratrice è la

$$Y_2 = Y_1'(x)X + y - xY_1(x)$$

ossia

$$Y_2 - y = Y_1'(x)\ (X - x),$$

che è la tangente alla $Y_1 = Y_1(X)$ nel punto (x, y). La retta osculatrice ad una curva è quindi la tangente, la quale ha così un contatto di primo ordine colla curva.

Il contatto colla tangente è di secondo ordine in quei punti della curva che corrispondono alle ascisse X tali che $Y_1''(X) = Y_2''(X) = 0$, cioè nei flessi della curva.

Ed il contatto sarebbe di ordine superiore al secondo per quei punti pei quali fosse inoltre $Y_1'''(X) = 0$, $Y_1''''(X) = 0$ ..

2) *Circolo osculatore.* Determiniamo le tre costanti a_1, a_2, a_3 della equazione di un circolo

$$(4) \qquad (X - a_1)^2 + (Y_2 - a_2)^2 - a_3^2 = 0$$

affinchè, avendo nel punto (x, y) della curva $Y_1 = Y_1(X)$ un contatto di secondo ordine, ne sia il circolo osculatore in quel punto. Le equazioni pel contatto di secondo ordine sono

$$(5) \qquad Y_1(x) = Y_2(x), \quad Y_1'(x) = Y_2'(x), \quad Y_1''(x) = Y_2''(x),$$

dove nei secondi membri dobbiamo sostituire i valori ricavati dalla (4) per Y_2, Y_2', Y_2''. Ma alle (5) possiamo sostituire la (4) e le equazioni che da essa ricaviamo colla derivazione rispetto ad X, facendo in esse $X = x$, e sostituendo per Y_2, Y_2', Y_2'' i valori dati dalle (5). Ciò facendo abbiamo

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = a_3^2,$$
$$x - a_1 + (y - a_2)Y_1'(x) = 0,$$
$$1 + [Y_1'(x)]^2 + (y - a_2)Y''(x) = 0;$$

le quali equazioni in a_1, a_2 e a_3 sono identiche a quelle in ξ, η e r cui soddisfanno le coordinate del centro di curvatura ed il raggio di curvatura nel punto (x, y) della curva $Y_1 = Y_1(X)$. Cosichè, avendosi $a_1 = \xi$, $a_2 = \eta$, $a_2 = r$, vediamo che il *circolo osculatore coincide col circolo di curvatura alla curva nel punto che si considera.*

Il circolo osculatore, avendo colla curva, generalmente, un contatto di secondo ordine, attraversa la curva nel punto di contatto.

In punti speciali l'ordine del contatto del circolo osculatore potrà aumentare di una o più unità.

Esercizi.

1. Per la curva $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (*astroide*) il raggio di curvatura r nel punto (x, y) è dato dalla formola $r^2 = 9(axy)^{\frac{2}{3}}$, e la sviluppata ha per equazione $(\xi + \eta)^{\frac{2}{3}} + (\xi - \eta)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$, ovvero, scrivendo qui e nel seguito x e y in luogo di ξ e η, $(x + y)^{\frac{2}{3}} + (x - y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$. Facendo ruotare gli assi di un angolo $\frac{\pi}{4}$ intorno all'origine, si riconosce che anche essa è una astroide.

2. Per la parabola semicubica $3ay^2 = x^3$ si ha $r^2 = \frac{(2a + 3x)^3}{3a^2}$ e la equazione della sviluppata è

$$81y^2 + 16[a^2 + 8ax \pm \sqrt{a}\,(a - 6x)^{\frac{3}{2}}] = 0.$$

3. $(2a - x)y^2 - x^3 = 0$ (*cissoide di Diocle*); $r = \frac{a\sqrt{x}\,(8a - 3x)^{\frac{3}{2}}}{3(2a - x)^2}$; sviluppata

$$4096\,a^3x + 1152\,a^2y^2 + 27\,y^4 = 0.$$

4. La sviluppata della parabola $y^2 = 2px$ è la parabola semicubica $(x - p)^3 = 27\,py^2$.

5. In qualunque punto della conica $y^2 = 2px + qx^2$ (conica riferita ad uno dei suoi assi di figura come asse delle x e alla tangente al vertice come asse delle y) il raggio di curvatura è uguale al cubo

della lunghezza della normale diviso per p^2 (quadrato del semiparametro p).

6. La sviluppata della ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ è la curva

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{2}{3}}=1 \text{ dove } A=\frac{c^2}{a},\ B=\frac{c^2}{b},\ c^2=a^2-b^2,\ a>b;$$

la sviluppata della iperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ è la $\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ dove A, B hanno i valori precedenti e $c^2=a^2+b^2$.

7. $y=\frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}}+e^{-\frac{x}{h}}\right)$ (*catenaria*); $r=\frac{y^2}{2h}$; sviluppata

$$x=h\log\left(\frac{y\pm\sqrt{y^2-4h^2}}{2h}\right)\mp\frac{y\sqrt{y^2-4h^2}}{4h}.$$

8. La sviluppata della curva $x=\frac{h}{2}\log\frac{h+\sqrt{h^2-y^2}}{h-\sqrt{h^2-y^2}}-\sqrt{h^2-y^2}$ (*trattoria* o *trattrice*) è la catenaria $y=\frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}}+e^{-\frac{x}{h}}\right)$.

9. Per la sinussoide $y=\operatorname{sen} x$ si ha $r=\frac{(2-y^2)^{\frac{3}{2}}}{y}$ e le coordinate ξ,η dei punti della sviluppata sono $\xi=x+\frac{\cos x+\cos^3 x}{\operatorname{sen} x}$, $\eta=-\frac{2\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}$; si costruisca questa sviluppata.

10. Per la lemniscata $\rho=a^2\cos 2\theta$ (ρ, θ coordinate polari) si ha $\xi=\frac{2a\cos^3\theta}{3\sqrt{\cos 2\theta}}$, $\eta=-\frac{2a\operatorname{sen}^3\theta}{3\sqrt{\cos 2\theta}}$, e l'equazione della sviluppata è quindi

$$\left(\xi^{\frac{2}{3}}+\eta^{\frac{2}{3}}\right)^2\left(\xi^{\frac{2}{3}}-\eta^{\frac{2}{3}}\right)=\frac{4}{9}a^2.$$

11. Nei punti (x,y) d'una curva $Y=Y(X)$, o $f(X,Y)=0$, ei quali è verificata la relazione

$$3Y'(x)\,\overline{Y''(x)}^2-[1+\overline{Y'(x)}^2]\,Y'''(x)=0,$$

ossia nei quali il raggio di curvatura è massimo o minimo, il circolo osculatore ha un contatto di terzo ordine colla curva.

12. Sia la curva $Y = Y(X)$ o $f(X, Y) = 0$, e $\varphi(X, Y) = 0$ una seconda curva che si vuol rendere osculatrice alla prima nel punto (x, y). Per facilitare la determinazione dei coefficienti della osculatrice, giova supporre riferita la curva e la osculatrice a due nuovi assi paralleli ai primi, la cui origine sia il punto (x, y), cosichè, indicate con X_1, Y_1 le nuove coordinate, sia $X = X_1 + x$, $Y = Y_1 + y$. Le equazioni precedenti diventano allora $Y_1 + y = Y(X_1 + x)$ o $f(X_1 + x, Y_1 + y) = 0$, e $\varphi(X_1 + x, Y_1 + y) = \psi(X_1, Y_1) = 0$. Una delle costanti della φ si determina colla $\psi(0, 0) = 0$; per determinare le altre si derivi la $\psi(X_1, Y_1) = 0$ tante volte rapporto ad X_1 quanti sono i coefficienti che ancora rimangono in ψ, ossia un numero di volte uguale al contatto che la osculatrice può generalmente avere colla curva, avvertendo di porre $X_1 = 0$, $Y_1 = 0$ nelle equazioni che così si ottengono, e sostituire in luogo delle derivate di Y_1 rapporto ad X_1 quelle che si ottengono dall' equazione della curva data ponendo in esse $X = 0$, $Y_1 = 0$, le quali non sono altro che $Y'(x)$, $Y''(x)$.... Le equazioni così ottenute determinano i coefficienti, che si sostituiranno nella equazione $\psi(X_1, Y_1) = 0$, la quale diventa perciò quella della osculatrice richiesta. Ripassando quindi al primitivo sistema di assi la equazione dell' osculatrice sarà $\psi(X - x, Y - y) = 0$.

Si applichi questo procedimento per determinare la conica osculatrice (contatto di quarto ordine). Si trova così che la sua equazione è

$$A(X - x)^2 + 2B(X - x)(Y - y) + (Y - y)^2 + 2D(X - x) + 2E(Y - y) = 0$$

dove

$$A = Y'^2 + \frac{3(3Y''^2 - 2Y'Y''')Y''^2}{3Y''Y'''' - 4Y'''^2}, \quad B = \frac{3Y''^2Y'''}{3Y''Y'''' - 4Y'''^2} - Y',$$

$$D = \frac{9Y'Y''^3}{3Y''Y'''' - 4Y'''^2}, \quad E = \frac{-9''^3}{3Y''Y'''' - 4Y'''^2},$$

con Y', Y''... intendendo $Y'(x)$, $Y''(x)$....; e la conica osculatrice sarà una ellisse, parabola, o iperbole secondochè $5Y'''^2 - 3Y''Y''''$ risulta < 0, $= 0$, o > 0.

La condizione affinchè nel punto (x, y) la conica osculatrice abbia il contatto di quinto ordine è

$$Y''[45Y''Y'''Y'''' - 9Y''^2Y'''' - 40Y'''^3] = 0.$$

Se $Y''=0$ e Y''' è diverso da zero il punto (x, y) è un flesso e la conica osculatrice diventa la tangente nel flesso considerata come una retta doppia, ossia come una retta dove venga a coincidere una altra retta parallela ad essa.

13. Sia la curva

$$y = a_0 + 4a_1x + 6a_2x^2 + 4a_3x^3 + a_4x^4.$$

Se $a_2a_4 - a_3^2 > 0$, nel punto corrispondente all'ascissa $x = -\frac{a_3}{a_4}$ la conica osculatrice è una ellisse che ha colla curva un contatto di quinto ordine, e nei punti corrispondenti alle ascisse $x = -\frac{a_3}{a_4} \pm \frac{3\sqrt{a_2a_4 - a_3^2}}{a_4\sqrt{7}}$ la conica osculatrice è una iperbole, che ha colla curva un contatto di quinto ordine; se $a_2a_4 - a_3^2 < 0$, vi è il punto corrispondente all'ascissa $x = -\frac{a_3}{a_4}$, pel quale la conica osculatrice è una iperbole, che ha un contatto di quinto ordine; se $a_2a_4 - a_3^2 = 0$ il punto $x = -\frac{a_3}{a_4}$ è un flesso.

Curve gobbe o a doppia curvatura. — Tangente. — Piano normale. — Arco di curva gobba.

29. Designando x, y, z le coordinate cartesiane dei punti dello spazio, riferiti ad un sistema di assi che per semplicità supporremo ortogonali, è noto che gli infiniti sistemi di valori di x, y, z che soddisfanno a due equazioni

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x, y, z) = 0,$$

costituiscono, generalmente, una curva i cui punti non sono, in generale, situati in uno stesso piano, e che chiamasi *curva gobba* o *a doppia curvatura*; e che ogni curva gobba può venire rappresentata da due equazioni come le (1).

Le funzioni $f(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$ si suppone siano tali che le (definiscano due delle quantità x, y, z come funzioni della terza, cc tinue, e che ammettano generalmente derivata, in un certo interval di questa variabile.

La tangente, in un punto $M(x, y, z)$ della curva, viene anche qui definita come la posizione limite di una secante che passa per M e per un altro punto M', quando M' si avvicina indefinitamente ad M, così che la tangente è quella retta le cui equazioni sono ciò che diventano quelle della secante al limite, quando M' si avvicina indefinitamente ad M. Indicando con $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ le coordinate del punto M', le equazioni della secante sono

$$Y - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(X - x), \quad Z - z = \frac{\Delta z}{\Delta x}(X - x)$$

designando con X, Y, Z le coordinate correnti. Facendo avvicinare indefinitamente M' ad M, $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ convergono a zero e se esistono i limiti di $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta z}{\Delta x}$, come generalmente si suppone, cioè se esistono le derivate $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ delle y, z considerate come funzioni di x, esisterà la tangente e le sue equazioni saranno

$$(2) \qquad Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x), \quad Z - z = \frac{dz}{dx}(X - x) \text{ (1)},$$

dalle quali ricaviamo l'altra

$$(3) \qquad Y - y = \frac{dy}{dz}(Z - z).$$

Queste tre equazioni sono le equazioni delle proiezioni della tangente sui piani coordinati xy, xz, yz.

Ora se la tangente non è parallela a nessuno dei piani coordinati, le sue proiezioni non sono parallele a nessuno degli assi e le $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dy}{dz}$ esistono e sono finite e diverse da zero, e viceversa

(1) Osserviamo che potrebbe avvenire che esistano i limiti di $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ soltanto per Δx convergente a zero per valori positivi ed allora si avrebbe solamente una tangente che potrebbe chiamarsi tangente a destra, oppure soltanto p valori negativi e si avrebbe così una sola tangente a sinistra. oppure esist o i limiti tanto per Δx positivo che negativo ma siano diversi ed allora si vrebbero due tangenti diverse, oppure i limiti non esistano e non si avrebbe la ngente, ma ciò potrà presentarsi, dietro le supposizioni fatte, solo in alcu punti speciali, che giova ora escludere dalle nostre considerazioni.

se queste derivate sono finite e diverse da zero, la tangente esiste e non è parallela ad alcuno dei piani coordinati.

Se la tangente è parallela al piano yz, allora le proiezioni sui piani xy e xz sono parallele agli assi delle y e z e perciò le derivate $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ devono risultare infinite; ma in tal caso invece delle due equazioni (2) avremo l'unica $X - x = 0$, la quale unitamente alla (3) che seguita a sussistere costituirà il sistema delle equazioni della tangente; e viceversa se $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ sono infinite e $\frac{dy}{dz}$ è finita e diversa da zero, la tangente risulterà parallela al piano yz e le sue equazioni saranno

$$X - x = 0, \quad Y - y = \frac{dy}{dz}(Z - z).$$

Se poi la tangente oltre ad essere parallela al piano yz è ancora parallela all'asse y, allora, riducendosi ad un punto la proiezione sul piano zx, la $\frac{dz}{dx}$ potrebbe anche non esistere, e la $\frac{dy}{dz}$ sarà infinita unitamente alla $\frac{dy}{dx}$ e le equazioni della tangente saranno

$$X - x = 0, \qquad Z - z = 0;$$

e viceversa se $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dz}$ sono infinite, esista o non esista la $\frac{dz}{dx}$, la tangente è parallela all'asse delle y, e le sue equazioni saranno $X - x = 0$, $Z - z = 0$.

In ultimo se la tangente è parallela al piano yz e all'asse z, allora potrà anche non esistere la $\frac{dy}{dx}$ e saranno infinite le $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ e le equazioni della tangente saranno in questo caso

$$X - x = 0, \qquad Y - y = 0;$$

e viceversa.

Avendo presenti questi casi particolari, possiamo in generale prendere come equazioni della tangente nel punto M di coordinate (x, y, z) le (2) che possiamo anche scrivere sotto la forma, soliti a darsi alle equazioni di una retta,

$$(2)' \qquad \frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}.$$

Le derivate $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ si dovranno ricavare dalle equazioni della curva. Cosichè, ove queste avessero la forma particolare

$$y = y(x), \qquad z = z(x),$$

si avrebbe

$$\frac{dy}{dx} = y'(x), \qquad \frac{dz}{dx} = z'(x);$$

e se fossero della forma generale (1) dovremo ricavare $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ dalle equazioni

$$(4) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0$$

per sostituirli nelle (2); od anche potremo ricavare dalle (2) i valori di $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ per sostituirli nelle (4), il che facendo otteniamo subito le equazioni della tangente nella forma

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial f}{dz}(Z - z) = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(Z - z) = 0,$$

ove è a notare che qui si suppone le coordinate x, y, z del punto M non soddisfacciano alle equazioni

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}};$$

ove ciò fosse quelle equazioni non individuerebbero più una retta, p chè si ridurrebbero ad una sola equazione.

Le coordinate dei punti della curva gobba potranno venire espresse p mezzo di una variabile t, cioè si potrà avere

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t);$$

allora

$$dx = x'(t)dt,\ dy = y'(t)dt,\ d\zeta = \zeta'(t)dt$$

e le equazioni (2)' diventano

$$\frac{X - x}{x'(t)} = \frac{Y - y}{y'(t)} = \frac{Z - \zeta}{\zeta'(t)}.$$

30 I coseni degli angoli α, β, γ che la direzione positiva della tangente forma colla direzione positiva degli assi x, y, ζ vengono, avuto riguardo alle equazioni della tangente, dati dalle formole

$$\cos\alpha = \pm \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + d\zeta^2}},\ \cos\beta = \pm \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + d\zeta^2}},$$

$$\cos\gamma = \pm \frac{d\zeta}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + d\zeta^2}},$$

nelle quali si deve prendere contemporaneamente il segno superiore o l'inferiore; ed il segno dipenderà dalla direzione positiva sulla tangente. Così ad: es: se si prende per direzione positiva della tangente quella nella quale ci si deve muovere per percorrere, a partire dal piano xy, la parte di tangente che rimane dalla stessa parte dell'asse positivo delle x, dovremo prendere quel segno pel quale risulti $\cos\gamma$ positivo.

31. Chiamasi *piano normale* ad una curva gobba nel punto $M(x, y, \zeta)$ il piano perpendicolare alla tangente e che passa pel punto di contatto M. Ogni retta di questo piano, la quale passi pel punto di contatto, è una *normale* alla curva.

L'equazione di un piano qualunque che passa per M essendo

$$a(X - x) + b(Y - y) + c(Z - \zeta) = 0,$$

affinchè sia perpendicolare alla tangente dovrà essere $b = a\frac{dy}{dx}$, $c = a\frac{d\zeta}{dx}$ e quindi l'equazione del piano normale è

$$(X - x) + \frac{dy}{dx}(Y - y) + \frac{d\zeta}{dx}(Z - \zeta) = 0$$

ovvero

$$(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy + (Z - \zeta)\,d\zeta = 0.$$

32. Per *lunghezza di un arco continuo* M_0M di curva gobba, o semplicemente per *arco* M_0M, si intende il limite dei perimetri delle linee poligonali inscritte nella curva in tutto il tratto M_0M in modo che M_0, M siano i vertici estremi delle linee poligonali e i vertici siano punti successivi del tratto, quando i loro lati impiccoliscono indefinitamente.

Se la curva ha per equazioni $y = y(x)$, $z = z(x)$ e le $y(x)$, $z(x)$ ammettono derivate finite, tali che sia integrabile nell'intervallo x_0, x (x_0, x ascisse dei punti M_0, M) la funzione $\sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2}$, si troverebbe, in modo perfettamente analogo a quello tenuto per le curve piane,

$$\text{arco } M_0M = \int_{x_0}^{x} dx \sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2} = \int_{x_0}^{x} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

dove si suppone $x_0 < x$.

Indicando con $s(x)$ l'arco da M_0 a M contato positivamente in un certo verso e negativamente nell'opposto, si trova anche qui, sotto condizioni analoghe a quelle per le curve piane,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

nella prima delle quali è sottinteso il doppio segno nel radicale.

Essendo α, β, γ gli angoli che la tangente nel punto $M(x, y, z)$, estremo dell'arco s, fa cogli assi e supposto che nel punto M la direzione positiva della tangente sia quella positiva dell'arco, si hanno anche qui le formole, di continuo uso,

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

È noto che nello spazio si ha un sistema di coordinate polari analogo a quelle del piano, e nel quale ogni punto dello spazio è determinato come intersezione di una sfera di raggio ρ, di un cono circolare retto col vertice nel centro della sfera (polo) e le cui generatrici fanno coll'asse del cono (asse polare) un angolo θ, e di un piano che fa un angolo φ con un piano fisso passante per l'asse polare; ρ, θ, φ sono le coordinate polari dei punti dello spazio, e si ottengono tutti i punti dello spazio quando ρ varii da 0 a $+\infty$, θ da 0 a π, φ da 0 a 2π. Ponendo il polo nell'origine del sistema car-

tesiano ortogonale, prendendo la parte positiva dell'asse delle z per asse polare, e il piano ZOX pel piano fisso, si hanno le formole

$$z = \rho \cos \theta, \quad x = \rho \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi;$$

ricavando da queste i valori di dx, dy, dz e sostituendoli nella $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ si ha, dopo facili riduzioni, la espressione dell'elemento d'arco ds in questo sistema di coordinate:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2.$$

Piano osculatore di una curva gobba. — Normale principale. — Binormale.

33. Sia $M(x, y, z)$ un punto di una curva gobba. MT la tangente in M; si consideri il piano che passa per MT e per un altro punto $M(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ sulla curva. La posizione limite di questo piano quando il punto M' si avvicina indefinitamente ad M, cioè quel piano la cui equazione è ciò che diventa, al limite, la equazione del piano che passa per M' e per MT, chiamasi *piano osculatore* alla curva nel punto M.

Il piano osculatore è quindi anche la posizione limite dei piani che passano per M e per due altri punti m, M' sulla curva, quando questi si avvicinano indefinitamente al punto M.

Cerchiamo la equazione del piano osculatore. Essa avrà intanto la forma

$$(1) \qquad A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0,$$

che compete a qualunque piano passante per M, designando, al solito, con X, Y, Z le coordinate correnti; e, poichè il piano osculatore deve contenere la tangente al punto M le cui equazioni sono

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz},$$

dovrà essere

$$(2) \qquad A dx + B dy + C dz = 0.$$

Esprimendo poi che il piano (1) passa per M' si ha l'equazione

$$(3) \qquad A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z = 0.$$

Siano ora le coordinate x, y, z dei punti della curva espresse mediante una variabile t (caso che comprende quello in cui la variabile indipendente è una delle x, y, z) colle formole $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, e si supponga che le $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ ammettano derivate seconde; allora essendo

$$\Delta x = \frac{dx}{dt}\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2}[x''(t) + \varepsilon],$$

$$\Delta y = \frac{dy}{dt}\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2}[y''(t) + \varepsilon_1],$$

$$\Delta z = \frac{dz}{dt}\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2}[z''(t) + \varepsilon_2],$$

dove $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ convergono a zero con Δt, la (3), avuto riguardo alla (2), diviene

$$\text{(4)} \qquad A[x''(t) + \varepsilon] + B[y''(t) + \varepsilon_1] + C[z''(t) + \varepsilon_2] = 0.$$

Eliminando A, B, C tra questa equazione e le (1), (2) si ha così la equazione del piano che passa per la tangente MT e pel punto M'. Al limite, quando M' converge al punto M, cioè quando Δt converge a zero, la equazione (2) rimane invariata e la (4) diviene

$$Ax''(t) + By''(t) + Cz''(t) = 0$$

o, ciò che è lo stesso,

$$Ad^2x + Bd^2y + Cd^2z = 0;$$

quindi eliminando A, B, C tra questa equazione e le (1), (2) abbiamo l'equazione del piano osculatore, cioè la equazione:

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0;$$

cosichè la (1) è la equazione del piano osculatore, quando le A, B, C abbiano i valori

$$A = dyd^2z - dzd^2y, \quad B = dzd^2x - dxd^2z, \quad C = dxd^2y - dyd^2x,$$

dove la variabile indipendente è qualunque. Se in particolare la variabile indipendente fosse x si porrebbe $d^2x = 0$.

Indicando con λ, μ, ν gli angoli, che fa cogli assi la perpendicolare al piano osculatore, abbiamo

$$\cos\lambda = \frac{A}{D}, \quad \cos\mu = \frac{B}{D}, \quad \cos\nu = \frac{C}{D},$$

avendo posto

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2.$$

34. Si chama *binormale* quella, tra le normali alla curva nel punto M, che è perpendicolare al piano osculatore in M, sicchè le sue equazioni sono:

$$\frac{X - x}{A} = \frac{Y - y}{B} = \frac{Z - z}{C}.$$

Chiamasi *normale principale* quella, tra le normali alla curva in M, che è situata nel piano osculatore, cioè la intersezione del piano normale col piano osculatore. Le sue equazioni sono quindi quelle di questi due piani considerate come coesistenti. Ma le equazioni della normale principale possono aversi sotto forma più semplice. Si osservi infatti che la normale principale è quella retta che è perpendicolare alla tangente in M ed alla binormale. Ora la equazione

$$\frac{dx}{ds}\, d\left(\frac{dx}{ds}\right) + \frac{dy}{ds}\, d\left(\frac{dy}{ds}\right) + \frac{dz}{ds}\, d\left(\frac{dz}{ds}\right) = 0,$$

che si ricava dalla

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

e la equazione

$$A\, d\left(\frac{dx}{ds}\right) + B\, d\left(\frac{dy}{ds}\right) + C\, d\left(\frac{dz}{ds}\right) = 0,$$

che si ricava dalle due

$$A d^2x + B d^2y + C\, d^2z = 0, \qquad A\, dx + B\, dy + C\, dz = 0$$

moltiplicando la prima per $\frac{ds}{ds^2}$, la seconda per $-\frac{d^2s}{ds^2}$ e sommando, ci dicono che quella retta, che fa cogli assi angoli i cui coseni s no

proporzionali a $d\left(\frac{dx}{ds}\right)$, $d\left(\frac{dy}{ds}\right)$, $d\left(\frac{dz}{ds}\right)$, è perpendicolare alla tangente e alla binormale in M, cioè, ove passi per M, è la normale principale. Le equazioni di questa sono quindi

$$\frac{X-x}{d\left(\frac{dx}{ds}\right)} = \frac{Y-y}{d\left(\frac{dy}{ds}\right)} = \frac{Z-z}{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}.$$

Curvatura delle curve gobbe.

35. Come nelle curve piane, si chiama *angolo di contingenza* in un punto $M(x, y, z)$ di una curva gobba l'angolo θ formato dalle due tangenti condotte agli estremi di un arco infinitesimo $MM' = \Delta s$, e *curvatura* della curva in quel punto il limite del rapporto $\frac{\theta}{\Delta s}$ quando M' si avvicina indefinitamente al punto M, e *raggio di curvatura* nel punto M il limite dell'inversa $\frac{\Delta s}{\theta}$.

Indicando, per maggior brevità, con a, b, c i coseni degli angoli che la tangente alla curva nel punto M fa cogli assi, cosichè sia

$$a = \frac{dx}{ds}, \quad b = \frac{dy}{ds}, \quad c = \frac{dz}{ds},$$

e indicando con $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ le coordinate del punto M', con $a' = a + \Delta a$, $b' = b + \Delta b$, $c' = c + \Delta c$ i coseni degli angoli, cogli assi, della tangente in M', abbiamo, per una nota formola di Geom. analitica,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= \sqrt{(cb' - bc')^2 + (ac' - ca')^2 + (ba' - ab')^2} \\ &= \sqrt{(c\Delta b - b\Delta c)^2 + (a\Delta c - c\Delta a)^2 + (b\Delta a - a\Delta b)^2} \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\Delta s}$$

$$\sqrt{\left(c\frac{\Delta b}{\Delta s} - b\frac{\Delta c}{\Delta s}\right)^2 + \left(a\frac{\Delta c}{\Delta s} - c\frac{\Delta a}{\Delta s}\right)^2 + \left(b\frac{\Delta a}{\Delta s} - a\frac{\Delta b}{\Delta s}\right)^2}.$$

Ma poichè $\lim \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$ quando M' si avvicina indefinitamente ad M, avremo (n. 35, vol. I)

$$\lim \frac{\operatorname{sen}\theta}{\Delta s} = \lim \frac{\theta}{\Delta s}$$

$$= \sqrt{\left(c\frac{db}{ds} - b\frac{dc}{ds}\right)^2 + \left(a\frac{dc}{ds} - c\frac{da}{ds}\right)^2 + \left(b\frac{da}{ds} - a\frac{db}{ds}\right)^2}.$$

D' altra parte, essendo

$$da = \frac{dsd^2x - dxd^2s}{ds^2},\quad db = \frac{dsd^2y - dyd^2s}{ds^2},\quad dc = \frac{dsd^2z - dzd^2s}{ds^2},$$

è

$$bda - adb = \frac{dyd^2x - dxd^2y}{ds^2},$$

ed analogamente

$$cdb - bdc = \frac{dzd^2y - dyd^2z}{ds^2},\quad adc - cda = \frac{dxd^2z - dzd^2x}{ds^2},$$

per cui

$$\lim \frac{\theta}{\Delta s} = \frac{\sqrt{(dxd^2z - dzd^2x)^2 + (dyd^2x - dxd^2y)^2 + (dzd^2y - dyd^2z)^2}}{ds^3}$$

ossia, tenendo le notazioni del n. 33,

$$\lim \frac{\theta}{\Delta s} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{ds^3} = \frac{D}{ds^3},$$

che è l' espressione della curvatura nel punto M, ed il raggio di curvatura r è quindi $r = \frac{ds^3}{D}$.

Si hanno altre due espressioni del raggio di curvatura, che si ottengono trasformando la quantità D. Si osservi, infatti, che D^2 può scriversi sotto la forma

$$D^2 = (dx^2 + dy^2 + dz^2)[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2] - (dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z)^2;$$

ma, poichè è

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

e da questa, differenziata, si ottiene

$$dsd^2s = dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z,$$

è ancora

$$D^2 = ds^2 [(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2].$$

Avuto riguardo alle formole precedenti, si verifica subito che è altresì

$$D^2 = (dsd^2x - dxd^2s)^2 + (dsd^2y - dyd^2s)^2 + (dsd^2z - dzd^2s)^2$$

e da questa si ricava

$$D^2 = ds^2 \left[\left(\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds} \right)^2 \right].$$

Abbiamo così le seguenti tre espressioni del raggio di curvatura nel punto $M(x, y, z)$:

$$r = \frac{ds^3}{\sqrt{(dxd^2y - dyd^2x)^2 + (dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2}},$$

$$r = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}},$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds} \right)^2}},$$

che valgono qualunque sia la variabile indipendente, e nelle quali prenderemo il segno del radicale in guisa che il secondo membro risulti positivo.

36. Consideriamo il piano normale in M e quello in un punto $M'(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, e determiniamo le equazioni della retta loro intersezione; poi facendo convergere M' verso M, determiniamo le equazioni della retta limite di quelle intersezioni; o come suol dirsi, della retta intersezione del piano normale in M e di quello in un p to infinitamente vicino.

Le equazioni dei piani normali in M ed M' sono

$$dx(X - x) + dy(Y - y) + dz(Z - z) = 0,$$

$$(2)\qquad d(x+\Delta x)(X-x-\Delta x)+d(y+\Delta y)(Y-y-\Delta y)$$
$$+\,d(z+\Delta z)(Z-z-\Delta z)=0;$$

ma, supponendo espresse x, y, z mediante una variabile t colle formole $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, abbiamo

$$\Delta x=x(t+\Delta t)-x(t)=\Delta t\,.\,x'(t+\theta\Delta t),$$

$$d(x+\Delta x)=x'(t)dt+\Delta t\,.\,x''(t+\theta\Delta t)dt$$

e formole analoghe per y e z; cosichè la (2) diviene

$$[x'(t)dt+\Delta t dt x''(t+\theta\Delta t)]\,[X-x-\Delta t x'(t+\theta\Delta t]+\ldots=0,$$

ossia, avuto riguardo alla (1) e dividendo per $\Delta t\,dt$,

$$x''(t+\theta\Delta t)(X-x)+y''(t+\theta_1\Delta t)(Y-y)+z''(t+\theta_2\Delta t)(Z-z)$$
$$-\,x'(t)\,x'(t+\theta\Delta t)-y'(t)y'(t+\theta_1\Delta t)-z'(t)z'(t+\theta_2\Delta t)$$
$$-\,\Delta t[x''(t+\theta\Delta t)\,x'(t+\theta\Delta t)+\ldots]=0,$$

che, al limite per $\Delta t=0$, diviene

$$x''(t)(X-x)+\ldots-(x'(t))^2-\ldots=0,$$

che possiamo anche scrivere

$$d^2x(X-x)+d^2y(Y-y)+d^2z(Z-z)-(dx^2+dy^2-dz^2)=0,$$

ossia

$$(3)\qquad d^2x(X-x)+d^2y(Y-y)+d^2z(Z-z)=ds^2.$$

Questa e la (1) sono quindi le equazioni della intersezione dei piani normali in M e in un punto infinitamente vicino ad M.

Indicando con ξ, η, ζ le coordinate del punto K in cui questa retta incontra il piano osculatore

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

ξ, η, ζ sono i valori di X, Y, Z che soddisfanno a questa equazione, alla (3) ed alla (1); cosichè, ricordando i valori di A, B, C, si ottiene

$$(4)\qquad \begin{cases} \xi-x=\dfrac{ds^2}{D^2}(Bdz-Cdy),\\[2ex] \eta-y=\dfrac{ds^2}{D^2}(Cdx-Adz),\\[2ex] \zeta-z=\dfrac{ds^2}{D^2}(Ady-Bdx).\end{cases}$$

Il punto K è sulla normale principale, ed è ad una distanza uguale ad r dal punto M. Invero, è

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 =$$

$$\frac{ds^4}{D^4}\left[(dx^2 + dy^2 + dz^2)\,(A^2 + B^2 + C^2) - (Adx + Bdy + Cdz)^2\right],$$

ovvero, ricordando che $Adx + Bdy + Cdz = 0$,

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = \frac{ds^4}{D^4}\,ds^2 D^2 = \frac{ds^6}{D^2} = r^2.$$

Il punto K, le cui coordinate ξ, η, ζ sono date dalle (4), chiamasi *centro di curvatura*, e il circolo di centro K e di raggio r situato sul piano osculatore, ossia l'intersezione della sfera di raggio r e di centro K col piano osculatore, dicesi *circolo di curvatura* o *circolo osculatore* alla curva nel punto M.

37. Si chiama angolo di *torsione*, relativo al punto M, l'angolo ε formato dai due piani osculatori alle estremità dell'arco (infinitesimo) $\Delta s = MM'$; il limite del rapporto $\frac{\varepsilon}{\Delta s}$, quando M' si avvicina indefinitamente ad M, dicesi la *torsione* o *seconda curvatura* della curva nel punto M. e l'inversa di questo limite dicesi il *raggio di torsione* o *di seconda curvatura*. È perciò che le curve gobbe chiamansi anche curve a doppia curvatura. La curvatura misura la deviazione della curva dalla tangente, la torsione la deviazione della curva dal piano osculatore, nel punto che si considera.

Indicando con $A_1 = A + \Delta A$, $B_1 = B + \Delta B$, $C_1 = C + \Delta C$ ciò che diventano A, B, C relativamente al punto M' di coordinate $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$ cosichè la equazione del piano osculatore in M sia

$$A_1(X - x - \Delta x) + B_1(Y - y - \Delta y) + C_1(Z - z - \Delta z) = 0,$$

abbiamo, per una nota formola di geometria analitica,

$$\operatorname{sen} \varepsilon = \sqrt{\frac{(AB_1 - A_1B)^2 + (BC_1 - B_1C)^2 + (CA_1 - C_1A)^2}{D^2(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(A\,.\,\Delta B - B\,.\,\Delta A)^2 + (B\,.\,\Delta C - C\,.\,\Delta B)^2 + (C\,.\,\Delta A - A\,.\,\Delta C)^2}{D^2[(A + \Delta A)^2 + (B + \Delta B)^2 + (C + \Delta C)^2]}},$$

e quindi

$$\lim \frac{\varepsilon}{\Delta s} = \lim \frac{\operatorname{sen} \varepsilon}{\Delta s}$$

$$= \frac{1}{D^2} \sqrt{\left(A\frac{dB}{ds} - B\frac{dA}{ds}\right)^2 + \left(B\frac{dC}{ds} - C\frac{dB}{ds}\right)^2 + \left(C\frac{dA}{ds} - A\frac{dC}{ds}\right)^2}.$$

Ponendo ora

$$\Delta = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}$$

abbiamo

$$AdB - BdA = (dyd^2z - dzd^2y)\,(dzd^3x - dxd^3z)$$
$$-(dzd^2x - dxd^2z)\,(dyd^3z - dzd^3y) = \Delta \,.\, dz,$$

ed analogamente $BdC - CdA = \Delta . dx$, $CdA - AdC = \Delta \,.\, dy$, cosichè $\lim \frac{\varepsilon}{\Delta s} = \frac{\Delta}{D^2}$, ed indicando con r_1 il raggio di torsione è $r_1 = \frac{D^2}{\Delta}$.

Ricordando che $r^2 = \frac{ds^6}{D^2}$ si ha la relazione $r^2 r_1 = \frac{ds^6}{\Delta}$ tra i raggi di curvatura e di torsione.

38. Applichiamo le teorie esposte sulle curve gobbe alle seguenti due curve:

1) Sia la curva

$$(1) \qquad x^2 + z^2 = a^2, \qquad y^2 + z^2 = b^2$$

(intersezione dei due cilindri circolari retti, le cui equazioni sono le equazioni della curva).

Differenziando le equazioni date, abbiamo

$$(2) \qquad xdx + zdz = 0, \qquad ydy + zdz = 0$$

e da queste

$$(3) \qquad xdx = ydy = -zdz,$$

per cui le equazioni della tangente nel punto (x, y, z) alla curva,

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz},$$

dopo averle poste sotto la forma

$$\frac{x(X-x)}{xdx} = \frac{y(Y-y)}{ydy} = \frac{z(Z-z)}{zdz},$$

divengono

$$x(X-x) = y(Y-y) = -z(Z-z),$$

ossia, in virtù delle (1),

$$xX + zZ = a^2, \qquad yY + zZ = b^2.$$

L'equazione del piano normale si riduce alla

$$yzX + xzY - xyZ - xyz = 0.$$

Il differenziale d'arco ds è

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(\frac{z^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2} + 1\right) dz^2$$

$$= \frac{a^2b^2 - z^4}{x^2y^2} dz^2 = \frac{a^2b^2 - z^4}{(a^2 - z^2)(b^2 - z^2)} dz^2.$$

Se assumiamo z come variabile indipendente, è

$$A = -dz\, d^2y, \; B = dz d^2x, \; C = dx d^2y - dy d^2x,$$

ma dalle (2) avendosi, colla differenziazione,

$$dx^2 + x d^2x = -dz^2, \qquad dy^2 + y d^2y = -dz^2,$$

abbiamo, avuto riguardo alle (3),

$$d^2x = -\frac{a^2}{x^3} dz^2, \qquad d^2y = -\frac{b^2}{y^3} dz^2$$

e da queste

$$d^3x = -\frac{3a^2z}{x^5} dz^3, \qquad d^3y = -\frac{3b^2z}{y^5} dz^3;$$

per cui avremo

$$A = \frac{b^2}{y^3} dz^3, \; B = -\frac{a^2}{x^3} dz^3, \; C = \frac{z^3}{x^3y^3}(a^2 - b^2) dz^3,$$

e l'equazione del piano osculatore è

$$b^2x^3X - a^2y^3Y + (a^2 - b^2)z^3Z - a^2b^2(a^2 - b^2) = 0.$$

Pel raggio di curvatura r abbiamo

$$r = \frac{ds^3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \sqrt{\frac{(a^2b^2 - z^4)^3}{a^4y^6 + b^4x^6 + (a^2 - b^2)^2 z^6}}.$$

Inoltre essendo $r_1 = \frac{D^2}{\Delta}$ e

$$\Delta = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^2x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & 0 \\ d^3x & d^3y & 0 \end{vmatrix} = \frac{3a^2b^2(a^2 - b^2)z}{x^5y^5} dz^6,$$

abbiamo pel raggio di torsione

$$r_1 = \frac{a^4y^6 + b^4x^6 + (a^2 - b^2)^2 z^6}{3a^2b^2(a^2 - b^2)xyz}.$$

Nel caso particolare $a = b$, l'equazione del piano osculatore diviene $x^3X - y^3Y = 0$. In tal caso, dalle equazioni della curva ricaviamo $x = \pm y$, che ci dice la nostra curva essere composta di due curve piane, una sul piano $x = y$ l'altra sul piano $x = -y$; la qual cosa viene confermata dal fatto che la equazione del piano osculatore è $X = Y$ pei punti pei quali $x = y$, ed è $X = -Y$ per quelli pei quali $x = -y$. Per vedere quali siano queste curve piane facciamo ruotare gli assi delle x e delle y di un angolo $\frac{\pi}{4}$ intorno all'asse z e chiamiamo x', y', z' le nuove coordinate. Abbiamo, per le note formole della trasformazione delle coordinate,

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'), \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y'), \qquad z = z',$$

e le equazioni (1) diventano

$$(3) \qquad (x' + y')^2 + 2(z'^2 - a^2) = 0, \qquad (x' - y')^2 + 2(z'^2 - a^2) = 0,$$

dalle quali $(x' + y')^2 = (x' - y')^2$, che si scinde nelle due $x' = 0$, $y' = 0$; ponendo $y' = 0$ nelle (3) si ha $\frac{x'^2}{2a^2} + \frac{z'^2}{a^2} = 1$, che rappresenta una ellisse. Parimenti sul piano $z'y'$ si ha la ellisse $\frac{y'^2}{2a^2} + \frac{z'^2}{a^2} = 1$ che

si ottiene ponendo $x' = 0$ nelle (3); le quali due ellissi costituiscono così la curva (1) quando $a = b$.

2) *Elica cilindrica.* Sia la curva le coordinate dei punti della quale sono

$$x = a \cos t, \qquad y = a \operatorname{sen} t, \qquad z = ct.$$

Essa è situata sul cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ e passa pel punto $x = a$, $y = 0$, $z = 0$, che chiameremo A. Posto $c = am$ e $m = \operatorname{tg} \omega$, abbiamo $z = at \operatorname{tg} \omega$. Se M è un punto della curva e P è la sua proiezione sul piano xy, t è l'angolo che la retta OP fa coll'asse delle x. Sia CBD un angolo uguale ad ω; poniamo il vertice B sul punto A, e, immaginando che il piano dell'angolo sia un velo flessibile ed inestendibile, avvolgiamo un numero infinito di volte questo piano intorno al cilindro, in modo che. mentre il piano fascia perfettamente il cilindro, il lato BD dell'angolo si avvolga sul circolo, intersezione del cilindro col piano xy. Si riconosce facilmente allora, che l'altro lato BC dell'angolo si dispone sopra la nostra curva, rappresentata dalle equazioni $x = a \cos t$. $y = a \operatorname{sen} t$, $z = at . \operatorname{tg} \omega$, curva che chiamasi *elica cilindrica.*

Le proprietà più notevoli dell'elica sono le seguenti. Avendosi

$$dx = -a \operatorname{sen} t dt, \qquad dy = a \cos t dt, \qquad dz = a \operatorname{tg} \omega \, dt$$

$$d^2x = -a \cos t dt^2, \qquad d^2y = -a \operatorname{sen} t dt^2, \qquad d^2z = 0,$$

$$d^3x = a \operatorname{sen} t dt^3, \qquad d^3y = -a \cos t dt^3, \qquad d^3z = 0,$$

$ds^2 = a^2(1 + \operatorname{tg}^2 \omega) dt^2$, abbiamo $\cos \gamma = \dfrac{dz}{ds} = \dfrac{\operatorname{tg} \omega}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \omega}} = \operatorname{sen} \omega$, essendo γ l'angolo della tangente nel punto $M(x, y, z)$ coll'asse delle z, e vediamo così che quest'angolo è costante, cioè *la tangente in qualunque punto dell'elica cilindrica fa un angolo costante colle generatrici del cilindro.*

Inoltre è

$$A = a^2 \operatorname{tg} \omega \operatorname{sen} t dt^3, \quad B = -a^2 \operatorname{tg} \omega \cos t dt^3, \quad C = a^2 dt^3,$$

cosichè

$$r = \frac{ds^3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = a(1 + \operatorname{tg}^2 \omega),$$

cioè, *il raggio di curvatura è costante per tutti i punti dell'elica.*

Inoltre, essendo $\Delta = a^3 \operatorname{tg} \omega \, dt^6$, è $r_1 = \frac{D^2}{\Delta} = a \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \omega}{\operatorname{tg} \omega}$, cioè *il raggio di torsione è costante per tutti i punti dell' elica.* E quindi, *l' elica ha costanti le due curvature in ogni suo punto.*

Esercizi

1. Per la curva $y = \frac{x^2}{2a}$, $z = \frac{x^3}{6a^2}$ (intersezione di due cilindri parabolici) abbiamo: $Y = \frac{x}{a} X - \frac{x^2}{2a}$, $Z = \frac{x^2}{2a^2} X - \frac{x^3}{3a^2}$, od anche $\frac{X - x}{a} = \frac{Y - y}{x} = \frac{Z - z}{y}$, equazioni tangente nel punto (x, y, z); $2a^2 X + 2axY + x^2 Z = \frac{x(12a^4 + 6a^2x^2 + x^4)}{6a^2}$ equazione piano normale;

$$r = \frac{(2a^2 + x^2)^2}{4a^3}; \quad r_1 = r.$$

2. Curva $y^2 = x(a - x)$, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (intersezione di un cilindro circolare e di una sfera); $2yX + (a - 2x) Y - Z\sqrt{ax} = 0$ piano normale;

$$r = \sqrt{\frac{(a + x)^3}{5a + 3x}}, \qquad r_1 = \frac{5a + 3x}{6} \sqrt{\frac{a}{x}}.$$

3. Curva $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right)$ (intersezione di un cilindro iperbolico con un cilindro che ha per direttrice una catenaria); $Y - y = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}}(X - x)$, $Z - z = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}}(X - x)$ equazioni tangente; $\cos \alpha = \frac{\varepsilon x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, $\cos \beta = \frac{b}{\varepsilon a}$, $\cos \gamma = \frac{a}{\varepsilon x}$ dove $\varepsilon = \frac{1}{b}\sqrt{a^2 + b^2}$; l' angolo che il piano normale fa col piano XOZ è costante; $r = \frac{\varepsilon^2 x^2}{a}$, $r_1 = \frac{\varepsilon^2 x^2}{b}$ per cui $\frac{r}{r_1} = \frac{b}{a}$.

4. Curva $x = bt \cos t$, $y = bt \operatorname{sen} t$, $z = ct$ (*elica conica*); poste

$b^2+c^2=a^2$ le equazioni della tangente sono $c\zeta X=(cx-y\zeta)Z+y\zeta^2$, $c\zeta Y=(cy+x\zeta)Z-x\zeta^2$; piano normale $c(cx-y\zeta)X+c(cy+x\zeta)Y+c^3Z=a^2\zeta^2$;

$$r=\frac{\sqrt{(a^2c^2 \quad b^2\zeta^2)^3}}{bc\sqrt{4a^2c^4+(4b^2+c^2)c^2\zeta^2+b^2\zeta^4}},\quad r_1=\frac{4a^2c^4+(4b^2+c^2)c^2\zeta^2+b^2\zeta^4}{c^3(6c^2+\zeta^2)}.$$

5. Siano $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\zeta=\zeta(t)$ le equazioni di una curva, e X, Y, Z le coordinate dei punti di una seconda curva, tali che

$$\frac{dXdt^2}{A}=\frac{dYdt^2}{B}=\frac{dZdt^2}{C}=N,$$

N essendo una costante, e A, B, C i soliti coefficienti dell'equazione del piano osculatore della prima curva. Si dimostri che il piano osculatore e il piano normale della prima curva sono rispettivamente il piano normale e il piano osculatore della seconda, e che indicati con r, r_1 il raggio di curvatura e di torsione della prima, con R, R_1 quelli della seconda curva e con ds l'elemento lineare della prima curva, avremo

$$R=N\frac{r_1}{r}\frac{ds^2}{dt^2},\quad R_1=N\frac{ds^2}{dt^2},\quad \frac{R}{R_2}=\frac{r_1}{r}.$$

6. La condizione necessaria e sufficiente affinchè una curva sia piana è che per tutti i suoi punti sia $\Delta=0$.

(Infatti se la curva è piana, tutti i piani osculatori coincidendo col piano della curva, è $dA=0$. $dB=0$, $dC=0$ ecc.; e se $\Delta=0$, prendendo una delle x, y, ζ per variabile indipendente p. es.; la ζ, si trova che le coordinate dei punti della curva soddisfanno alla equazione $x=C_1y+C_2\zeta+C_3$ di un certo piano).

Superficie. — Piano tangente. — Normale.

39. Una equazione $f(x, y, \zeta)=0$, dove x, y, ζ possono indicare co dinate qualunque, ma che noi qui supporremo cartesiane ortogo ali, rappresenta geometricamente una superficie. Si suppone che la $=0$ definisca per tutti i punti di un campo relativo a due delle va abili, poniamo x, y, la funzione ζ di x, y, univalente finita e che

ammette derivate parziali finite; oppure più rami, della funzione z, univalenti ecc.

Consideriamo un punto $M(x, y, z)$ sulla superficie, e supponiamo che in esso non sia $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$. È facile vedere che per M possiamo far passare una infinità di curve situate sulla superficie e dotate di tangente; infatti vi sono almeno le infinite curve, piane, intersezioni, colla superficie, di un piano qualunque

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0,$$

che passa per M, dove supponiamo che A, B, C non soddisfacciano alle equazioni $\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{A} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{B} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{C}$, il che è lecito poichè non è $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$; di questi valori di A, B, C ne abbiano un numero infinito, e ognuno degli infiniti piani corrispondenti taglia la superficie lungo una curva che ammette in M la tangente, le cui equizioni sono

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(Z - z) = 0,$$

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0.$$

Dimostrata così l'esistenza di un numero infinito di curve piane passanti per M e dotate di tangente, possiamo ammettere che pel punto M passi un numero infinito di curve dotate di tangente, perchè almeno certamente vi sono quelle delle quali abbiamo ora trattato Se, dunque,

$$f(x, y, z) = 0, \qquad \varphi(x, y, z) = 0$$

sono le equazioni di una qualunque di tali curve, le equazioni della tangente nel punto M sono

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(Z - z) = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(Z - z) = 0.$$

Ma la prima di queste equazioni è indipendente da φ; cioè, qualunque sia la curva dotata di tangente e che passa per M, che si prenda a considerare, una delle equazioni della tangente è sempre

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial f}{\partial z}(Z-z)=0,$$

e perciò tutte le tangenti sono situate sopra uno stesso piano rappresentato da questa equazione. Questo piano chiamasi *piano tangente* alla superficie, nel punto M di coordinate x, y, z.

Se l'equazione della superficie ha la forma

$$z=z(x,y),$$

ove supponiamo che $z(x,y)$ sia generalmente continua ecc. avremo allora

$$\frac{\partial f}{\partial z}=1,\ \frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial z}{\partial y},$$

e l'equazione del piano tangente diviene

$$Z-z=\frac{\partial z}{\partial y}(X-x)+\frac{\partial z}{\partial y}(Y-y);$$

la quale, ponendo, secondo le notazioni di *Monge* comunemente adottate,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=q,$$

diviene

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y).$$

40. Chiamasi *normale* ad una superficie la retta che passa pel punto M perpendicolarmente al piano tangente in M.

Come si vede subito, le equazioni della normale sono

$$\frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

oppure

$$\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1},$$

ed è più comodo usare la prima oppure la seconda di queste equa-

zioni secondochè la equazione della superficie è della forma $f(x, y, z) = 0$ oppure della forma $z = z(x, y)$.

Indicando con λ, μ, ν gli angoli della normale cogli assi, avremo

$$\cos\lambda = \pm \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} = \mp \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\cos\mu = \pm \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} = \mp \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\cos\nu = \mp \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

nelle quali formole dovremo prendere contemporaneamente il segno superiore o l'inferiore, che dipenderà dalla scelta della direzione positiva della normale. Così, se scegliamo per direzione positiva della normale quella nella quale ci si deve muovere per percorrere, a partire dal piano xy, la parte di normale che rimane al disopra del piano xy, $\cos\nu$ è positivo, ed allora avremo

$$\cos\lambda = \frac{-p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \cos\mu = \frac{-q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \quad \cos\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Curvatura delle sezioni normali. — Linee di curvatura.

41. Sia M un punto d'una superficie; facciamo passare dei piani per la normale alla superficie nel punto M. Questi piani determinano sulla superficie delle curve piane che passano per M, e che si chiamano le *sezioni normali* della superficie nel punto M. Ci proponiamo di studiare la legge secondo la quale varia la curvatura, in M, di queste diverse sezioni normali.

Poniamo, a questo scopo, l'origine delle coordinate nel punto M, prendendo la normale per asse delle z e due rette ortogonali, nel piano tangente in M e passanti per M, per assi delle x e delle y.

Sia
$$z = z(x, y)$$
l'equazione della superficie riferita a questo sistema di assi.

Abbiamo allora
$$z(0,0) = 0, \quad z'_x(0,0) = 0, \quad z'_y(0,0) = 0.$$

Supponiamo che la $z(x, y)$ sia sviluppabile, in un certo intorno C del punto $x = 0$, $y = 0$, secondo la formola del Mac-Laurin:
$$z = \frac{1}{2}\left[z''_{xx}(0,0)x^2 + 2z''_{xy}(0,0)\,xy + z''_{yy}(0,0)y^2\right] + R_3$$
dove (Vedi n. 169, vol. I)
$$R_3 = \frac{1}{1.2.3}\left[z'''_{xxx}(\theta x, \theta y)x^3 + 3z'''_{xxy}(\theta x . \theta y)x^2y + \ldots\right];$$
ovvero
$$(1) \qquad z = ax^2 + bxy + cy^2 + R_3$$
avendo posto $a = \frac{1}{2}z''_{xx}(0,0)$, $b = z''_{xy}(0,0)$, $c = \frac{1}{2}z''_{yy}(0,0)$.

Tagliamo ora la superficie con un piano che passi per la normale nel punto M cioè per l'asse delle z, e la cui equazione sarà perciò $y = x \operatorname{tg} \alpha$, indicando α l'angolo diedro che esso fa col piano xz o, ciò che è lo stesso, l'angolo che la sua traccia sul piano xy fa coll'asse delle x.

Riferiamo, nel suo piano, questa curva a due assi coordinati ortogonali, cioè all'asse z ed alla traccia OX_1 del suo piano col piano xy, e, preso a considerare un suo punto N le cui coordinate x, y, z siano tali che il punto (x, y) sul piano xy appartenga all'intorno C, indichiamo con x_1 l'ascissa del punto N nel sistema di coordinate z, x_1 sul piano della curva.

Si hanno allora le relazioni $x = x_1 \cos \alpha$, $y = x_1 \operatorname{sen} \alpha$ per cui la (1) diviene
$$(\qquad z = (a \cos^2 \alpha + b \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + c \operatorname{sen}^2 \alpha)\, x_1^2 + \overline{R_3}$$
indicando $\overline{R_3}$ ciò che diviene R_3 quando per x, y si sostituiscano i

precedenti valori espressi per x_1; e, poichè N può considerarsi come un punto generico vicino al punto M, questa è l'equazione della sezione normale che consideriamo in coordinate ζ, x_1 in prossimità del punto M.

Indicando ora con R il raggio di curvatura di questa sezione normale nel punto M, avremo

$$R = \left| \frac{\left[1 + \left(\frac{d\zeta}{dx_1}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2\zeta}{dx_1^2}} \right|_{x_1 = 0},$$

intendendo colla notazione $\}\,\{_{x_1=0}$ ciò che diviene le quantità tra parentesi per $x_1 = 0$.

Ma d'altra parte si ha dalla (2)

$$\frac{d\zeta}{dx_1} = 2(a\cos^2\alpha + b\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + c\,\mathrm{sen}^2\alpha)\,x_1 + \overline{R}'_3,$$

$$\frac{d^2x}{dx_1^2} = 2(a\cos^2\alpha + b\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + c\,\mathrm{sen}^2\alpha) + \overline{R}''_3,$$

dove $\overline{R}'_3, \overline{R}''_3$ sono le derivate prima e seconda di $\overline{R}_3$ rapporto ad x_1; e quindi, osservando che $\overline{R}'_3$ ed $\overline{R}''_3$ si annullano per $x_1 = 0$, è

$$\left| \frac{\left[1 + \left(\frac{d\zeta}{dx_1}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2\zeta}{dx_1^2}} \right|_{x_1 = 0} = \frac{1}{2(a\cos^2\alpha + b\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + c\,\mathrm{sen}^2\alpha}\,,$$

ed avremo in conseguenza

$$R = \frac{1}{2(a\cos^2\alpha + b\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + c\,\mathrm{sen}^2\alpha)}\,,$$

che ci esprime il raggio di curvatura, nel punto M, di quella sezione normale che fa col piano ζx l'angolo α.

La ordinata ζ del centro di curvatura nel punto M della sezione normale essendo

$$\zeta = \frac{1}{2(a\cos^2\alpha + b\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + c\,\mathrm{sen}^2 a)}\,,$$

il centro di curvatura è al di sopra del piano xy, ossia del piano

tangente in M alla superficie, o al disotto, secondo che $2(a\cos^2\alpha + b\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + c\,\mathrm{sen}^2\alpha)$ è positivo o negativo. Converremo di dare a R il segno di ζ e prendere così

$$R = \frac{1}{2(a\cos^2\alpha + b\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + c\,\mathrm{sen}^2\alpha)},$$

ed il segno di R ci dirà allora da qual parte sia situata, rispetto al piano tangente in M, la curva che consideriamo, nelle vicinanze del punto M

42. Ai valori di α, che annullano la derivata rispetto ad α del denominatore di R, corrispondono quelle sezioni normali la cui curvatura nel punto M è massima o minima rispetto alle curvature delle altre sezioni normali vicine. La equazione che determina questi valori di α è la

$$(1) \qquad 2(c-a)\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + b(\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha) = 0$$

ossia

$$(2) \qquad b\,\mathrm{tg}^2\alpha + 2(a-c)\,\mathrm{tg}\,\alpha - b = 0,$$

che ci dà per $\mathrm{tg}\,\alpha$ due valori reali il cui prodotto è -1, cosichè, se φ indica uno dei valori di α che soddisfa alla precedente equazione, l'altro sarà $\varphi + \frac{\pi}{2}$. La derivata seconda di $\frac{1}{R}$,

$$4[(c-a)(\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha) - 2b\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha],$$

prende valori uguali e di segno contrario per $\alpha = \varphi$ e $\alpha = \varphi + \frac{\pi}{2}$, cosichè a uno di questi valori corrisponde un massimo, all'altro un minimo per la curvatura $\frac{1}{R}$. Osserviamo poi che, quando i corrispondenti valori di $\frac{1}{R}$ siano di segno contrario, quello di essi che è un minimo negativo potrebbe essere il massimo dei valori assoluti di $\frac{1}{R}$.

Queste sezioni normali corrispondenti a questi valori di α, per le quali la curvatura in M è massima e minima, chiamansi *le se-*

zioni principali, e i rispettivi raggi di curvatura, *raggi di curvatura principali* nel punto M.

Vediamo così che in ogni punto di una superficie (pel quale, ove per esso si facessero passare gli assi coordinati nel modo precedentemente indicato, fossero verificate quelle condizioni che abbiamo poste relativamente al punto M) passano due sezioni principali tra loro ortogonali.

Prendiamo ora per piani delle xz e yz i piani delle sezioni principali del punto M. La equazione (1) dovendo allora essere soddisfatta da $\alpha = 0$ e $\alpha = \frac{\pi}{2}$, occorre sia $b = 0$, cosichè il valore di R diviene

$$R = \frac{1}{2(a \cos^2 \alpha + c \operatorname{sen}^2 \alpha)}, \tag{3}$$

che ci dà i valori dei raggi di curvatura principali R_1 ed R_2 facendovi $\alpha = 0$ e $\alpha = \frac{\pi}{2}$, cosichè

$$R_1 = \frac{1}{2a}, \qquad R_2 = \frac{1}{2c}.$$

Introducendo questi valori di R_1 e R_2 nella espressione (3) di R abbiamo

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} \cos^2 \alpha + \frac{1}{R_2} \operatorname{sen}^2 \alpha.$$

Ora, poichè il secondo membro non cambia quando in luogo di α si ponga il suo supplemento, abbiamo il teorema:

Due sezioni normali egualmente inclinate sopra una sezione principale hanno raggi di curvatura uguali.

Indichiamo ora con R' il raggio di curvatura di una sezione normale perpendicolare a quella che fa l'angolo α con una delle sezioni principali; avremo

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{1}{R_2} \cos^2 \alpha$$

ed in conseguenza

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

cioè: *la somma delle curvature di due sezioni normali perpendicolari tra loro è una costante, uguale alla somma delle curvature delle sezioni principali.*

Dalla formola (3) segue che, se R_1 ed R_2 sono entrambi positivi o entrambi negativi, anche R è sempre positivo o sempre negativo, cosichè la superficie, nelle vicinanze del punto M, è tutta al disopra o tutta al disotto del piano tangente in M. Se poi R_1 ed R_2 hanno segni contrari, e poniamo sia R_2 negativo, la (3), mettendo in evidenza il segno di R_2, diviene $\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \alpha}{R_1} - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{R_2}$. Per $\alpha = 0$ si ha $R = R_1$; quando α cresce da zero fino a quel valore α pel quale $\frac{\cos^2 \alpha}{R_1} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{R_2}$ cioè pel quale $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{R_2}{R_1}$, R cresce da R_1 fino ad ∞; α crescendo ancora dal precedente valore fino a $\frac{\pi}{2}$, R diviene negativo e va da $-\infty$ a $-R_2$. Quando α cresce ancora, i valori di R si riproducono in ordine inverso. Cosichè allora la superficie è, nelle vicinanze del punto M, porzione da una parte e porzione dall'altra rispetto al piano tangente in M.

43. Il luogo geometrico di quei punti pei quali le normali, alla superficie, infinitamente vicine si incontrano consecutivamente dicesi *linea di curvatura* della superficie.

Sia $f(x, y, z) = 0$ l'equazione della superficie; le equazioni della normale nel punto di coordinate (x, y, z) sono $A = 0$, $B = 0$, dove $A = X - x + p(Z - z)$, $B = Y - y + q(Z - z)$, essendo al solito $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$; le equazioni della normale alla superficie nel punto $(x + dx, y + dy, z + dz)$ infinitamente vicino al punto (x, y, z) possiamo prenderle nella forma

$$A + dA = 0, \qquad B + dB = 0,$$

dove dA, dB indicano i differenziali totali di A, B rapporto alle variabili x, y.

La condizione affinchè i due punti appartengano ad una linea di curvatura è che le equazioni

$$A = 0, \quad B = 0, \quad A + dA = 0, \quad B + dB = 0,$$

ovvero le

$$(1) \qquad A = 0, \qquad B = 0, \qquad dA = 0, \qquad dB = 0$$

abbiano una soluzione comune in X, Y, Z.

Le due ultime equazioni essendo

$$dx + pd\zeta - dp(Z - \zeta) = 0, \; dy + qd\zeta - dq(Z - \zeta) = 0,$$

e non contenendo X, Y, affinchè siano verificate da un medesimo valore di Z dovremo avere

$$(2) \qquad \frac{dx + pd\zeta}{dp} = \frac{dy + qd\zeta}{dq};$$

e quando questa equazione sia verificata si vede subito che le (1) ammettono un sistema di soluzioni comuni in X, Y, Z. La equazione (2) esprime dunque la condizione necessaria e sufficiente affinchè i punti (x, y, ζ) e $(x + dx, y + dy, \zeta + d\zeta)$ appartengano ad una linea di curvatura.

Ma

$$d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx + \frac{\partial \zeta}{\partial y} dy = pdx + qdy,$$

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy = rdx + sdy,$$

$$dq = \frac{\partial q}{\partial x} dx + \frac{\partial q}{\partial y} dy = sdx + tdy,$$

avendo posto, seguendo le notazioni di *Monge* comunemente adoperate,

$$r = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \; s = \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \, \partial y}, \; t = \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2};$$

per cui la (2) diviene

$$(3) \qquad \frac{1 + p^2 + pq \dfrac{dy}{dx}}{r + s \dfrac{dy}{dx}} = \frac{pq + (1 + q^2) \dfrac{dy}{dx}}{s + t \dfrac{dy}{dx}}.$$

Eliminata da questa equazione la ζ mediante la equazione $f(x, y, \zeta) =$ della superficie, essa è l'equazione differenziale cui soddisfanno proiezioni, sul piano xy, delle linee di curvatura che passano per

La equazione precedente riducendosi al secondo grado in $\frac{dy}{dx}$, si vede che potremo da un punto di una superficie muoverci in due direzioni lungo linee di curvatura; ossia per ogni punto della superficie passano due linee di curvatura.

Queste direzioni coincidono con quelle delle sezioni principali. Infatti, facendo uso del sistema di assi coordinati aventi l'origine nel punto M e considerati al n. 41, avremo

$$z = ax^2 + bxy + cy^2 + R_3;$$

e, poichè per $x = 0$, $y = 0$ è

$$p = 0,\ q = 0,\ r = 2a,\ s = b,\ t = 2c,$$

la equazione dalla quale dovremo ricavare i valori di $\frac{dy}{dx}$, per $x = 0$, $y = 0$, è quindi quella che diviene la (3) quando si pongano per p, q, r... i precedenti valori, cioè la

$$\frac{1}{2a + b\frac{dy}{dx}} = \frac{\frac{dy}{dx}}{b + 2c\frac{dy}{dx}}$$

ossia

$$b\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2(a - c)\frac{dy}{dx} - b = 0;$$

la quale equazione, confrontata con la (2) n. 42, dimostra il teorema.

Quindi *per ogni punto della superficie* (nel quale la superficie ha proprietà analoghe a quelle che ha nel punto M) *passano due linee di curvatura, ortogonali tra loro, e tangenti alle sezioni principali relative a quel punto.*

44. Poniamo l'origine delle coordinate nel punto M in modo che l'asse delle z coincida colla normale in M alla curva, il piano xy col piano tangente e l'asse delle x colla tangente ad una delle sezioni principali in M. Consideriamo il punto M' infinitamente vicino ad M sulla linea di curvatura che passa per M e che è tangente a quella sezione principale.

Poichè la coordinata y non cambia quando dal punto M passiamo al punto M' è $dy = 0$; inoltre essendo $p = 0$, $q = 0$ è anche

$d\zeta = 0$, cosichè le coordinate del punto M' sono $(dx, 0, 0)$ ed inoltre è $dp = rdx$, $dq = 0$, perchè è $s = 0$ (Vedi n. 42); quindi le equazioni (1) del n. precedente diventano $X = 0$, $Y = 0$, $dx(1 - rZ) = 0$, l'ultima riducendosi a $0 = 0$.

Abbiamo dunque $Z = \frac{1}{r} = \frac{1}{2a}$, ossia $\zeta = R_1$; cioè la parte di normale in M, compresa tra il punto M e il punto in cui viene incontrata dalla normale in un punto infinitamente vicino ad M su una linea di curvatura che passa per M, è uguale al raggio di curvatura della sezione principale, che passa per M, e che è tangente a quella linea di curvatura.

Questo teorema ci permette di calcolare i raggi di curvatura principali in un punto M di coordinate x, y, ζ, l'origine delle coordinate essendo ora comunque situato.

La ordinata Z del punto d'incontro della normale in M colla normale infinitamente vicina, sopra una linea di curvatura che passa per M, soddisfa alle due equazioni (n. 43)

$$Z - \zeta = \frac{1 + p^2 + pq\frac{dy}{dx}}{r + s\frac{dy}{dx}}, \quad Z - \zeta = \frac{pq + (1 + q^2)\frac{dy}{dx}}{s + t\frac{dy}{dx}}.$$

La $\frac{dy}{dx}$, che comparisce in queste formole, è la tangente trigonometrica dell'angolo che la tangente alla proiezione della nostra linea di curvatura sul piano xy, nel punto proiezione di M, fa coll'asse delle x. Eliminando $\frac{dy}{dx}$ avremo una equazione cui soddisfanno le ordinate Z, che si riferiscono a entrambe le linee di curvatura che passano per M. Ciò facendo otteniamo

$$(1) \qquad (rt - s^2)(Z - \zeta)^2 - [(1 + p^2)t + (1 + q^2)r - 2pqs](Z - \zeta) + 1 + p^2 + q^2 = 0.$$

Ma, se R indica uno dei raggi di curvatura principali, abbiamo visto ora che

$$R = \sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - \zeta)^2},$$

essendo X, Y le coordinate di quel punto, sulla normale in M, la

cui ordinata è Z, e poichè per le equazioni della normale in M è

$$X - x = -p(Z - z), \quad Y - y = -q(Z - z)$$

avremo

$$Z - z = \frac{R}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

e la equazione (1) diviene

$$(2) \quad (rt - s^2)R^2 - [(1 + p^2)t + (1 + q^2)r - 2pqs]R\sqrt{1 + p^2 + q^2} + (1 + p^2 + q^2)^2 = 0,$$

che è la equazione le cui radici R sono i valori dei due raggi di curvatura principali.

Esempi.

1) Pel paraboloide ellittico $z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$, $(a > b > 0)$, posto $n = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$ la equazione (2) diviene

$$R^2 - \left(a + b + \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}\right)nR + abn^4 = 0,$$

dalla quale, posto $c = \frac{a + b}{2}$, ricaviamo

$$R_1 = n[c + z + \sqrt{(c + z)^2 - abn^2}],$$

$$R_2 = n[c - z - \sqrt{(c + z)^2 - abn^2}].$$

I raggi di curvatura principali essendo positivi in ogni punto della superficie, questa è, in ogni suo punto, dalla stessa parte del piano tangente in quel punto.

2) Pel paraboloide iperbolico $z = \frac{x^2}{2a} - \frac{y^2}{2b}$, $(a > b > 0)$, posto $c = \frac{a - b}{2}$, si trova analogamente

$$R_1 = n[c + z + \sqrt{(c - z)^2 + abn^2}],$$

$$R_2 = n[c + z - \sqrt{(c + z)^2 + abn^2}];$$

R_1 è sempre positivo, R_2 sempre negativo, cosichè in ogni suo punto la superficie è situata dalle due parti rispetto al piano tangente.

Quei punti, pei quali è $R_1 + R_2 = 0$, hanno la ordinata $z = -c$; sono quindi situati in un piano parallelo al piano xy, e costituiscono una curva, la cui proiezione sul piano xy, uguale alla curva stessa, è la iperbole di equazione $\frac{y^2}{2bc} - \frac{x^2}{2ac} = 1$.

Limiti di figure variabili. [1]

45. Facciamo ora alcune considerazioni che ci saranno subito utili.

Chiamiamo *figura* qualunque insieme di punti. Sia F una figura ed A un punto qualunque, d_P la distanza di A da un qualsivoglia punto P della figura; queste distanze d_P ammettono un limite inferiore d, che chiameremo *distanza* del punto A dalla figura F.

Si abbia una successione od un insieme di figure, che possiamo pensare generato dal variare di una figura, da una figura variabile. Chiameremo *limite di una figura variabile* F il luogo geometrico dei punti le cui distanze dalle figure F hanno per limite zero; vale a dire la F_1 sarà limite delle figure F se, essendo P_1 un qualsivoglia punto di F_1 ed indicando con d_P la distanza di P_1 da F, assegnato σ, esiste una determinata figura F' a partire dalla quale per le figure F, che si debbano considerare come successive ad F', si ha sempre $d_P < \sigma$.

Se x, y indicano coordinate nel piano, i punti le cui coordinate x, y soddisfanno ad una o più equazioni della forma $f(x,y) = 0$ determinano una figura; e noi sappiamo come, sotto certe condizioni, la figura definita da una di tali equazioni sia una curva, quella definita da due un gruppo di punti.

Analogamente se x, y, z indicano coordinate nello spazio, i punti le cui coordinate x, y, z soddisfanno ad una o più equazioni della forma $f(x, y, z) = 0$ determinano una figura; e, sotto certe condizioni, tale figura è una superficie, se definita da una sola equazione, ur

[1] Vedi *Peano*, Applicazioni geometriche del Calcolo infinitesimale, p gina 302 e seg.

linea se da due, un gruppo di punti se definita da tre di tali equazioni. Faremo le nostre considerazioni relativamente a figure nello spazio; le analoghe varanno, come si riconoscerà senz'altro, nel piano.

La equazione $f(x, y, z, \alpha) = 0$ determina una figura che indicheremo con $F(\alpha)$, variabile con α. Sia $f(x, y, z, \alpha)$ funzione continua e con derivate parziali pei valori delle x, y, z, α che dovremo considerare. Abbiamo allora il teorema:

Ogni punto $P(x, y, z)$ *della figura limite di* $F(\alpha)$, *quando* α *tende ad un valore* α_0, *appartiene alla figura* $F(\alpha_0)$; *ed ogni punto della figura* $F(\alpha_0)$ *appartiene alla figura limite di* $F(\alpha)$, *se in quel punto non sono contemporaneamente nulle le derivate* $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$.

Infatti, la distanza delle figure $F(\alpha)$ da un punto qualunque $P_0(x_0, y_0, z_0)$ della figura limite di $F(\alpha)$ avendo per limite zero, quando α tende ad α_0, la distanza di P_0 da qualche punto P_α di ogni $F(\alpha)$ avrà per limite zero; perchè se tale distanza da ogni punto di ogni $F(\alpha)$ si mantenesse superiore ad una certa quantità, la distanza di P_0 dalle $F(\alpha)$ non potrebbe avere per limite zero. Perciò il punto P_α ha per limite il punto P_0. Indicate con $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$ le coordinate di P_α esse hanno per limite x_0, y_0, z_0, e poichè P_α appartiene ad $F(\alpha)$ è ancora $f(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha, \alpha) = 0$. Ma essendo f funzione continua, $f(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha, \alpha)$ ha per limite, col tendere di α ad α_0, la $f(x_0, y_0, z_0, \alpha_0)$, e poichè $f(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha, \alpha)$ è costantemente nulla, quando α converge verso α_0, sarà pure nullo il suo limite; in conseguenza $f(x_0, y_0, z_0, \alpha_0) = 0$, cioè il punto P_0 appartiene alla figura $F(\alpha_0)$, e rimane così dimostrata la prima parte del teorema.

Sia ora $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto di $F(\alpha_0)$ cosichè $f(x_0, y_0, z_0, \alpha_0) = 0$, e, non essendo tutte e tre nulle le derivate $f'_x(x_0, y_0, z_0, \alpha_0)$, $f'_y(x_0, y_0, z_0, \alpha_0)$, $f'_z(x_0, y_0, z_0, \alpha_0)$, supponiamo sia diversa da zero la $f'_x(x_0, y_0, z_0, \alpha_0)$. Allora, per un noto teorema sulle funzioni implicite, poichè la equazione $f(x, y_0, z_0, \alpha) = 0$ tra le due variabili x, α, è soddisfatta da $x = x_0$, $\alpha = \alpha_0$, esiste un intorno di α_0, per tutti i punti α del quale detta equazione definisce una funzione x, continua, di α, $x = x(\alpha)$, che per $\alpha = \alpha_0$ prende il valore x_0, $x_0 = x(\alpha_0)$. Pei punti α di tale intorno sarà dunque $f[x(\alpha), y_0, z_0, \alpha] = 0$, cioè il punto $P[x(\alpha), y_0, z_0]$ appartiene alla figura $F(\alpha)$. Ma col tendere di α ad α_0, P avendo per limite P_0, la distanza PP_0 ha per limite zero. La distanza di P_0 da $F(\alpha)$ non è certamente maggiore di PP_0, perchè P è punto di $F(\alpha)$; quindi la distanza di P_0 da $F(\alpha)$ ha per limite zero, al tendere di α

ad α_0. e perciò il punto P_0 appartiene alla figura limite di $F(\alpha)$, e così rimane dimostrata la seconda parte del teorema.

Se nel punto P_0 di $F(\alpha_0)$ si annullassero tutte a tre le derivate $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, occorrerebbe un esame speciale per poter stabilire se tal punto appartenga o no al limite di $F(\alpha)$.

In modo completamente analogo si dimostrano i due seguenti teoremi:

Se la figura $F(\alpha)$ *è definita dalle due equazioni*

$$f(x, y, z, \alpha) = 0, \qquad \varphi(x, y, z, \alpha) = 0,$$

i punti limiti della figura $F(\alpha)$, *quando* α *tende ad* α_0, *appartengono alla figura* $F(\alpha_0)$; *ed ogni punto di* $F(\alpha_0)$, *nel quale non siano contemporaneamente nulli i tre determinanti della matrice*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix},$$

appartiene alla figura limite di $F(\alpha)$.

Se la figura $F(\alpha)$ *è definita dalle equazioni*

$$f(x, y, z, \alpha) = 0, \quad \varphi(x, y, z, \alpha) = 0, \quad \psi(x, y, z, \alpha) = 0,$$

i punti limiti di $F(\alpha)$, *quando* α *tende ad* α_0, *appartengono ad* $F(\alpha_0)$; *ed ogni punto di* $F(\alpha_0)$, *nel quale non sia nullo il determinante Iacobiano*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{vmatrix},$$

è un punto limite di $F(\alpha)$.

Curve inviluppi.

46. Sia $f(x, y, \alpha)$ funzione univalente finita delle quantità x, y, α e che ammetta derivata rapporto alle x, y, α. Supponendo che x, y siano coordinate di qualunque natura e α sia un parametro variabile, la equazione

$$f(x, y, \alpha) = 0 \tag{1}$$

rappresenta una famiglia di curve, di cui tutte le curve individuali hanno una proprietà comune espressa dalla equazione (1), e che si ottengono ciascuna attribuendo un particolare valore ad α.

Fissato un valore α del parametro variabile, consideriamo la curva corrispondente $f(x, y, \alpha) = 0$, e quella che corrisponde ad un altro valore $\alpha + \Delta\alpha$ del parametro, cioè la $f(x, y, \alpha + \Delta\alpha) = 0$.

Le coordinate dei punti d'incontro di queste due curve, punti che chiameremo m, sono i valori di x, y che soddisfanno a queste due equazioni; ovvero, poichè

$$f(x, y, \alpha + \Delta\alpha) = f(x, y, \alpha) + \Delta\alpha f'_\alpha(x, y, \alpha + \theta\Delta\alpha),$$

quelli che soddisfanno alle due equazioni

$$f(x, y, \alpha) = 0, \qquad f'_\alpha(x, y, \alpha + \theta\Delta\alpha) = 0. \tag{2}$$

Facendo convergere $\Delta\alpha$ a zero, questi punti m convergeranno, generalmente, verso certi punti limiti, che chiameremo punti M.

Il luogo geometrico di tutti i punti M, ottenuti attribuendo al parametro variabile tutti i valori di cui è suscettibile, chiamasi l'*inviluppo* delle curve rappresentate dalla equazione (1), che diconsi allora le curve *inviluppate*.

Un punto, le cui coordinate x, y soddisfacciano le equazioni $f(x, y, \alpha) = 0$, $f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0$ e tali che sia diverso da zero il determinante (Vedi n. 45),

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial \alpha\, \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \alpha\, \partial y} \end{vmatrix},$$

è punto limite di qualche punto m, cioè è qualche punto M. Supposto dunque Δ non nullo le equazioni

$$f(x, y, \alpha) = 0, \qquad f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0$$

determinano in funzione di α le coordinate dei punti M; eliminando α tra queste due equazioni si avrà allora la equazione dell'inviluppo.

Esempi

1) Per avere l'inviluppo delle rette rappresentate dalla equazione (x, y coordinate cartesiane ortogonali)

$$x \cos 3\alpha + y \operatorname{sen} 3\alpha = a(\cos 2\alpha)^{\frac{3}{2}}$$

si eliminerà α tra questa equazione e la

$$-x \operatorname{sen} 3\alpha + y \cos 3\alpha = -a(\cos 2\alpha)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} 2\alpha$$

ottenuta dalla prima colla derivazione rapporto al parametro α.

A tale scopo, risolvendo le precedenti equazioni rapporto ad x e y, abbiamo

$$x = a(\cos 2\alpha)^{\frac{1}{2}} (\cos 2\alpha \cos 3\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{sen} 3\alpha) = a(\cos 2\alpha)^{\frac{1}{2}} \cos \alpha,$$

$$y = a(\cos 2\alpha)^{\frac{1}{2}} (\cos 2\alpha \operatorname{sen} 3\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha \cos 3\alpha) = a(\cos 2\alpha)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \alpha,$$

che sono le coordinate dei punti dell'inviluppo espresse mediante il parametro α; dalle quali otteniamo

$$x^2 + y^2 = a^2 \cos 2\alpha, \quad x^2 - y^2 = a^2 \cos 2\alpha(\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = a^2 \cos^2 2\alpha,$$

e da queste, eliminando $\cos 2\alpha$, si ha l'equazione

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

dell'inviluppo, che è una lemniscata.

2) Si voglia l'inviluppo di tutte le rette che con due rette ortogonali formano un triangolo di area costante k.

Prese le rette ortogonali per assi coordinati, le equazioni delle rette sono $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$, dove $\alpha\beta = 2k$; cosichè tutte le rette soddisfacenti alle condizioni del problema si ottengono dalla equazione

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha}{2k} y = 1$$

attribuendo tutti i valori al parametro α. Derivando rapporto a l α

abbiamo

$$-\frac{x}{\alpha^2}+\frac{y}{2k}=0;$$

ed eliminando α tra questa e la precedente si ha l'equazione $xy=\frac{k}{2}$ dell'inviluppo, che è una iperbole avente gli assi coordinati per assintoti.

3) Inviluppo dei circoli aventi il centro sulla parabola $y^2=2px$ e passanti per il vertice della medesima.

Indicate con β, α le coordinate del centro di uno qualunque dei circoli ed r il raggio, tal circolo avrà per equazione

$$(x-\beta)^2+(y-\alpha)^2=r^2,$$

dove $\alpha^2=2p\beta$ e $r^2=\alpha^2+\beta^2$; cosichè tutti i circoli del problema saranno rappresentati dalla equazione

$$p(x^2+y^2)-\alpha^2x-2\alpha py=0.$$

Derivando rapporto ad α, si ha $\alpha x+py=0$, ed eliminando α si ottiene l'equazione dell'inviluppo

$$x^3+(p+x)y^2=0,$$

che è una cissoide di *Diocle*.

47. *La tangente in un punto* (x_0, y_0) *dell'inviluppo coincide colla tangente alla inviluppata* $f(x, y, \alpha_0)=0$ *che passa (o ad una delle inviluppate che passano) per quel punto, supposto non siano contemporaneamente nulle le* $f'_x(x_0, y_0, \alpha_0)$, $f'_y(x_0, y_0, \alpha_0)$ *e sia diversa da zero la* $f''_{\alpha\alpha}(x_0, y_0, \alpha_0)$.

Le inviluppate siano date dalla equazione

$$f(x, y, \alpha)=0,$$

dove ora supponiamo x, y rappresentino coordinate cartesiane ortogonali.

Fissiamo un punto (x_0, y_0) sull'inviluppo, rappresentato dalle due equazioni

$$f(x, y, \alpha)=0, \qquad f'_\alpha(x, y, \alpha)=0,$$

ed indichiamo con α_0 il valore di α, od uno dei valori di α, che per $x=x_0$, $y=y_0$ soddisfa contemporaneamente a queste due equazioni.

Osserviamo ora che le coordinate x, y dei punti dell'inviluppo, appartenenti a un certo intorno del punto (x_0, y_0), soddisfanno alla equazione $f(x, y, \alpha) = 0$, dove α è quella funzione di x, y, definita dalla $f'_\alpha = 0$, che per $x = x_0, y = y_0$ prende il valore α_0, supponendo che per $\alpha = \alpha_0$ sia diversa da zero la $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}$. Cosichè, per avere il valore del coefficiente angolare $\frac{dy_0}{dx_0}$ della tangente nel punto (x_0, y_0) all'inviluppo, avremo, in generale, la formola

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial f}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial f}{\partial \alpha_0} d\alpha_0 = 0;$$

ma $\frac{\partial f}{\partial \alpha_0} = f'_\alpha(x_0, y_0, \alpha_0) = 0$, quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial f}{\partial y_0} dy_0 = 0 \text{ e da questa } \frac{dy_0}{dx_0} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_0}}{\frac{\partial f}{\partial y_0}},$$

supponendo $\frac{\partial f}{\partial x_0}$, $\frac{\partial f}{\partial y_0}$ non contemporaneamente nulle.

Ora la inviluppata $f(x, y, \alpha_0) = 0$ passa pel punto (x_0, y_0), e il coefficiente angolare della sua tangente in questo punto è $-\frac{\frac{\partial f}{\partial x_0}}{\frac{\partial f}{\partial y_0}}$, valore uguale al precedente. Questa inviluppata e l'inviluppo hanno quindi nel punto (x_0, y_0) la medesima tangente, ossia, come si suol dire, l'inviluppo e la inviluppata sono tangenti, si toccano in quel punto.

48. Relativamente all'inviluppo di una famiglia di curve $f(x, y, \alpha) = 0$ si possono presentare alcune singolarità meritevoli di esame, delle quali diamo alcuni

Esempi

1) L'inviluppo può non esistere; ciò avviene, ad esempio, se le equazioni $f(x, y, \alpha) = 0$, $f(x, y, \alpha_1) = 0$, per valori di α, α_1 sufficien-

temente vicini fra loro, non sono soddisfatte da alcun sistema di valori (reali) di x, y; non esistono allora i punti m, per α_1 sufficientemente vicino ad α, e quindi non vi sono i punti limiti M, per α_1 tendente ad α. Siano, ad esempio, i circoli

$$f(x, y, \alpha) = x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\alpha y - \alpha^2 = 0.$$

Eliminando α tra questa equazione e la $f'_\alpha = 2(x + y - \alpha) = 0$, abbiamo $x^2 + y^2 + xy = 0$, equazione che rappresenta due rette immaginarie che passano pel punto reale $x = 0$, $y = 0$.

Questo punto potrebbe pure, attenendoci alla definizione data, essere considerato come l'inviluppo delle nostre linee. Ma si cominci intanto dall'osservare che ora $\Delta = 4(x - y)$ si annulla per $x = 0$, $y = 0$. Cerchiamo dunque direttamente se questo punto possa essere punto limite di punti m. Risolviamo rispetto ad x, y le equazioni

$$x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\alpha y = \alpha^2, \qquad x^2 + y^2 + 2\alpha_1 x + 2\alpha_1 y = \alpha_1^2;$$

ricaviamo da esse successivamente

$$2(\alpha - \alpha_1)(x + y) = \alpha^2 - \alpha_1^2, \qquad x + y = \frac{\alpha + \alpha_1}{2},$$

$$x^2 + y^2 + \alpha\alpha_1 = 0, \qquad xy = \frac{(\alpha + \alpha_1)^2 + 4\alpha\alpha_1}{8};$$

i valori cercati di x, y sono adunque

$$\frac{\alpha + \alpha_1 \pm \sqrt{-(\alpha + \alpha_1)^2 - 8\alpha\alpha_1}}{4}$$

che sono certamente complessi se α, α_1 sono dello stesso segno.

Il punto $x = 0$, $y = 0$ non può dunque essere limite di punti m. Nel nostro caso non vi è dunque certamente inviluppo.

2) Si considerino le curve

$$f = \varphi(x, y) + \alpha\psi(x, y) = 0,$$

dove φ, ψ sono funzioni univalenti con derivate parziali. La $f'_\alpha = \psi(x, y)$ non contiene più α; cosichè le $f = 0$, $f'_\alpha = 0$ si riducono nel nostro caso a $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$.

Qui abbiamo $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = 0$, $\Delta = \begin{vmatrix} \varphi'_x + \alpha\psi'_x & \varphi'_y + \alpha\psi'_y \\ \psi'_x & \psi'_y \end{vmatrix} = 0$. I punti d' incontro delle curve $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$ possiamo anche considerarli, dietro la data definizione, come l' inviluppo delle nostre curve, perchè tutte le curve del fascio $f = 0$ passano per quei punti (punti base del fascio). Si intende che qui non ha più significato il ricercare se l' inviluppo sia o no tangente alle curve del fascio.

3) Per le parabole semicubiche

$$f = (x - \alpha)^2 - y^3 = 0,$$

abbiamo $f'_\alpha = -2(x - \alpha)$, $\Delta = -6y$; il risultato dell' eliminazione di α tra $f = 0$, $f'_\alpha = 0$ è $y = 0$. Per $y = 0$ essendo $\Delta = 0$, cerchiamo di riconoscere direttamente se $y = 0$ sia o no l' inviluppo delle nostre curve.

Due di tali curve

$$(x - \alpha)^2 - y^3 = 0, \qquad (x - \alpha_1)^2 - y^3 = 0$$

si incontrano nel punto $x = \frac{\alpha - \alpha_1}{2}$, $y = \left(\frac{\alpha_1 - \alpha}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$, che, quando α_1 converge verso α, ha per limite il punto $x = \alpha$, $y = 0$. In conseguenza l' asse delle x, $y = 0$, è propriamente l' inviluppo delle nostre curve. Qui l'inviluppo non è tangente alle inviluppate, perchè, come si verifica subito. ciascuna curva ha un punto di regresso nel punto $x = \alpha$, $y = 0$ e la tangente nei regressi è perpendicolare all'asse delle x; l' inviluppo $y = 0$ è il luogo geometrico di questi punti di regresso. Si noti che per $x = \alpha$, $y = 0$, è $f'_x = 2(x - \alpha) = 0$, $f'_y = 3y^2 = 0$, cosichè non sono soddisfatte le condizioni dell' enunciato del teorema al n. 47.

4) Per le parabole cubiche

$$f = y - (x - \alpha)^3 = 0$$

abbiamo $f'_\alpha = 3(x - \alpha)^2$, $\Delta = -6(x - \alpha)$. Eliminando α tra $f'_\alpha = 3(x - \alpha)^2 = 0$ ed $f = 0$ abbiamo $y = 0$. Anche qui è $\Delta = 0$, perchè $f'_\alpha = 0$ ci dà $x = \alpha$. Ma ora $y = 0$ non è l' inviluppo delle nostre curve; tale inviluppo non esiste, perchè due delle nostre curve $y - (x - \alpha)^3 = 0$, $y - (x - \alpha_1)^3 = 0$ non si tagliano in alcun punto reale. Qui la $y = 0$ tocca tutte le curve nel punto $x = \alpha$, $y = 0$

5) Eliminando α tra

$$f=(\alpha+y^2)^2+y(x+y)=0, \qquad f'_\alpha=2(\alpha+y^2)=0$$

otteniamo $y(x+y)=0$, che rappresenta le due rette $x+y=0, y=0$. Essendo $\Delta=4y$ la retta $x+y=0$ è inviluppo delle nostre curve; le curve inviluppate corrispondono a soli valori negativi di α. Qui ha luogo il teorema del n. 47, essendo verificate tutte le condizioni sufficienti perchè abbia luogo; si verifica facilmente infatti che le curve $f=0$, nel punto $y=\pm\sqrt{-\alpha}$, $x=-y=\mp\sqrt{-\alpha}$ hanno per tangente la retta $x+y=0$.

In quanto alla retta $y=0$ essa non fa certamente parte dell'inviluppo, perchè per $y=0$. qualunque sia x, non può essere soddisfatta la $f=0$, eccettuato per il caso particolare $\alpha=0$.

6) Eliminando α tra

$$f=(\alpha+y)^2+yx^2=0$$

e $f'_\alpha=2(\alpha+y)=0$, otteniamo $yx^2=0$, che rappresenta le rette $x=0, y=0$. Qui $\Delta=4xy$ si annulla per ciascuna di queste rette. I valori di x, y che soddisfanno alle due equazioni $(\alpha+y)^2+yx^2=0$, $(\alpha_1-y)^2+yx^2=0$ sono $y=-\frac{\alpha+\alpha_1}{2}$, $x=\pm\frac{\alpha-\alpha_1}{\sqrt{2(\alpha+\alpha_1)}}$, che per α_1 tendente ad un valore positivo α, hanno per limite $y=-\alpha$, $x=0$; per α_1 tendente ad un valore negativo α il valore di x finisce per divenire immaginario. Si vede dunque che la sola parte negativa dell'asse delle y è l'inviluppo delle nostre curve.

Quelle che corrispondono a valori positivi di α hanno, come facilmente si trova, un punto doppio nel punto $y=-\alpha$, $x=0$; l'inviluppo è il luogo geometrico di questi punti doppi; ma l'inviluppo non tocca le inviluppate, perche le tangenti nel punto doppio $x=0$, $y=-\alpha$ della inviluppata fanno coll'asse delle x angoli le cui tangenti sono $\pm\sqrt{\alpha}$, e nessuna di esse coincide perciò coll'asse delle y, $x=0$.

7) Per poter applicare con sicurezza la regola contenuta nel n. 46 per la determinazione dell'inviluppo delle curve $f(x, y, \alpha)=0$ bisogna prima di tutto che la funzione f sia una funzione univalente; altrimenti si potrebbero ottenere risultati erronei, o privi di significato. Così non si arriva ad alcun risultato se si vuole adoperare tale regola

per determinare l' inviluppo dei circoli

$$y - \sqrt{a^2 - x^2} - \alpha = 0;$$

la $f'_\alpha = 0$ sarebbe qui la $-1 = 0$. Se si riduce invece l' equazione dei circoli alla forma

$$(y - \alpha)^2 + x^2 = a^2,$$

applicando la regola del n. 46 otteniamo subito l'inviluppo $x^2 - a^2 = 0$, che è così composto delle due rette $x = a$, $x = -a$.

8) Diamo in ultimo un esempio per verificare come per ogni punto dell' inviluppo possano passare più inviluppate. Siano le rette rappresentate dalla equazione

$$(1) \qquad 2\alpha^3 Y + 3\alpha^2 X + 1 = 0.$$

Eliminando α tra questa equazione e la $6\alpha(\alpha Y + X) = 0$ ossia $\alpha Y + X = 0$ (escludiamo il valore $\alpha = 0$, cui corrisponde la retta all' infinito del piano) si ottiene la equazione dell' inviluppo $X^3 + Y^2 = 0$ (parabola semicubica).

Per ogni punto (x, y) del piano passano tre rette del sistema, oppure due, oppure una, secondochè $x^3 + y^2 < 0$, oppure $x^3 + y^2 = 0$, oppure $x^3 + y^2 > 0$; cosichè l'inviluppo è il limite comune alle due regioni del piano, per ciascun punto delle quali passano tre o una retta del sistema. Pei punti (x, y) dell'inviluppo due delle radici α che soddisfanno alla equazione (1) sono uguali, come appunto deve essere, poichè pei punti dell'inviluppo α è radice comune alle equazioni $f(x, y, \alpha) = 0$, $f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0$. Per ogni punto dell'inviluppo, ossia per ogni punto ($X = -y^{\frac{2}{3}}$, $Y = y$, y quantità qualunque), passano le due rette corrispondenti ai valori $\alpha = y^{-\frac{1}{3}}$ (radice doppia della (1) quando in essa si faccia $Y = y$, $X = -y^{\frac{2}{3}}$) e ad $\alpha = -\frac{1}{2} y^{-\frac{1}{3}}$. La prima retta, cioè la $\frac{2Y}{y} + \frac{3X}{y^{\frac{2}{3}}} + 1 = 0$, è, come subito si verifica, la tangente all'inviluppo nel punto $(-y^{\frac{2}{3}}, y)$. La seconda retta $-y^{-1}Y + 3y^{-\frac{2}{3}}X + 4 = 0$ taglia l' inviluppo in quel punto e lo tocca nel punto la cui ascissa è $-4y^{\frac{2}{3}}$ e la cui ordinata è $-8y$, come si verifica cercando i a-

lori di X, Y che soddisfanno alla precedente equazione della retta e a quella $X^3 + Y^2 = 0$ dell' inviluppo, nel cercare i quali valori giova tener presente che la retta passa pel punto $X = -y^{\frac{2}{3}}$, $Y = y$ dell' inviluppo.

Superficie inviluppi.

49. Diamo un cenno di queste superficie.

Indicando x, y, z coordinate, di qualunque natura, dei punti dello spazio, e α un parametro variabile. l' equazione

$$f(x, y, z, \alpha) = 0$$

rappresenta una famiglia di superficie, a ciascun valore di α corrispondendo una superficie individuale. Supporremo che la funzione f soddisfaccia alle stesse condizioni della analoga funzione f del n. 46.

Fissato un valore α del parametro, si prenda un altro valore α_1 di questo, e supposto che le due superficie $f(x, y, z, \alpha) = 0$, $f(x, y, z, \alpha_1) = 0$ si taglino lungo una certa curva, facciamo convergere α_1 verso α; supponiamo allora che questa curva abbia per limite una certa curva, che apparterrà alla superficie $f(x, y, z, \alpha) = 0$. Sopra ciascuna delle superficie della famiglia si troverà, generalmente, una di queste curve, ed il luogo geometrico di tutte queste curve sarà una superficie che dicesi la superficie *inviluppo* delle superficie (1), le quali, considerate in rapporto al loro inviluppo, diconsi le *inviluppate*.

Con ragionamento analogo a quello pel problema dell' inviluppo di curve piane, si trova che la equazione della superficie inviluppo si ottiene eliminando α tra le due equazioni

$$f(x, y, z, \alpha) = 0, \qquad f'_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0,$$

supponendo che tutti i determinanti della matrice

$$(1) \qquad \left\| \begin{matrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ f''_{\alpha x} & f''_{\alpha y} & f''_{\alpha z} \end{matrix} \right\|$$

non siano contemporaneamente nulli.

La curva, variabile con α, rappresentata dalle precedenti due equazioni. chiamasi la *caratteristica dell' inviluppo*.

Sotto condizioni analoghe a quelle del n. 47 si vedrebbe facilmente che la superficie inviluppo lungo le caratteristiche tocca le inviluppate.

Esempi

1) L' inviluppo dei piani, le cui equazioni in coordinate cartesiane sono

$$z = \alpha x + \varphi(\alpha) y + \psi(\alpha), \tag{2}$$

si ottiene eliminando α tra questa equazione e la

$$0 = x + \varphi'(\alpha) y + \psi'(\alpha). \tag{3}$$

Questa superficie, inviluppo di un piano mobile, le cui diverse posizioni dipendono dai valori di un parametro variabile, chiamasi *superficie sviluppabile.*

Esistono infinite superficie sviluppabili, poichè infinite sono le funzioni $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ che compariscono nella equazione del piano inviluppato; ma, come ora vedremo, tutte le superficie sviluppabili soddisfanno ad una comune equazione, che ora andiamo a determinare.

Possiamo ritenere la equazione della superficie sviluppabile sia la (2), dove intendiamo che α sia la funzione di x, y definita dalla (3). Derivando allora la (2) rapporto a x abbiamo

$$p = \alpha + x \frac{\partial \alpha}{\partial x} + [\varphi'(\alpha) y + \psi'(\alpha)] \frac{\partial \alpha}{\partial x},$$

ossia, in virtù della (3), $p = \alpha$. Derivando la (2) rapporto ad y otteniamo, in modo analogo, $q = \varphi(\alpha)$; cosichè $q = \varphi(p)$. Derivando ora questa ultima equazione rapporto ad x e ad y otteniamo rispettivamente $s = \varphi'(p) r$, $t = \varphi'(p) s$ e da queste

$$rt - s^2 = 0, \text{ ossia } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0,$$

la quale, non contenendo più le funzioni φ e ψ che individuano ciascuna superficie sviluppabile, è quella equazione, colle derivate parziali di secondo ordine, cui soddisfa la ordinata z di qualunque superficie sviluppabile in qualunque punto di essa. Questa equazione chiamasi perciò la *equazione a derivate parziali delle superficie sviluppabi*

2) Si voglia l' inviluppo delle sfere che hanno il loro centro sop una data parabola e che passano pel vertice della parabola stessa.

Si prenda per piano xy il piano della parabola, e si pongano gli assi delle x e delle y in modo che la equazione della parabola sia $x^2 = 2py$. L'equazione di una sfera che soddisfa alle condizioni del problema è

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 = \alpha^2 + \beta^2 \text{ ossia } x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0,$$

dove $\alpha^2 = 2p\beta$, e quindi anche

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - \frac{\alpha^2}{p} y = 0.$$

Eliminando α tra questa equazione e la

$$-x - \frac{\alpha}{p} y = 0$$

si trova l'equazione

$$y(x^2 + y^2 + z^2) + px^2 = 0$$

della superficie inviluppo richiesta.

3) Siano le superficie

$$f = (x-\alpha)^3 + xyz = 0.$$

L'eliminazione di α tra $f = 0$, $f'_\alpha = -3(x-\alpha)^2 = 0$ ci dà $xyz = 0$, che si scinde nelle tre equazioni $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Il piano $x = 0$ non può certamente far parte dell'inviluppo, perchè per $x = 0$ le due equazioni $f = 0$, $f'_\alpha = 0$ non sono soddisfatte altro che se $\alpha = 0$. Rimangono così da considerare i piani $y = 0$, $z = 0$. La matrice (1) quì è

$$\left\| \begin{matrix} 3(x-\alpha)^2 + yz & xz & xy \\ -6(x-\alpha) & 0 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

i cui tre determinanti sono $6(x-\alpha)xz$, $6(x-\alpha)xy$, 0.

Per $y = 0$, giacchè dobbiamo contemporaneamente porre $x = \alpha$, poichè i punti del presunto inviluppo debbono soddisfare alle $f = 0$, $f'_\alpha = 0$, si annullano ad un tempo i tre determinanti precedenti; e lo stesso avviene per $z = 0$. Esaminiamo dunque direttamente ciò che avviene nel nostro caso.

Le due equazioni

$$(x-\alpha)^3 + xyz = 0, \qquad (x-\alpha_1)^3 + xyz = 0$$

non possono essere soddisfatte da alcun sistema di valori reali per x, y, z; non può dunque nemmeno esistere l'inviluppo.

Si noti che qui i piani $y=0$, $z=0$ sono tangenti a tutte le nostre superficie, perchè, come subito si riconosce, l'equazione del piano tangente ad esse, nel punto $y=0$, $x=\alpha$, z qualunque, è $Y=0$, e nel punto $z=0$, $x=\alpha$, y qualunque è $Z=0$.

4) Per le superficie

$$f=(x-\alpha)^2+x^3y^3z^3=0,$$

la eliminazione di α tra $f=0$, $f'_\alpha=-2(x-\alpha)=0$ dà $x^3y^3z^3=0$, che si scinde nelle $x=0$, $y=0$, $z=0$.

L'inviluppo potrà, anche ora, essere solamente composto dai due piani $y=0$, $z=0$; e i determinanti della matrice (1) essendo $6x^3y^2z^3$, $6x^3y^3z^2$, 0, essi si annullano tutti sia per $y=0$ come per $z=0$.

Osserviamo però che le superficie

$$(x-\alpha)^2+x^3y^3z^3=0, \quad (x-\alpha_1)^2+x^3y^3z^3=0$$

si tagliano lungo la curva $x=\frac{\alpha+\alpha_1}{2}$, $\left(\frac{\alpha-\alpha_1}{2}\right)^2+\left(\frac{\alpha+\alpha_1}{2}\right)^3y^3z^3=0$, che ha per limite, quando α_1 tende ad α, la curva $x=\alpha$, $y^3z^3=0$, cioè $x=\alpha$, $y=0$; $x=\alpha$, $z=0$. I piani $y=0$, $z=0$ sono perciò l'inviluppo delle nostre superficie.

Se poi si osserva che, nei punti $x=\alpha$, $y=0$, z qualunque, e nei punti $x=\alpha$, y qualunque, $z=0$ le nostre superficie hanno singolarità relativamente al piano tangente, perchè in detti punti sono nulle ad un tempo le f'_x, f'_y, f'_z, si vede che nel nostro caso l'inviluppo non è tangente alle superficie inviluppate.

50. Le superficie danno luogo ad un altro genere di superficie inviluppi. Sia la equazione

$$f(x,y,z,\alpha,\beta)=0$$

dove x,y,z sono coordinate qualunque, e α,β due parametri variabili, e si supponga che la funzione f soddisfaccia a condizioni analoghe a quelle poste per la funzione f del numero precedente. Questa equazione rappresenta un insieme di superficie, del quale ciascuna superficie si ottiene attribuendo speciali valori ad α e β. Di superficie

(1) $\quad f(x,y,z,\alpha,\beta)=0, \qquad f(x,y,z,\alpha+\Delta\alpha,\beta+\Delta\beta)=0$

si incontreranno, generalmente, secondo una linea, la quale, quando $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ tendano comunque a zero, non ha per limite una linea, come ora vedremo, ma un gruppo discreto di punti; il qual gruppo avrà perciò la proprietà che le distanze dei suoi punti dalla curva intersezione delle (1) avranno per limite zero, quando $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ tendono comunque a zero.

Invero, le coordinate dei punti limiti, per $\Delta\alpha$ tendente a zero, della intersezione delle due superficie

$$f(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \quad f(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha, \beta) = 0,$$

supposto che i determinanti della matrice

$$(2) \qquad \left\| \begin{matrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ f''_{x\alpha} & f''_{y\alpha} & f''_{z\alpha} \end{matrix} \right\|$$

non siano nulli ad un tempo, debbono soddisfare alla equazione $f'_\alpha = 0$.

Analogamente le coordinate dei punti limiti, per $\Delta\beta$ tendente a zero, della intersezione delle due superficie

$$f(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \quad f(x, y, z, \alpha, \beta + \Delta\beta) = 0,$$

supposto che i determinanti della matrice

$$(3) \qquad \left\| \begin{matrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ f''_{x\beta} & f''_{y\beta} & f''_{z\beta} \end{matrix} \right\|$$

non siano nulli ad un tempo, debbono soddisfare alla equazione $f'_\beta = 0$.

In conseguenza le coordinate dei punti limiti, quando $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ tendano comunque a zero, della intersezione delle superficie (1), supposte soddisfatte le precedenti condizioni relativamente alle matrici (2), (3), soddisfanno, oltre che alla $f = 0$, anche alle equazioni $f'_\alpha = 0$, $f'_\beta = 0$.

Il luogo geometrico di questi punti chiamasi l'*inviluppo* delle superficie date; se ne ottiene la equazione eliminando α, β tra le $f = 0$, $f'_\alpha = 0$, $f'_\beta = 0$.

Sotto condizioni analoghe a quelle del n. 47 si riconoscerebbe facilmente anche qui che l'inviluppo è tangente alle superficie inviluppate.

Esempi

1 Inviluppo dei piani pei quali è una costante k la somma dei se menti che determinano sopra i tre spigoli di un angolo triedro tri ettangolo.

Prese le faccie dell' angolo triedro per piani coordinati di un sistema cartesiano, indicati con α, β i segmenti determinati sugli assi delle x e delle y, le equazioni dei piani sono

$$(3) \qquad \frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{k-\alpha-\beta}=1,$$

cosichè il loro inviluppo si ottiene eliminando α, β tra questa equazione e le

$$-\frac{x}{\alpha^2}+\frac{z}{(k-\alpha-\beta)^2}=0, \qquad -\frac{y}{\beta^2}+\frac{z}{(k-\alpha-\beta)^2}=0.$$

Queste danno

$$\frac{\sqrt{x}}{\alpha}=\frac{\sqrt{y}}{\beta}=\frac{\sqrt{z}}{k-\alpha-\beta}=\mu \text{ e } \mu=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{k},$$

per cui

$$\frac{x}{\alpha}=\mu\sqrt{x}, \qquad \frac{y}{\beta}=\mu\sqrt{y}, \qquad \frac{z}{k-\alpha-\beta}=\mu\sqrt{z};$$

i quali valori sostituiti nella (3) danno

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2=k,$$

che è la equazione dal richiesto inviluppo.

2) Inviluppo delle sfere, i cui centri sono sopra un ellissoide, e che passano pel centro dell' ellissoide.

Sia $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ l' equazione dell' ellissoide.

Le equazioni delle sfere sono

$$(4) \qquad f=x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z=0,$$

dove γ è espresso mediante α, β dalla relazione

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}=1.$$

Cosichè abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}=-2x-2z\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}=-2x+2z\frac{\alpha c^2}{\gamma a^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial \beta}=-2y-2z\frac{\partial \gamma}{\partial \beta}=-2y+2z\frac{\beta c^2}{\gamma b^2},$$

le quali, uguagliate a zero, danno

$$\frac{a^2x}{\alpha}=\frac{b^2y}{\beta}=\frac{c^2z}{\gamma}=\mu,\ \text{ossia}\ \frac{\alpha x}{\frac{\alpha^2}{a^2}}=\frac{\beta y}{\frac{\beta^2}{b^2}}=\frac{\gamma z}{\frac{\gamma^2}{c^2}}=\mu,\ \text{e}$$

$$\mu=\frac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}}=\frac{x^2+y^2+z^2}{2};\ \text{per cui}\ \alpha x=\frac{a^2x^2}{\mu},$$

$\beta y=\frac{b^2y^2}{\mu}$, $\gamma z=\frac{c^2z^2}{\mu}$, i quali valori, sostituiti nella (4), la riducono alla

$$(x^2+y^2+z^2)^2-4(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)=0,$$

che è l'equazione del richiesto inviluppo.

3) Eliminando α, β tra le equazioni

$$f=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-z^3=0$$

e $f'_\alpha=-2(x-\alpha)=0$, $f'_\beta=-2(y-\beta)=0$, otteniamo $z=0$.

I determinanti della matrice (2) essendo ora $4(y-\beta)$, $-6z^2$, 0, e quelli della matrice (3) essendo $-4(x-\alpha)$, $-6z^2$, 0, essi tutti sono nulli per $z=0$, $x=\alpha$, $y=\beta$. Osservando però che pei punti d'intersezione delle superficie

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-z^3=0,\qquad (x-\alpha_1)^2+(y-\beta)^2-z^3=0$$

abbiamo $x=\frac{\alpha+\alpha_1}{2}$, $\left(\frac{\alpha-\alpha_1}{2}\right)^2+(y-\beta)^2-z^3=0$; e per quelli d'intersezione delle superficie

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-z^3=0,\qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta_1)^2-z^3=0$$

abbiamo $y=\frac{\beta+\beta_1}{2}$, $\left(\frac{\beta-\beta_1}{2}\right)^2+(x-\alpha)^2-z^3=0$, si vede che, quando α_1 tende ad α e β_1 a β, tali equazioni ci danno $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=0$. Perciò il piano $z=0$ è l'inviluppo delle nostre superficie.

Si riconosce subito che l'inviluppo qui non è tangente alle inviluppate, perchè queste hanno singolarità relativamente al piano tangente nel punto $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=0$.

4) Eliminando α, β tra

$$f=(x-\alpha)^3+(y-\beta)^3-z=0$$

e le $f'_\alpha=-3(x-\alpha)^2=0$, $f'_\beta=-3(y-\beta)^2=0$ otteniamo $z=0$. Anche qui sono nulli tutti i determinanti delle matrici (2), (3) per

$z = 0$, $x = \alpha$, $y = \beta$. Ma quì non si ha inviluppo, perchè le superficie

$$(x-\alpha)^3 + (y-\beta)^3 - z = 0, \qquad (x-\alpha_1)^3 + (y-\beta)^3 - z = 0,$$

e le superficie

$$(x-\alpha)^3 + (y-\beta)^3 - z = 0, \qquad (x-\alpha)^3 + (y-\beta_1)^3 - z = 0$$

non hanno intersezione reale.

Si osservi invece che il piano $z = 0$ tocca tutte le nostre superficie nei punti $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = 0$.

Esercizi

1. La sviluppata di una curva è l' inviluppo delle normali alla curva stessa.

2. Se le coordinate x, y dei punti d' una curva sono date mediante la variabile t dalle equazioni

$$(a) \begin{cases} x = \varphi(t, \alpha) \\ y = \psi(t, \alpha) \end{cases} \quad \text{o più generalmente } (b) \begin{cases} \varphi(x, y, t, \alpha) = 0 \\ \psi(x, y, t, \alpha) = 0, \end{cases}$$

l' inviluppo delle curve ottenute facendo variare α si ottiene eliminando t e α tra la equazione

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = 0$$

e tra le (a), o tra le (b).

Così l' inviluppo delle curve

$$x - \alpha - 2\sqrt{m\alpha}\cos t = 0, \qquad y - 2\sqrt{m\alpha}\,\mathrm{sen}\, t = 0$$

è la parabola $y^2 = 4m(x+m)$.

3. L' inviluppo delle ellissi concentriche di cui gli assi hanno la stessa direzione e per somma una costante $2k$, è la astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}$, avendo riferito le ellissi ai loro assi come assi coordinati.

La stessa curva è l' inviluppo di tutte le rette, per le quali la parte intercetta dagli assi coordinati è uguale a k.

4. Data la ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, si prendano le estremità delle ascisse come centro, e le corrispondenti ordinate della ellisse come raggio: si descrivano circoli; l'inviluppo di essi è la ellisse $\frac{x^2}{a^2+b^2} + \frac{y^2}{b^2} =$.

Si ha un risultato analogo per la iperbole.

5. Data l'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, l'inviluppo dei circoli aventi il centro sull'ellisse e che passano pel centro dell'ellisse, è la curva $(x^2+y^2)^2=4(a^2x^2+b^2y^2)$. Si ha un risultato analogo per la iperbole.

6. L'inviluppo delle ellissi $\left(\frac{x-\alpha}{h}\right)^2+\left(\frac{y-\beta}{k}\right)^2=1$, dove tra i parametri variabili α, β passa la relazione $\frac{\alpha^2}{h^2}+\frac{\beta^2}{k^2}=1$, è l'ellisse $\frac{x^2}{4h^2}+\frac{y^2}{4k^2}=1$.

7. Sopra ciascun raggio vettore di una curva $\rho=\psi(\theta)$ si prenda una parte uguale a $n\rho$ (n numero positivo qualunque) e su essa come diametro si descriva un circolo. L'equazione $f(R, \varphi)=0$ dell'inviluppo di questi circoli si ottiene eliminando θ tra la equazione $R=n\psi(\theta)\cos(\varphi-\theta)$ e la derivata di questa rapporto a θ, indicando R, φ le coordinate correnti dell'inviluppo.

Si applichi questo procedimento quando la curva data è un circolo col centro sull'asse polare e che passa pel polo. Si trova che l'inviluppo è una cardioide.

8. L'inviluppo delle curve

$$f(x, y, \alpha)=a_0\alpha^n+n\,a_1\,\alpha^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}\,a_2\alpha^{n-2}$$
$$+\frac{n(n-1)\,(n-2)}{1.2.3}\,a_3\alpha^{n-3}+\ldots+a_{n-1}\,\alpha+a_n=0,$$

dove $a_0, a_1 \ldots a_n$ indicano funzioni univalenti delle coordinate qualsivogliano x, y, è il discriminante uguagliato a zero della $f(x, y, \alpha)$ rispetto ad α

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2\ldots & a_{n-1} & a_n & 0 & 0\ldots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1\ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0\ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_n \\ a_0 & a_1 & a_2\ldots & a_{n-1} & 0 & 0 & 0\ldots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1\ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & 0 & 0\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0\ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} \end{vmatrix}=0$$

Così in particolare per $n=2$, $n=3$, $n=4$ gli inviluppi sono rispettivamente

$$a_0a_2 - a_1^2 = 0,\quad a_0^2a_3^2 + 4a_0a_2^3 + 4a_1^3a_3 - 6a_0a_1a_2a_3 - 3a_1^2a_2^2 = 0,$$

$$(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2)^3 - 27(a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3)^2 = 0.$$

9. L'inviluppo delle curve

$$(A\alpha)^m + (B\beta)^m + C^m = 0,$$

i parametri variabili α,β essendo legati dalla relazione $(a\alpha)^n + (b\beta)^n + c^n = 0$ e dove A, B, C, a, b, c sono funzioni di qualsivogliano coordinate ed m, n numeri qualunque, è

$$\left(\frac{a}{A}\right)^{\frac{mn}{m-n}} + \left(\frac{b}{B}\right)^{\frac{mn}{m-n}} + \left(\frac{c}{C}\right)^{\frac{mn}{m-n}} = 0.$$

10. L'inviluppo delle curve $A\cos^m\theta + B\,\mathrm{sen}^m\theta = C$, dove A, B, C sono funzioni delle coordinate e θ è il parametro variabile, è la curva $A^{\frac{2}{2-m}} + B^{\frac{2}{2-m}} = C^{\frac{2}{2-m}}$.

11. L'inviluppo delle curve

$$A\cos 2\theta + B\,\mathrm{sen}\,2\theta + C\cos\theta + D\,\mathrm{sen}\,\theta + E = 0,$$

dove $A, B, \ldots \theta$ hanno i significati precedenti, è la curva

$$[12(A^2 + B^2) - 3(C^2 + D^2) + 4E^2]^3$$
$$= [72(A^2 + B^2)E + 9(C^2 + D^2)E - 27A(C^2 - D^2) - 54BCD - 8E^3]^2.$$

(Si ponga $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\theta = \alpha$ e si prenda α come nuovo parametro variabile; il problema si riduce così ad un caso dell'esercizio 8).

12. Se riguardiamo le rette uscenti da un punto e situate in un piano come altrettanti raggi luminosi che si riflettano incontrando una data curva situata sul piano, l'inviluppo dei raggi riflessi dicesi *caustica per riflessione* della curva rispetto a quel punto luminoso.

Sia $\varphi(x, y) = 0$ l'equazione della curva; indichiamo con $T = 0$, $N = 0$ le equazioni della tangente e della normale in un punto $(x\ y)$ di essa; allora la equazione della caustica si otterrà eliminando $x\ y$ tra le equazioni $\varphi(x, y) = 0$, $T_1 N + N_1 T = 0$, e quella ottenuta differenziando quest'ultima rapporto ad x, y, avendo indicato con T_1, N_1

ciò che divengono T, N quando in luogo delle coordinate correnti si sostituiscono le coordinate del punto luminoso. Se i raggi luminosi incidenti sono paralleli e fanno coll'asse delle x un angolo la cui tangente trigonometrica sia a (punto luminoso all'infinito), la equazione della caustica si ottiene eliminando x, y tra la equazione della curva, la

$$Y - y - \frac{dy}{dx}(X - x) - \frac{\frac{dy}{dx} - a}{a\frac{dy}{dx} + 1}\left[\frac{dy}{dx}(Y - y) + X - x\right] = 0$$

e quella che si ottiene da questa derivandola rapporto ad x.

Si applichi la teoria alla determinazione della caustica del circolo $x^2 + y^2 = r^2$, quando il punto luminoso abbia per coordinate $x = a$, $y = b$, e quando i raggi luminosi siano paralleli all'asse delle x. Nel primo caso la caustica è la curva

$$\{4(a^2 + b^2)(X^2 + Y^2) - r^2[(X + a)^2 + (Y + b)^2]\}^3$$
$$= 27(bX - aY)^2 (X^2 + Y^2 - a^2 - b^2)^2,$$

e nel secondo

$$X = \frac{1}{2}\sqrt{r^{\frac{3}{2}} - Y^{\frac{3}{2}}}\left[r^{\frac{2}{3}} + 2Y^{\frac{2}{3}}\right]$$

(Giova porre $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$.).

13. Superficie $xy\zeta = k^3$; piano tangente $\frac{X}{3x} + \frac{Y}{3y} + \frac{Z}{3\zeta} = 1$;

$R_1 + R_2 = \frac{2}{3}\,\frac{x^2 + y^2 + \zeta^2}{N}$, $\quad R_1R_2 = \frac{c^6}{3N^4}$ dove

$$\frac{1}{N} = \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{\zeta^2}}.$$

14. Superficie $y = x\,\mathrm{tg}\,\frac{\zeta}{c}$ (*elicoide gobbo a piano direttore*); piano tangente $cyX - cxY + (x^2 + y^2)Z = (x^2 + y^2)\zeta$; $R_1 + R_2 = 0$.

15. Per l'ellissoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1$ l'equazione che determina i

raggi di curvatura principali si riduce a

$$R^2 - (a^2 + b^2 + c^2 - x^2 - y^2 - z^2)\frac{R}{n} + \frac{a^2b^2c^2}{n^4} = 0.$$

dove n indica la lunghezza della perpendicolare abbassata dal centro sul piano tangente nel punto (x, y, z) che si considera.

16. L' inviluppo dei piani

$$x - y \cot \alpha - z \cot(a - \alpha) = 0,$$

dove a è una costante e α il parametro variabile, è il cono ellittico $[x \operatorname{sen} a - (y + z) \cos a]^2 = 4yz$.

17. L' inviluppo delle sfere di raggio R e i cui centri sono sul circolo $x^2 + y^2 = r^2$ è il *toro*

$$(x^2 + y^2 + z^2 + r^2 - R^2)^2 = 4r^2(x^2 + y^2) \text{ ossia } (r \pm \sqrt{x^2 + y^2})^2 = R^2 - z^2.$$

(Giova esprimere le coordinate del circolo mediante un angolo φ).

18. L' inviluppo dei piani distanti dall' origine delle coordinate di una quantità r è la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

19. L' inviluppo delle superficie $\beta z(x + \alpha y + \beta) + a\alpha = 0$ è

$$xyz - a = 0.$$

20. L' inviluppo degli ellissoidi concentrici di cui gli assi hanno la stessa direzione e pei quali la somma dei semiassi è una costante k, è $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}$, avendo preso gli assi degli ellissoidi per assi coordinati.

21. L' inviluppo degli ellissoidi aventi lo stesso centro, la stessa direzione degli assi, e lo stesso volume V, è $x^2y^2z^2 = \frac{V^2}{48\pi^2}$.

22. L'inviluppo dei piani normali all'elica $x = a \cos \varphi$, $y = a \operatorname{sen} \varphi$, $z = b\varphi$ è la superficie $Xa \cos \psi + Ya \operatorname{sen} \psi + b^2 = 0$ dove

$$\psi = \frac{Z}{b} - \frac{\sqrt{a^2(X^2 + Y^2) - b^4}}{b^2};$$

23. La superficie inviluppo delle sfere di raggio costante c

$$(x - a)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = c^2$$

ed il cui centro si muove sopra una curva $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$, dicesi

superficie *canale* o *tubo*. Si trovi la equazione a derivate parziali cui soddisfanno tutte le superficie tubo.

(Si troveranno delle equazioni, dalle quali prima si ricaverà la equazione

$$\{pq - [\mathfrak{z} - \psi(\alpha)]s\}^2 = \{1 + p^2 + [\mathfrak{z} - \psi(\alpha)]r\}\ \{1 + q^2 + [\mathfrak{z} - \psi(\alpha)]t\},$$

dove con p, q,... intendiamo $\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y}$,... e poi da questa si avrà

$$c^2(rt - s^2) - c\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,[(1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r]$$
$$+ (1 + p^2 + q^2)^2 = 0,$$

la quale, non contenendo α, $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$, è la richiesta equazione a derivate parziali. Qual conseguenza se ne trae per i raggi di curvatura principali nelle superficie tubo ?).

II. Integrali definiti

Alcuni teoremi sugli integrali definiti.

51. Riprendiamo ora lo studio degli integrali definiti, che abbiamo cominciato nei n. 185 a 198 del vol I, mantenendo le stesse notazioni allora adoperate.

Dalla definizione stessa di integrale definito si ricava, senz'altro,

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx,$$

dove C è una costante.

Se c indica un numero compreso tra a e b abbiamo

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \tag{1}$$

giacchè la divisione dell' intervallo (a, b) in parti può farsi in guisa che un punto di divisione coincida sempre con c.

Dalla formola precedente si ha

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx,$$

e, poichè il punto b è fuori dell' intervallo (a, c), possiamo asserire che la formola (1) vale ancora se il punto c è fuori dell' intervallo (a, b), supponendo però che la $f(x)$ sia data e sia integrabile anche nell' intervallo che dobbiamo considerare fuori di (a, b).

Si ha poi evidentemente ancora, sotto analoghe condizioni, anche se i punti $c_1, c_2, \ldots c_n$, alcuni o tutti, non appartengono all'intervallo (a, b),

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \ldots + \int_{c_n}^b f(x)dx.$$

52. *La somma algebrica di un numero finito di funzioni integrabili in un certo intervallo è pure integrabile, e l'integrale della somma è uguale alla somma degli integrali delle singole funzioni.*

Infatti, se

$$\varphi(x) = f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x),$$

e indichiamo con S_0 la somma S relativa alla funzione $\varphi(x)$, con S_r quella relativa alla funzione $f_r(x)$, la formola

$$S_0 = S_1 \pm S_2 \pm \ldots \pm S_n$$

dimostra il teorema.

53. *Il prodotto di un numero finito di fattori integrabili è integrabile.*

Cominciamo dal dimostrare il teorema pel prodotto $\varphi(x) = f_1(x) f_2(x)$ di due fattori. Formiamo per la funzione $\varphi(x)$ la somma $D = \Sigma h_s D_s$, e indichiamo con L'_s, L''_s i limiti superiori, con l'_s, l''_s i limiti inferiori e con D'_s, D''_s le oscillazioni delle funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$ nell'intervallo h_s e poniamo $D' = \Sigma h_s D'_s$. $D'' = \Sigma h_s D''_s$.

Se si suppongono le $f_1(x)$, $f_2(x)$ sempre positive in tutto l'intervallo d'integrazione, avremo $D_s \leq L'_s L''_s - l'_s l''_s$ ossia

$$D_s \leq L'_s(L''_s - l''_s) + l''_s(L'_s - l'_s), \quad D_s \leq L'_s D''_s + l''_s D'_s,$$

e quindi indicando con K un numero maggiore dei limiti superiori di $f_1(x)$ e $f_2(x)$ in tutto l'intervallo d'integrazione, $D_s < K(D''_s + D'_s)$, da cui ricaviamo $D < K(D'' + D')$, la quale, ricordando che per ipotesi D', D'' hanno per limite zero al decrescere delle h_s, dimostra il teorema.

Se le $f_1(x)$, $f_2(x)$ non sono sempre positive nell'intervallo di integrazione, prendiamo due costanti C_1, C_2, tali che le somme $C_1 + f_1(x)$, $C_2 + f_2(x)$ siano sempre positive in detto intervallo. Allora il prodotto $[C_1 + f_1(x)]\,[C_2 + f_2(x)]$ è integrabile, e la formola

$$\varphi(x) = [C_1 + f_1(x)]\,[C_2 + f_2(x)] - C_1 f_2(x) - C_2 f_1(x) - C_1 C_2,$$

nella quale i termini del secondo membro sono tutti integrabili, dimostra che è integrabile la funzione $\varphi(x)$.

Dimostrato così il teorema pel prodotto di due fattori, si estende, senz'altro, al prodotto di un numero finito di fattori.

54. *Se la funzione* f(x) *è integrabile e si mantiene in tutto l' intervallo di integrazione numericamente discosta da zero più di una certa quantità assegnabile, la sua inversa* $\frac{1}{f(x)}$ *è pure integrabile.*

Supponiamo primieramente la $f(x)$ sempre positiva nell'intevallo di integrazione. Allora se L_s, l_s sono i limiti superiore e inferiore di $f(x)$ in h_s, si riconosce facilmente che $\frac{1}{l_s}$, $\frac{1}{L_s}$ sono i limiti superiore e inferiore di $\frac{1}{f(x)}$ in h_s, cosichè avremo

$$D'_s = \frac{1}{l_s} - \frac{1}{L_s} = \frac{L_s - l_s}{l_s L_s} = \frac{D_s}{l_s L_s} < \frac{D_s}{K^2},$$

indicando con K un numero minore del limite inferiore di $f(x)$ nell' intervallo di integrazione, dei quali numeri, per le ipotesi dell'enunciato del teorema, ve ne è una infinità.

Dall' ultima formola si ricava

$$\Sigma h_s D'_s < \frac{1}{K^2} \Sigma h_s D_s,$$

che dimostra il teorema.

Se poi $f(x)$ fosse negativa o cambiasse segno nell' intervallo di integrazione (ciò che può avvenire senza che la funzione passi per lo zero, giacchè può essere discontinua) allora si osservi che

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{f(x)+1}{f(x)^2} - \frac{1}{f(x)^2},$$

e, poichè $\frac{1}{f(x)^2}$ è integrabile e così pure il prodotto $[f(x)+1]\frac{1}{f(x)^2}$, vediamo che è pure integrabile $\frac{1}{f(x)}$.

Da questo teorema e da quello al numero 53, osservando che $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = f_1(x)\frac{1}{f_2(x)}$, ricaviamo subito che

Se le funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$ *sono integrabili, e la seconda si mantiene nell' intervallo di integrazione numericamente discosta da zero più di una certa quantità assegnabile, il quoziente* $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ *è pure integrabile.*

55. Dal teorema al n. 53 risulta che la potenza n^{esima}, n intero positivo, di una funzione integrabile, è pure una funzione integrabile. Relativamente alle potenze frazionarie di funzioni integrabili possiamo dimostrare il teorema:

Se f(x) *è integrabile in un intervallo, dove si mantiene sempre positiva e discosta da zero più di una quantità assegnabile, è pure integrabile nello stesso intervallo* $[f(x)]^{\frac{1}{n}}$, *essendo* n *intero positivo.*

Invero se L_s, l_s indicano i limiti superiore ed inferiore di $f(x)$ in un tratto h_s dell' intervallo di integrazione (a, b), $L_s^{\frac{1}{n}}, l_s^{\frac{1}{n}}$ saranno nello steso tratto i limiti superiore ed inferiore (1) di $[f(x)]^{\frac{1}{n}}$. Ora è

$$L_s^{\frac{1}{n}} - l_s^{\frac{1}{n}} = \frac{(L_s^{\frac{1}{n}} - l_s^{\frac{1}{n}})(L_s^{\frac{n-1}{n}} + l_s^{\frac{n-1}{n}})}{L_s^{\frac{n-1}{n}} + l_s^{\frac{n-1}{n}}}$$

$$= \frac{L_s - l_s}{L_s^{\frac{n-1}{n}} + l_s^{\frac{n-1}{n}}} + \frac{L_s^{\frac{1}{n}} l_s^{\frac{1}{n}} (l_s^{\frac{n-2}{n}} - L_s^{\frac{n-2}{n}})}{L_s^{\frac{n-1}{n}} + l_s^{\frac{n-1}{n}}}$$

e, il secondo termine dell' ultimo membro essendo negativo o nullo, avremo

$$L_s^{\frac{1}{n}} - l_s^{\frac{1}{n}} \leq \frac{L_s - l_s}{L_s^{\frac{n-1}{n}} + l_s^{\frac{n-1}{n}}},$$

dalla quale, indicando l il limite inferiore di $f(x)$ in (a, b), ricaviamo

$$L_s^{\frac{1}{n}} - l_s^{\frac{1}{n}} < \frac{L_s - l_s}{2\, l^{\frac{n-1}{n}}},$$

---

(1) Se L è il limite superiore di una quantità positiva y, essendo $y \leq L$, avremo $y^{\frac{1}{n}} \leq L^{\frac{1}{n}}$; inoltre, assegnato σ, prendendo $\sigma_1 = L - (L^{\frac{1}{n}} - \sigma)^n$, vi sarà un valore y_1 di y tale che risulterà $y_1 > L - \sigma_1 = (L^{\frac{1}{n}} - \sigma)^n$, da cui $y_1^{\frac{1}{n}} > L^{\frac{1}{n}} - \sigma$, così che $L^{\frac{1}{n}}$ è il limite superiore di $y^{\frac{1}{n}}$.

ed in conseguenza

$$\Sigma(L_s^{\frac{1}{n}} - l_s^{\frac{1}{n}})h_s < \frac{1}{2\,l^{\frac{n-1}{n}}}\,\Sigma(L_s - l_s)h_s,$$

la qual formola, colle solite considerazioni, dimostra il teorema.

A questo teorema, pel caso $n = 2$, abbiamo accennato nella nota prima a pag. 48.

56. *In qualunque parte, anche comunque piccola, di un intervallo, nel quale una funzione è integrabile, vi sono punti nei quali questa è continua.*

Sia (a, b) una parte dell'intervallo nel quale si suppone $f(x)$ integrabile. In (a, b) essendo $f(x)$ integrabile, prese due quantità qualunque positive δ ed $\varepsilon < b - a$, noi sappiamo che esiste una scomposizione di (a, b) in tratti tali, che la somma di quelli nei quali l'oscillazione della funzione supera $\frac{\delta}{2}$ è minore di ε: in uno almeno dei tratti di (a, b), che chiameremo (a_1, b_1), l'oscillazione D_1 della $f(x)$ sarà perciò $\leq \frac{\delta}{2}$, e ciò avvenendo in qualunque altro tratto contenuto in questo, potremo supporre $a_1 > a$, $b_1 < b$, $b_1 - a_1 < \frac{b-a}{2}$. Operando in modo analogo per l'intervallo (a_1, b_1) troveremo un tratto (a_2, b_2) nel quale l'oscillazione D_2 della $f(x)$ è $\leq \frac{\delta}{2^2}$, essendo $a_2 > a_1$, $b_2 < b_1$, $b_2 - a_2 < \frac{b-a}{2^2}$. E così via procedendo troveremo un tratto (a_n, b_n) nel quale l'oscillazione D_n di $f(x)$ è $\leq \frac{\delta}{2^n}$ essendo $a_n > a_{n-1}$, $b_n < b_{n-1}$, $b_n - a_n < \frac{b-a}{2^n}$, e tal processo può continuare quanto si vuole. È noto allora che i numeri $a, a_1, a_2 \ldots$, e i numeri $b, b_1, b_2, \ldots$ ammettono un limite comune c. Dico che la $f(x)$ è continua nel punto c.

Invero, assegnato σ, potremo prendere n così grande che risulti $\frac{\delta}{2^n} < \sigma$, cosichè nel tratto (a_n, b_n), nel cui interno è il punto c, la

oscillazione D_n di $f(x)$ sia $< \sigma$. Se x indica un punto qualunque di (a_n, b_n) avremo allora

$$| f(x) - f(c) | \leq D_n < \sigma,$$

che prova il nostro asserto.

57. Data la funzione $f(x)$ finita e integrabile in (a, b) consideriamo le somme $\sum_1^n h_s y_s$, $\sum_1^{n'} h'_s y'_s$ relative alla divisione dell' intervallo (a, b) in n parti h_s, in n' parti h'_s e ai valori y_s, y'_s compresi tra il limite inferiore e il superiore (questi inclusi) di $f(x)$ rispettivamente in h_s, h'_s, e siano D_s, D'_s le oscillazioni di $f(x)$ in h_s, h'_s. Indichiamo con k_s le parti nelle quali (a, b) è diviso dalle due scomposizioni precedenti, p il loro numero, y''_s un valore qualunque compreso tra il limite superiore e l' inferiore (questi inclusi) di $f(x)$ in k_s, e D''_s la oscillazione di $f(x)$ in k_s. Avremo, in generale,

$$h_s = k_{\alpha+1} + k_{\alpha+2} + \ldots + k_{\alpha+\beta}$$

e potremo scrivere

$$h_s y_s = k_{\alpha+1} y''_{\alpha+1} + k_{\alpha+2} y''_{\alpha+2} + \ldots + k_{\alpha+\beta} y''_{\alpha+\beta}$$

$$- k_{\alpha+1}(y_s - y''_{\alpha+1}) + k_{\alpha+2}(y_s - y''_{\alpha+2}) + \ldots + k_{\alpha+\beta}(y_s - y''_{\alpha+\beta}),$$

ed in conseguenza

$$\sum_1^n h_s y_s = \sum_1^p k_s y''_s + A.$$

dove A è la somma di tutte le somme

$$k_{\alpha+1}(y_s - y''_{\alpha+1}) + \ldots + k_{\alpha+\beta}(y_s - y''_{\alpha+\beta})$$

relative agli intervalli h_s, e, poichè queste non possono numericamente superare

$$|k_{\alpha+1} D_s + k_{\alpha+2} D_s + \ldots + k_{\alpha+\beta} D_s| \quad \text{cioè} \quad |h_s D_s|,$$

risulterà

$$|A| \leq |\sum_1^n h_s D_s|.$$

In modo analogo avremo

$$\sum_1^{n'} h'_s y'_s = \sum_1^p k_s y''_s + B \quad \text{dove} \quad |B| \leq |\sum_1^{n'} h'_s D'_s|,$$

e quindi

$$(1) \qquad |\sum_1^n h_s y_s - \sum_1^{n'} h'_s y'_s| = |A - B| \leq |\sum_1^n h_s D_s| + |\sum_1^{n'} h'_s D'_s|.$$

Osserviamo ora che

$$|h_s D_s| \geq |k_{\alpha+1} D''_{\alpha+1} + k_{\alpha+2} D''_{\alpha+2} + \ldots + k_{\alpha+\beta} D''_{\alpha+\beta}|,$$

cosichè

$$|\sum_1^n h_s D_s| \geq |\sum_1^p k_s D''_s|.$$

Inoltre, poichè i termini della somma $\sum_1^{n'} h'_s D'_s$ che non compariscono in $\sum_1^p k_s D''_s$ sono quelli soli che corrispondono a intervalli h'_s nei quali cade qualche punto della divisione di (a, b) nelle parti h_s, e questi termini sono al più in numero di n, e ciascuno di essi non supera $d' D_0$, dove d' è il massimo dei numeri $|h'_s|$, e D_0 è la oscillazione di $f(x)$ in tutto (a, b), avremo $|\sum_1^{n'} h'_s D'_s| \leq |\sum_1^p k_s D''_s| + nd' D_0$, e quindi ancora

$$|\sum_1^{n'} h'_s D'_s| \leq |\sum_1^n h_s D_s| + nd' D_0,$$

in virtù della quale la (1) diviene

$$|\sum_1^n h_s y_s - \sum_1^{n'} h'_s y'_s| \leq 2\,|\sum_1^n h_s D_s| + nd' D_0.$$

Supponiamo ora la scomposizione di (a, b) nelle parti h'_s tale che risulti

$$\left| \sum_1^{n'} h'_s y'_s - \int_a^b f(x)dx \right| < \sigma,$$

essendo σ un numero positivo prefissato comunque piccolo; avremo allora

$$\left| \sum_1^n h_s y_s - \int_a^b f(x)dx \right| \leq 2 \left| \sum_1^n h_s D_s \right| + nd' D_0 + \sigma,$$

e. poichè possiamo prendere d' e σ piccoli come si vuole, dovrà essere

$$\left| \sum_1^n h_s y_s - \int_a^b f(x)dx \right| \leq 2 \left| \sum_1^n h_s D_s \right|,$$

la qual formola ci dice che, *la somma* $\sum_1^n h_s y_s$ *è un valore approssimato dell' integrale* $\int_a^b f(x)dx$, *con un errore per eccesso o per difetto non superiore al doppio della somma* $\left| \sum_1^n h_s D_s \right|$.

Applicando l' ultima formola alla parte $(a, a + h_1 + h_2 + \ldots + h_i)$ di intervallo (a, b) si ha formola

$$(2) \qquad \left| \sum_1^i h_s y_s - \int_a^{a+\sum_1^i h_s} f(x)dx \right| \leq 2 \left| \sum_1^i h_s D_s \right|.$$

58. Se la funzione $f(x)$ integrabile in (a, b), ove non è zero, ha sempre lo stesso segno, cioè $f(x) \geq 0$, oppure $f(x) \leq 0$, è chiaro, in seguito alla definizione stessa di integrale definito, che sarà

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \text{ oppure } \int_a^b f(x)dx \leq 0 \text{ se } a < b,$$

e

$$\int_a^b f(x)dx \leq 0 \text{ oppure } \int_a^b f(x)dx \geq 0 \text{ se } a > b.$$

Se, quindi, $f(x)$, $\varphi(x)$ sono integrabili ed è $f(x) \geq \varphi(x)$, avremo

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \geq 0$$

cioè

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx \qquad \text{se } a < b,$$

e $$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx \qquad \text{se } a > b.$$

Se $\varphi(x)$, ove è diversa da zero, ha sempre lo stesso segno e m, M sono il limite inferiore e il superiore di $f(x)$ in (a, b), il prodotto $f(x)\,\varphi(x)$ sarà sempre compreso tra le quantità $m\varphi(x)$, $M\varphi(x)$ o uguale ad una di esse, cosichè $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx$ sarà sempre compreso tra le quantità $m\int_a^b \varphi(x)dx$, $M\int_a^b \varphi(x)dx$ o uguale ad una di esse, e perciò avremo

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\varphi(x)dx = k\int_a^b \varphi(x)dx \qquad \text{dove } m \leq k \leq M.$$

In particolare, se $\varphi(x) = 1$,

$$\int_a^b f(x)dx = k(b-a) \qquad \text{dove } m \leq k \leq M.$$

Se $f(x)$ è continua in (a, b) possiamo scrivere

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)dx = f[a + \theta(b-a)]\int_a^b \varphi(x)dx, \qquad 0 \leq \theta \leq 1,$$

$$\int_a^b f(x)dx = f[a + \theta(b-a)](b-a), \qquad 0 \leq \theta \leq 1.$$

La formola (1) costituisce un teorema che suole chiamarsi *primo teorema della media*: e si intende, senz'altro, la ragione di questa denominazione.

59. *Se la* f(x), *integrabile in* (a, b), *nei punti ove è diversa da zero ha sempre lo stesso segno, ed inoltre esiste in* (a, b) *un int r-*

vallo (a_1, b_1) *nel quale* f(x) *si mantiene discosta da zero più di una quantità assegnabile, l' integrale* $\int_a^b f(x)dx$ *è diverso da zero.*

Infatti, gli integrali $\int_a^{a_1} f(x)dx$, $\int_{a_1}^{b_1} f(x)\,dx$, $\int_{b_1}^{b} f(x)dx$ o sono zero od hanno lo stesso segno, e d'altra parte $\int_{a_1}^{b_1} f(x)dx$ non può essere zero, perchè se in (a_1, b_1) è $|f(x)| > \varepsilon$, sarà

$$|\Sigma h_s y_s| = \Sigma h_s |y_s| > \varepsilon(b_1 - a_1)$$

e quindi ancora $\left|\int_{a_1}^{b_1} f(x)dx\right| > \varepsilon(b_1 - a_1)$.

Abbiamo inoltre:

Se la f(x), *integrabile in* (a, b), *non è ivi sempre nulla, e nei punti ove è diversa da zero mantiene lo stesso segno, ed in uno almeno di questi punti è continua, allora* $\int_a^b f(x)dx$ *è diverso da zero.*

Invero, se x_1 indica uno di questi punti, esisterà un intorno di x_1 per tutti i punti del quale $|f(x)| \geq \frac{|f(x_1)|}{2}$ (Vedi n. 57, vol. I), e quindi, pel teorema precedente $\int_a^b f(x)dx$ sarà diverso da zero.

60. *Una funzione* f(x), *integrabile in* (a, b), *e tale che il suo integrale esteso a qualunque parte di* (a, b) *sia nullo, deve annullarsi in qualche punto di qualunque parte, anche comunque piccola, di* (a, b).

Invero sia (a_1, b_1) una parte qualunque di (a, b). Pel teorema al n. 56 esiste in (a_1, b_1) almeno un punto x_1 nel quale $f(x)$ è continua. Se $f(x)$ in x_1 fosse diversa da zero, esisterebbe un intorno c di x_1 nel quale $f(x)$ manterrebbe lo stesso segno di $f(x_1)$ e rimarrebbe

discosta da zero più di una quantità assegnabile; l'integrale di $f(x)$ esteso a c non potrebbe allora essere zero. Deve dunque essere $f(x_1)=0$, ciò che dimostra il teorema.

Da questo teorema risulta ancora subito che:

Una funzione f(x) *continua in* (a, b) *e di integrale nullo in ogni porzione di* (a, b), *è dapertutto nulla in* (a, b).

61. Se le $v_1, v_2, \ldots v_n$ sono quantità tali che le somme

$$s_1 = v_1, s_2 = v_1 + v_2, \ldots s_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$$

siano tutte comprese tra due quantità a, A, dove $a < A$, e se le $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ sono quantità positive ed è $\varepsilon_1 \geqq \varepsilon_2 \geqq \varepsilon_3 \geqq \ldots \geqq \varepsilon_n$ avremo

$$(1) \qquad \varepsilon_1 a < \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \ldots + \varepsilon_n v_n < \varepsilon_1 A.$$

Infatti, poichè

$$v_1 = s_1, \; v_2 = s_2 - s_1, \; v_3 = s_3 - s_2, \ldots v_n = s_n - s_{n-1},$$

è

$$\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \ldots + \varepsilon_n v_n = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)s_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)s_2 + \ldots + (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)s_{n-1} + \varepsilon_n s_n,$$

e da questa, sostituendo in luogo delle s una volta a, e un'altra A, abbiamo la (1).

Ciò premesso, siano $f(x)$, $\varphi(x)$ funzioni finite integrabili in (a, b), e sia $\varphi(x)$ mai negativa e mai crescente quando la variabile x passa da a a b.

Dividiamo l'intervallo (a, b) in parti h_s tali che risulti $|\sum_1^n h_s D_s| < \sigma$, essendo σ un numero positivo comunque piccolo e D_s l'oscillazione di $f(x)$ in h_s; indichiamo con y_s e z_s i soliti valori di $f(x)$, $\varphi(x)$ compresi tra il loro limite superiore e inferiore (questi inclusi) in h_s, prendendo $z_1 = \varphi(a)$.

Per la formola (2) n. 57 abbiamo

$$\left| \int_a^{a+\sum_1^i h_s} f(x)dx - \sum_1^i h_s y_s \right| < \sigma, \; (i = 1, 2, \ldots n),$$

ossia

$$\int_a^{a+\sum_1^i h_s} f(x)dx - \sigma < \sum_1^i h_s y_s < \int_a^{a+\sum_1^i h_s} f(x)dx + \sigma, \; (i = 1, 2, \ldots n),$$

cosichè, indicati con m, M il minimo e massimo valore di $\int_a^x f(x)dx$, quando x, limite superiore dell' integrale, assume i valori da a a b, avremo ancora

$$m - \sigma < \sum_1^i h_s y_s < \mathrm{M} + \sigma, \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Ma le $\varphi(a)$, $\zeta_2, \ldots \zeta_n$ sono quantità positive non crescenti, e perciò, applicando al caso nostro la formola (1), abbiamo

$$\varphi(a)\,(m - \sigma) < \sum_1^n h_s y_s \zeta_s < \varphi(a)\,(\mathrm{M} + \sigma).$$

Supponiamo ora la divisione di (a, b) nelle parti h_s anche tale che sia

$$\left| \int_a^b f(x)\,\varphi(x)dx - \sum_1^n h_s y_s \zeta_s \right| < \varphi(a)\sigma,$$

ossia

$$-\varphi(a)\sigma < \int_a^b f(x)\varphi(x)dx - \sum_1^n h_s y_s \zeta_s < \varphi(a)\sigma;$$

allora avremo

$$\varphi(a)\,(m - 2\sigma) < \int_a^b f(x)\,\varphi(x)dx < \varphi(a)\,(\mathrm{M} + 2\sigma),$$

e, poichè σ è arbitrariamente piccolo,

$$\varphi(a)m \leqq \int_a^b f(x)\,\varphi(x)dx \leqq \varphi(a)\,\mathrm{M}, \tag{2}$$

ossia

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = k\varphi(a), \qquad m \leqq k \leqq \mathrm{M},$$

ovvero ancora, ricordando che un integrale definito $\int_a^x \psi(u)du$ è fun-

zione continua di x, abbiamo la formola notevole

$$(3) \qquad \int_a^b f(x)\,\varphi(x)dx = \varphi(a)\int_a^{a+\theta(b-a)} f(x)dx, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Notiamo che, se nel punto a la $\varphi(x)$ è discontinua, per le ipotisi fatte sopra la $\varphi(x)$, in virtù del teorema al n. 25 del primo volume di quest' opera, deve esistere il limite per h convergente a zero di $\varphi(a+h)$ se $a<b$ o il limite di $\varphi(a-h)$ se $a>b$, cosichè la discontinuità non può essere che di prima specie e le quantità $\varphi(a+0)$, oppure $\varphi(a-0)$ hanno certamente significato. Ora nella (3) possiamo in luogo di $\varphi(a)$ porre $\varphi(a+0)$ o $\varphi(a-0)$, giacchè se assumiamo $\varphi(a+0)$, o $\varphi(a-0)$, per valore di $\varphi(x)$ nel punto a, il valore dell' integrale $\int_a^b f(x)\,\varphi(x)dx$ non cambia (Vedi n. 196 vol. I); cosichè avremo

$$(4) \qquad \begin{cases} \int_a^b f(x)\,\varphi(x)dx = \varphi(a+0)\int_a^{a+\theta(b-a)} f(x)dx\ , \ 0 \leq \theta \leq 1\ , \text{ se } a<b, \\ \int_a^b f(x)\,\varphi(x)dx = \varphi(a-0)\int_a^{a+\theta(b-a)} f(x)dx\ , \ 0 \leq \theta \leq 1\ , \text{ se } a>b, \end{cases}$$

le quali, osservando che se in a vi è continuità per la $\varphi(x)$ è $\varphi(x+0)=\varphi(a)$ o $\varphi(a-0)=\varphi(a)$, comprendono la (3).

Se la $\varphi(x)$ è anche negativa nell' intervallo (a, b), ma però non mai crescente quando x varia da a a b, allora possiamo applicare alla funzione $\varphi(x)-\varphi(b)$, mai negativa e non crescente, la formola (4) avendosi così

$$\int_a^b f(x)\,[\varphi(x)-\varphi(b)]\,dx = [\varphi(a\pm 0)-\varphi(b)]\int_a^{a+\theta(b-a)} f(x)dx$$

ossia

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)dx = \varphi(b)\int_a^b f(x)dx - \varphi(b)\int_a^{a+\theta(b-a)} f(x)dx + \varphi(a\pm 0)\int_a^{a+\theta(b-a)} f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)dx = \varphi(a \pm 0)\int_a^{a+\theta(b-a)} f(x)dx + \varphi(b)\int_{a+\theta(b-a)}^{b} f(x)dx,$$

od anche

$$(5)\quad \int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(a \pm 0)\int_a^{a+\theta(b-a)} f(x)dx + \varphi(b \mp 0)\int_{a+\theta(b-a)}^{b} f(x)dx\,,\ 0 \leq \theta \leq 1,$$

nella quale dobbiamo prendere i segni superiori se $a < b$, gli inferiori se $a > b$.

Se la funzione $\varphi(x)$ è mai decrescente, applichiamo alla funzione $\varphi(b \mp 0) - \varphi(x)$, non crescente, la formola (5), ed avremo

$$\int_a^b f(x)[\varphi(b \mp 0) - \varphi(x)]\,dx = [\varphi(b \mp 0) - \varphi(a \pm 0)]\int_a^{a+\theta(b-a)} f(x)dx,$$

che, come si riconosce facilmente sviluppando, si riduce alla (5).

Cosichè abbiamo il teorema, conosciuto col nome di *secondo teorema della media* [1]):

Se f(x), φ(x) *sono finite e integrabili in* (a, b), *e* φ(x) *è mai crescente, o è mai decrescente, quando* x *varia da* a *a* b, *ha luogo la formola* (5).

62. Sia $\psi(x)$ finita in (a, b) ed ammetta derivata continua $\psi'(x)$; allora, se $x, x + h$ sono punti di (a, b), avremo

$$\psi(x + h) - \psi(x) = h\psi'(x + \theta h),\ 0 < \theta < 1,$$

e, posto

$$\psi'(x + \theta h) = \psi'(x) + \varepsilon,$$

abbiamo

$$\frac{\psi(x + h) - \psi(x)}{h} - \psi'(x) = \varepsilon\,;$$

---

[1]) La formola (2) fu notata dal Bonnet nel vol. 14 del giornale di *Liouvil* nella nota « Remarques sur quelques intégrales définies ». La formola (5) è s ta pubblicata nel vol. 69 del giornale di *Crelle-Borchardt* dal Du Bois-Reymond, cu 'a aveva verbalmente comunicata il Weierstrass, che la aveva trovata e se ne ra servito nelle sue lezioni senza pubblicarla.

d'altra parte, poichè la $\psi'(x)$ è continua, in virtù del teorema di *Cantor* sulla equicontinuità di una funzione continua (Vedi n. 64 vol. I), dato σ, esiste un numero positivo δ tale che, qualunque sia x appartenente ad (a, b) e per $|h| < \delta$, e in modo che $x + h$ appartenga ad (a, b), è $|\varepsilon| = |\psi'(x + \theta h) - \psi'(x)| < \frac{\sigma}{2}$; cosichè avremo ancora, qualunque sia x e per quei valori di h,

$$\left| \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} - \psi'(x) \right| < \frac{\sigma}{2},$$

la qual formola ci dice che, se una funzione ammette derivata *continua* in un intervallo, il rapporto incrementale converge, nell'intervallo, uniformemente verso la derivata; e poichè è anche

$$|\psi'(x) - \psi'(x_0)| < \frac{\sigma}{2},$$

indicando x_0 un punto qualunque dell'intervallo $(x, x + h)$, avremo

$$\left| \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} - \psi'(x_0) \right| < \sigma.$$

Ciò premesso, abbiamo, relativamente al cambiamento di variabile di integrazione in un integrale definito, il seguente teorema:

Posto $x = x(t)$, *sia* $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$, *e sia* $x(t)$ *una funzione univalente sempre crescente o sempre decrescente, e che ammetta derivata continua* $x'(t)$, *così che mentre* t *sempre crescendo o sempre decrescendo passa dal valore* α *al valore* β, x *sempre crescendo o sempre decrescendo passi da* a *a* b *una sola volta; allora, se* $f(x)$ *è finita e integrabile in* (a, b), *è* $f[(x)]\, x'(t)$ *finita e integrabile in* (α, β) *e si ha*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[x(t)]\, x'(t)dt.$$

Invero, assegnato il numero positivo σ_1, interpoliamo tra α e β i numeri

$$t_0 = \alpha\,,\ t_1\,,\ t_2\,, \ldots t_{n-1}\,,\ t_n = \beta$$

in modo che le ampiezze k delle parti, nelle quali si scompone (α, β), siano minori del numero δ, pel quale, prendendo $|k| < \delta$ e qualunque sia t appartenente ad (α, β) e qualunque sia t' appartenente

a $(t, t+k)$, è

$$\left| \frac{x(t+k)-x(t)}{k} - x'(t') \right| < \sigma_1,$$

ovvero

$$\frac{x(t+k)-x(t)}{k} - \sigma_1 < x'(t') < \frac{x(t+k)-x(t)}{k} + \sigma_1.$$

Allora abbiamo le disuguaglianze

$$\frac{x(t_s)-x(t_{s-1})}{t_s-t_{s-1}} - \sigma_1 < x'(t'_{s-1}) < \frac{x(t_s)-x(t_{s-1})}{t_s-t_{s-1}} + \sigma_1, \quad (s=1, 2, \ldots n),$$

dove t'_{s-1} indica un qualunque valore di t appartenente a (t_{s-1}, t_s), disuguaglianze che valgono qualunque sia la scomposizione di (α, β) in parti, le cui ampiezze siano $< \delta$.

Consideriamo ora la somma

$$S = \sum_1^n y_s x'(t'_{s-1})(t_s - t_{s-1}),$$

dove y_s indica un valore qualunque compreso tra i limiti inferiore e superiore (questi inclusi) dei valori di $f[x(t)]$ nell'intervallo (t_{s-1}, t_s), o, ciò che è lo stesso, un valore compreso tra i limiti inferiore e superiore di $f(x)$ nell'intervallo $h_s = x(t_s) - x(t_{s-1})$, corrispondente all'intervallo (t_{s-1}, t_s); e $y_s x'(t'_{s-1})$ è ancora un valore qualunque compreso tra il limite inferiore e il superiore dei valori del prodotto $f[x(t)]\, x'(t)$ in (t_{s-1}, t_s).

Le differenze $t_s - t_{s-1}$ hanno tutte il segno di $\beta - \alpha$ per ipotesi; per fissare le idee, supponiamole positive. Allora se y_s è positivo, oppure negativo, aumentiamo il valore dei termini della somma S se in luogo di $x'(t'_{s-1})$ poniamo $\frac{x(t_s)-x(t_{s-1})}{t_s-t_{s-1}} + \sigma_1$ cioè $\frac{h_s}{t_s-t_{s-1}} + \sigma_1$, oppure $\frac{x(t_s)-x(t_{s-1}}{t_s-t_{s-1}} - \sigma_1$ cioè $\frac{h_s}{t_s-t_{s-1}} - \sigma_1$, cosichè avremo

$$S < \sum_1^n y_s h_s + \sigma_1 \sum_1^n [\pm y_s (t_s - t_{s-1})];$$

ovvero, ponendo in luogo di $\pm y_s$ un numero positivo A maggiore dei valori assoluti di $f[x(t)]$ nell'intervallo (α, β), ossia di $f(x)$ in (a, b), sar

$$S < \sum_1^n h_s y_s + \sigma_1 A(\beta - \alpha);$$

ed in modo analogo si avrebbe

$$S > \sum_1^n h_s y_s - \sigma_1 A(\beta - \alpha),$$

cosichè

$$|S - \sum_1^n h_s y_s| < \sigma_1 A(\beta - \alpha);$$

ed in ogni caso, cioè sia $\alpha > \beta$ o sia $\alpha < \beta$, si arriverebbe alla formola

$$|S - \sum_1^n h_s y_s| < \sigma_1 A|\beta - \alpha|.$$

Dato ora σ, prendiamo nelle formole precedenti $\sigma_1 = \frac{\sigma}{2A|\beta - \alpha|}$ così chè

$$|S - \sum_1^n h_s y_s| < \frac{\sigma}{2},$$

e supponiamo δ anche tale che per $|t_s - t_{s-1}| < \delta$ i corrispondenti h_s risultino così, che sia

$$\left| \sum_1^n h_s y_s - \int_a^b f(x)dx \right| < \frac{\sigma}{2};$$

allora per tutte le scomposizioni dell' intervallo (α, β) in parti di ampiezza $< \delta$ è

$$\left| S - \int_a^b f(x)dx \right| < \sigma,$$

cioè $\lim S = \int_a^b f(x)dx$; e, poichè il limite di S è $\int_\alpha^\beta f[x(t)]x'(t)dt$, abbiamo in ultimo

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[x(t)]\, x'(t)dt,$$

come volevamo dimostrare.

Questa formola vale anche se la funzione $x(t)$ ha nell' intervallo α, β un numero finito di massimi e di minimi. Invero, questi massimi o minimi corrispondano ai valori $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ di t, dove, supposto p. e.: $\alpha < \beta$, è $\alpha < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots . \alpha_m < \beta$, così chè negli intervalli $(\alpha, \alpha_1), (\alpha_1, \alpha_2), \ldots$ la $x(t)$ è sempre crescente o decrescente: indicati allora con $a_1, a_2, \ldots a_m$ i valori di x corrispondenti a quei valori di t, avremo, applicando la (1),

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_a^{a_1} f(x)dx = \int_\alpha^{\alpha_1} f[x(t)]\, x'(t)dt, \\ \displaystyle\int_{a_1}^{a_2} f(x)dx = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f[x(t)]\, x'(t)dt, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \displaystyle\int_{a_m}^{b} f(x)dx = \int_{\alpha_m}^{\beta} f[x(t)]\, x'(t)dt, \end{array} \right.$$

le quali sommate danno appunto la (1), dove è a notare che alcuni o tutti i numeri $a_1, a_2, \ldots a_m$ potranno essere fuori dell' intervallo (a, b); solo dobbiamo supporre allora la $f(x)$ data e finita e integrabile per i valori di x che occorre considerare fuori dell'intervallo (a, b).

63. Se la $f(x)$ è continua in (a, b) la formola (1) del num. precedente si può dimostrare nel modo più semplice seguente.

Poichè $f(x)$ è continua in (a, b) esisterà una funzione $\varphi(x)$ tale che $\varphi'(x) = f(x)$ in (a, b) (Vedi n. 193 vol. I), cosichè

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Poniamo $x = x(t)$ e sia $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$; avendosi $\varphi'[x(t)] = f[x(t)]$, se si suppone $x'(t)$ finita e diversa da zero, avremo ancora

$$\varphi'[x(t)]\, x'(t) = f[x(t)]\, x(t) \text{ ossia } \frac{d\varphi[x(t)]}{dt} = f[x(t)]\, x'(t),$$

cosichè

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[x(t)]\, x'(t)dt = \varphi[x(\beta)] - \varphi[x(\alpha)] = \varphi(b) - \varphi(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Il cambiamento di variabile in un integrale definito giova spesso per l' effettivo calcolo dell' integrale stessso.

Esempio. — Sia $1 = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\, dx$; poniamo $x = \operatorname{tg} t$, cosichè variando t da 0 a $\frac{\pi}{4}$, la x varia da 0 ad 1; abbiamo allora

$$1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\log(1+\operatorname{tg} t)}{1+\operatorname{tg}^2 t}(1+\operatorname{tg}^2 t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\operatorname{tg} t)\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \frac{\operatorname{sen} t + \cos t}{\cos t}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\operatorname{sen} t + \cos t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \cos t\, dt;$$

osservando che

$$\operatorname{sen} t + \cos t = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} t + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t\right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right),$$

abbiamo

$$1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right] dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \cos t d\, t$$

$$= \log\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right) dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \cos t\, dt.$$

Poniamo nel secondo integrale dell' ultimo membro $t = \frac{\pi}{4} - t_1$, e allora

$$I = \log\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt - \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \log\cos t_1\, dt_1 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos t\, dt = \frac{\pi}{4}\log\sqrt{2}$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos t_1\, dt_1 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos t\, dt = \frac{\pi}{4}\log\sqrt{2} = \frac{\pi}{8}\log 2.$$

64. Facciamo ora alcune osservazioni degne di nota.

Ricordiamo che l' integrale $\varphi(x) = \int_a^x f(y)\, dy$, essendo x un punto qualunque dell' intervallo (a, b), ove la $f(y)$ si suppone finita e integrabile, è una funzione continua di x in (a, b), la quale, nei punti x ove $f(y)$ è continua, ammette derivata $\varphi'(x) = f(x)$, e nei punti x, ove $f(y)$ ha una discontinuità di prima specie, non ammette derivata ordinaria ma ammette la derivata a destra e quella a sinistra, che indicheremo con $\varphi'_d(x)$, $\varphi'_s(x)$, ed è $\varphi'_d(x) = f(x+0)$, $\varphi'_s(x) = f(x-0)$; nei punti x ove la $f(y)$ ha una discontinuità di seconda specie non possiamo più asserire subito se la $\varphi(x)$ ammetta o no derivata, ma si conoscono dei casi nei quali si trova che la ammette, come ora vedremo.

Supponiamo ora che la $f(y)$ non abbia discontinuità di seconda specie, e sia $F(x)$ una funzione, che, nei punti x ove $f(y)$ è continua, ha la sua derivata uguale a $f(x)$, e nei punti x ove $f(y)$ ha una discontinuità non ammetta derivata ordinaria, ma ammetta derivata a destra e a sinistra e sia $F'_d(x) = f(x+0)$, $F'_s(x) = f(x-0)$. Allora la differenza $F(x) - \int_a^x f(y)\, dy$ ammette derivata ordinaria in ogni punto di (a, b) e questa è sempre zero, cosichè

$$F(x) - \int_a^x f(y)\, dy = C \qquad (C \text{ costante}),$$

dalla quale, per $x = a$, si ha $F(a) = C$, e quindi

$$(1) \qquad \int_a^x f(y)\, dy = F(x) - F(a).$$

Così chè, se la funzione $f(y)$ è integrabile e non ha discontinuità di seconda specie, e si trovasse una funzione $F(x)$ soddisfacente alle precedenti condizioni, la formola (1) ci permetterebbe di calcolare subito il valore dell' integrale definito $\int_a^x f(y)\, dy$. Così se $f(x)$ è funzione continua, e coi metodi dati nella parte VII del primo volume si riesce a trovare l' integrale indefinito $\int f(x)\, dx = \varphi(x)$, la formola (1) ci darebbe subito il valore dell' integrale definito, o, come suol dirsi, servirebbe al passaggio dall' integrale indefinito al definito. Ad esempio, poichè è $\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x$, si ricava subito $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\, dx = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$; poichè è $\int \frac{dx}{x} = \log x$ per x diverso da zero, e $\frac{1}{x}$ è continua nell' intervallo (1, 2), si ha

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \log 2 - \log 1 = \log 2.$$

Se una funzione $\varphi(x)$ ammette derivata continua $\varphi'(x)$ in tutto l' intervallo (a, b), questa sarà integrabile ed avremo

$$(2) \qquad \varphi(x) - \varphi(a) = \int_a^x \varphi'(y)\, dy.$$

Ma se supponiamo che la $\varphi'(x)$ presenti delle discontinuità, allora non sappiamo se abbia luogo la formola (2), anzi si presentano spontaneamente queste due domande: Sarà ancora la $\varphi'(x)$ integrabile in (a, b), e se lo è, avrà luogo ancora la formola (2)? Senza entrare in

proposito in particolari, che non possono trovare luogo in un libro elementare. mi limiterò ad accennare che alla prima domanda è stato risposto negativamente, cioè *vi sono delle funzioni le cui derivate non sono integrabili*, ed il prof. VOLTERRA ha dato esempi di tali funzioni [1]). Per queste funzioni sarebbe sempre vero che $\int \varphi'(x)dx = \varphi(x) + C$, ove si intenda con $\int f(x)dx$ quella funzione che derivata dà $f(x)$, ma non avrebbe significato l' integrale $\int_a^x \varphi'(y)\,dy$, definito come limite della solita somma S. Alla seconda domanda rispose affermativamente il prof. DINI [2]), cioè *se la* $\varphi'(x)$ *è integrabile ha luogo sempre la formola* (2), dalla quale risulta così che l' integrale $\int_a^x \varphi'(y)dy$ ammette sempre derivata e questa è $\varphi'(x)$ anche nei punti ove $\varphi'(x)$ è discontinua, notando che le discontinuità della $\varphi'(x)$ non possono essere altro che di seconda specie (Vedi Vol. I, esercizio 4, a pag. 108); ciò prova quanto avevamo più sopra asserito.

ESERCIZI.

1. Si dimostri che se $f(x)$ è finita e integrabile in (a, b) lo è pure $|f(x)|$.

2. $$\int_0^1 x^2 e^{x^2} dx = \frac{1}{3}[1 + \theta(e - 1)], \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

$$\int_0^1 x^2 e^{x^2}\, dx = \int_{\theta_1}^1 e^{x^2}\, dx, \qquad 0 \leq \theta_1 \leq 1.$$

---

[1] « Sui principi del calcolo integrale », Vol. 19° del Giornale di matematiche di BATTAGLINI.

[2] « Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali ». pag. 280, numero 199.

3. Osservando che la derivata, rapporto a t, della funzione

$$-f(x+h-t)-tf'(x+h-t)-\frac{t^2}{1.2}f''(x+h-t)-\ldots$$

$$-\frac{t^{n-1}}{1.2..(n-1)}f^{(n-1)}(x+h-t)$$

è $\frac{t^{n-1}}{1.2..(n-1)}f^{(n)}(x+h-t)$, si provi che il resto dello sviluppo del Taylor per la funzione $f(x+h)$ è uguale a

$$\frac{1}{1.2..(n-1)}\int_0^h t^{n-1}f^{(n)}(x+h-t)dt,$$

e si ricavi da questa forma del resto quella di LAGRANGE $\frac{h^n}{1.2..n}f^{(n)}(x+\theta h)$ dove $0<\theta<1$ [1]) ammesso che $f^{(n)}(x+h-t)$ sia continua pei valori di t da 0 ad h.

4. $\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x\, dx}{1+\cos^2 x}=\frac{\pi^2}{4}$, (si scriva $\int_0^\pi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi$ e nell' ultimo integrale si ponga $x=\pi-y$).

5. $\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x \cos^2 x\, dx}{\sqrt{1+\cos^6 x}}=\frac{\pi}{3}\log(1+\sqrt{2})$.

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen} 2x)\cos x\, dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 x)\cos x\, dx$, dove $f(\operatorname{sen} 2x)$ indica una funzione qualunque di $\operatorname{sen} 2x$ integrabile in $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, [si cominci col

---

[1]) Arrivando in questo modo alla forma del resto di LAGRANGE si trova propriamente $0 \leqq \theta \leqq 1$, ma noi sappiamo, d' altra parte, che θ è una vera e propria frazione.

dimostrare che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen} 2x)\cos x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\operatorname{sen} 2x)(\operatorname{sen} x + \cos x)dx].$$

Ad es. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{sen} 2x}\cos x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx = \frac{\pi}{4}$.

7. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx = 2\int_0^1 \frac{x^2\, dx}{1+x^4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\pi}{2} + \log(\sqrt{2}-1)\right]$.

Integrali definiti pei quali la funzione integranda non si mantiene finita nell' intervallo di integrazione, e integrali definiti con limiti infiniti.

65. Nella definizione che abbiamo data di integrale definito, e nelle successive considerazioni intorno ai medesimi, abbiamo supposto che i valori della funzione integranda $f(x)$ fossero compresi, nell' intervallo (a, b) di integrazione, tra due numeri finiti m, M, cioè che $f(x)$ si mantenesse finita. Supponiamo ora che ciò non avvenga, e non avvenga perchè esistano nell' intervallo (a, b) dei punti α (che possano anche coincidere cogli estremi dell' intervallo) in numero finito, tali che, dato un numero comunque grande e positivo A, esista un corrispondente intorno di α (alla destra o alla sinistra o alle due parti) per tutti i punti x del quale (α escluso) sia $|f(x)| > A$ (infinito propriamente detto); od anche perchè, pur non esistendo un intorno di α per tutti i punti x del quale sia sempre $|f(x)| > A$, in qualunque intorno, anche comunque piccolo, di α vi siano dei punti x pei quali sia $|f(x)| > A$. Supponiamo inoltre che nelle parti di (a, b) cui non appartengono, come punti interni o come estremi, dei punti α, per averli asportati da (a, b) mediante intorni comunque piccoli, la $f(x)$ sia integrabile. Questi punti α li chiameremo, tanto nel primo caso, come nel secondo, punti di infinito.

Per esempio, la funzione $\frac{1}{\operatorname{sen} x}$ ha un infinito propriamente detto nel punto zero. La funzione $f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ non ha un infinito proprio nel punto zero, perchè nei punti x del gruppo, che otteniamo da $\frac{1}{x} = k\pi$ attribuendo a k ogni valore intero e di cui cade un numero infinito in ogni intorno del punto zero, abbiamo $f(x) = 0$; mentre, d'altra parte, nei punti del gruppo analogo $\frac{1}{x} = \alpha + k\pi$ (α numero qualunque) e dei quali cade pure un numero infinito in ogni intorno del punto zero è $|f(x)| = |(\alpha + k\pi) \operatorname{sen} \alpha|$, e, assegnato il numero A positivo comunque grande, osservando che

$$|(\alpha + k\pi) \operatorname{sen} \alpha| \geqq |k|\, \pi\, |\operatorname{sen} \alpha| - |\alpha \operatorname{sen} \alpha|,$$

dove già supponiamo $|k| > |\alpha|$, basta prendere $|k| > \frac{A + |\alpha \operatorname{sen} \alpha|}{\pi\, |\operatorname{sen} \alpha|}$ perchè risulti $|f(x)| > A$. [Vedi (n. 17, es. 2) vol. I]. Questa funzione, tolto con un intorno comunque piccolo il punto zero da un intervallo che lo contenga, è negli intervalli rimanenti continua e quindi integrabile.

Ciò posto, se $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ indicano i punti α, che si incontrano procedendo da a verso b, ha un significato completamente determinato la somma

$$(1) \qquad \int_a^{\alpha_1 - \varepsilon_1} f(x)\, dx + \int_{\alpha_1 + \varepsilon'_1}^{\alpha_2 - \varepsilon_2} f(x)\, dx + \int_{\alpha_2 + \varepsilon'_2}^{\alpha_3 - \varepsilon_3} f(x)\, dx + \ldots + \int_{\alpha_n + \varepsilon'_n}^{b} f(x)\, dx,$$

dove le ε, ε' si suppongono tutte positive o tutte negative secondochè $a < b$, oppure $a > b$, e tali che negli intervalli di integrazione relativi ai singoli termini non cada alcun punto α, e detta somma mantiene un significato per quanto piccole si fissino le ε, ε'; e notiamo ancora, quantunque sia superfluo, che se il punto α_1 coincide con a, o il punto a_n con b, mancheranno il primo, o l'ultimo integrale nella somma (1).

Ora se la somma (1) ha un limite determinato e finito quando tutte le ε, ε', indipendentemente tra loro, convergono a zero, questo limite si definisce come $\int_a^b f(x)\, dx$, e si dice allora che la $f(x)$ è *inte-*

grabile in (a, b). Ed affinchè questo succeda basta che ciascun termine della (1) abbia limite determinato e finito, e, poichè le ε, ε' devono farsi convergere a zero indipendentemente tra loro, ciò è anche necessario.

Sia, per fissare le idee, $a < b$; e siano $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}$ dei punti compresi rispettivamente tra α_1 e α_2, tra α_2 e $\alpha_3, \ldots$ tra α_{n-1} e α_n. La somma (1) può scriversi così

$$\int_a^{\alpha_1-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \int_{\alpha_1+\varepsilon'_1}^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{\alpha_2-\varepsilon_2} f(x)\,dx + \ldots$$

$$+ \int_{a_{s-1}}^{\alpha_s-\varepsilon_s} f(x)\,dx + \int_{\alpha_s+\varepsilon'_s}^{a_s} f(x)\,dx + \ldots + \int_{\alpha_n+\varepsilon'_n}^{b} f(x)\,dx,$$

ed affinchè essa abbia limite finito, quando le ε convergono a zero, bisogna che lo abbiano i suoi termini $\int_{a_{s-1}}^{\alpha_s-\varepsilon_s} f(x)\,dx, \int_{\alpha_s+\varepsilon'_s}^{a_s} f(x)dx$. Ora affinchè per ε_s convergente a zero il primo di questi integrali abbia limite finito, fa bisogno e basta (Vedi Vol. I, n. 26) che, dato σ, esista un intorno di α_s, alla sinistra, per tutti i punti $\alpha_s - \delta_s$, $\alpha_s - \delta'_s$ del quale (α_s escluso) sia

$$\left| \int_{a_{s-1}}^{\alpha_s-\delta_s} f(x)\,dx - \int_{a_{s-1}}^{\alpha_s-\delta'_s} f(x)\,dx \right| < \sigma,$$

ovvero, supposto $\delta_s < \delta'_s$ e poichè allora

$$\int_{a_{s-1}}^{\alpha_s-\delta_s} f(x)\,dx - \int_{a_{s-1}}^{\alpha_s-\delta'_s} f(x)\,dx = \int_{\alpha_s-\delta'_s}^{\alpha_s-\delta_s} f(x)\,dx,$$

sia

$$\left| \int_{\alpha_s-\delta'_s}^{\alpha_s-\delta_s} f(x)\,dx \right| < \sigma;$$

diremo allora che $\lim \int_{\alpha_s - \delta'_s}^{\alpha_s - \delta_s} f(x)dx = 0$ quando i limiti dell' integrale $\alpha_s - \delta'_s$, $\alpha_s - \delta_s$ tendono ad α_s.

Analogamente si proverebbe che, affinchè $\int_{\alpha_s + \varepsilon_s}^{\alpha_s} f(x)\,dx$ abbia limite finito per ε_s convergente a zero, fa bisogno e basta che sia $\lim \int_{\alpha_s + \delta_s}^{\alpha_s + \delta'_s} f(x)\,dx = 0$, intendendo il limite preso in modo analogo al precedente. Così chè, chiamando *integrali singolari definiti*, relativi al punto di infinito α_s, gli integrali $\int_{\alpha_s - \delta'_s}^{\alpha_s - \delta_s} f(x)\,dx . \int_{\alpha_s + \delta_s}^{\alpha_s + \delta'_s} f(x)\,dx$, dove δ_s, δ'_s sono positivi e $\delta_s < \delta'_s$, notando che se α_s è uno degli estremi a, b dell' intervallo si ha per esso uno solo di questi integrali singolari, si conchiude che: *la condizione necessaria e sufficiente affinchè la* f(x) *sia integrabile in* (a, b) *è che gli integrali singolari relativi ai punti di infinito* α_s *abbiano per limite zero, quando i limiti di essi integrali tendono ad* α_s.

Esempi

1) $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon=0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \lim\,[\text{arc sen}(1-\varepsilon) - \text{arc sen } 0] = \frac{\pi}{2}.$$

2) $$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon=0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \lim_{\varepsilon=0} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim \left(\frac{3}{2}\,\varepsilon^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}\right)$$

$$+ \lim \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\,\varepsilon^{\frac{2}{3}}\right) = 0.$$

3) Poichè $\lim\limits_{\varepsilon=0}\int\limits_{-a}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x}=\lim\int\limits_{-a}^{-\varepsilon}\frac{d(-x)}{-x}=\lim\int\limits_{a}^{\varepsilon}\frac{dx}{x}$

$$=\lim(\log\varepsilon-\log a)=-\infty\,,\ \lim\limits_{\varepsilon=0}\int\limits_{\varepsilon}^{a}\frac{dx}{x}=\infty$$

e, dietro la definizione, dovrebbe essere

$$\int\limits_{-a}^{a}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{\varepsilon=0}\int\limits_{-a}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x}+\lim\limits_{\varepsilon=0}\int\limits_{\varepsilon}^{a}\frac{dx}{x}\,,$$

si vede che la funzione $\frac{1}{x}$ non è integrabile in qualunque intervallo cui appartenga il punto zero.

4) $\int\limits_{0}^{x}\log x\,dx=\lim\limits_{\varepsilon=0}\int\limits_{\varepsilon}^{x}\log x\,dx=\lim\{x(\log x-1)-\varepsilon(\log\varepsilon-1)\}$

$$=x(\log x-1).$$

5) La funzione $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, coll'avvicinarsi di x a zero, senza che abbia per limite l'infinito, prende anche valori numericamente maggiori di qualunque numero positivo assegnato. Quindi il punto zero è per la nostra funzione un punto d'infinito, nel senso che noi gli abbiamo attribuito. Ora i due integrali singolari relativi a questo punto hanno per limite zero, perchè abbiamo

$$\left|\int\limits_{-\delta'}^{-\delta}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\operatorname{sen}\frac{1}{x}\,dx\right|<\int\limits_{-\delta'}^{-\delta}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\left|\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right|dx<\int\limits_{-\delta'}^{-\delta}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx=3(\sqrt[3]{\delta'}-\sqrt[3]{\delta}),$$

$$\left|\int\limits_{\delta}^{\delta'}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\operatorname{sen}\frac{1}{x}\,dx\right|<3(\sqrt[3]{\delta'}-\sqrt[3]{\delta}),$$

e perciò la funzione $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ è integrabile anche in intervalli cui appartenga il punto zero.

66. Il teorema seguente permette spesso di decidere se una funzione, che diviene infinita in un numero finito di punti di un intervallo, sia integrabile o no, senza aver bisogno di calcolare i limiti che compariscono nella formola di definizione per l'integrale definito o di ricorrere agli integrali definiti singolari:

Se la funzione f(x) *diviene infinita per* $x = b$, *ed è finita e integrabile nell' intervallo* $(a, b - \varepsilon)$ *per quanto piccolo sia* ε, *e dove* $a < b$, *essa sarà integrabile in* (a, b) *se esisterà un intorno di* b *alla sinistra, per tutti i punti* x *del quale* (b *escluso*) *uno dei prodotti*

$$f(x)\,(b-x)^{\mu}\ ,\quad f(x)\,(b-x)\,[\log(b-x)]^{1+\mu},$$

$$f(x)\,(b-x)\log(b-x)\,[\log|\log(b-x)|]^{1+\mu},\ldots,$$

dove μ *è un numero positivo qualunque e nel primo prodotto minore dell' unità, si mantenga numericamente minore di un certo numero positivo* k [*in particolare se* f(x) *nel punto* b *diviene infinita di ordine uguale o minore a quello di una delle funzioni*

$$\frac{1}{(b-x)^{\mu}},\ \frac{1}{(b-x)[\log(b-x)]^{1+\mu}},\ \frac{1}{(b-x)\log(b-x)[\log|\log(b-x)|]^{1+\mu}},\ldots$$

quando x *converge a* b [1]]; *e la* f(x) *non sarà integrabile in* (a, b),

---

[1] Vedi Vol. I, n. 36, 37.

Colla regola di l' Hospital ripetutamente adoperata, oppure osservando che

$$\frac{(\log x)^{n_1}}{x^n} = \frac{(\log x)^{n_1}}{e^{n\log x}} = \frac{(\log x)^{n_1}}{1 + n\log x + \frac{n^2(\log x)^2}{2} + \frac{n^3(\log x)^3}{2\,.\,3} + \ldots}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{(\log x)^{n_1}} + n(\log x)^{1-n_1} + \frac{n^2(\log x)^{2-n_1}}{2} + \frac{n^3(\log x)^{3-n_1}}{2\,.\,3} + \ldots},$$

si vede che $\lim\limits_{x=\infty} \frac{(\log x)^{n_1}}{x^n} = 0$, se n_1, n sono numeri positivi. Da ciò apparisce che, se $n_1, n_2 \ldots$ sono positivi, sarà ancora

$$\lim_{x=\infty} \frac{(\log\log x)^{n_2}}{(\log x)^{n_1}} = 0, \qquad \lim \frac{(\log\log\log x)^{n_3}}{(\log\log x)^{n_2}} = 0 \ldots$$

cosichè avremo, quando i fattori nel numeratore sono in numero finito,

$$\lim_{x=\infty} \frac{(\log x)^{n_1}(\log\log x)^{n_2}(\log\log\log x)^{n_3}\ldots}{x^n}$$

$$= \lim_{x=\infty}\left[\frac{(\log x)^{n_1+1}}{x^n}\cdot\frac{(\log\log x)^{n_2+1}}{\log x}\cdot\frac{(\log\log\log x)^{n_3+1}}{\log\log x}\ldots\right] =$$

se in detto intorno la f(x) *mantiene lo stesso segno, ed uno dei prodotti*

$$f(x)(b-x),\ f(x)(b-x)\log(b-x),\ f(x)(b-x)\log(b-x)\log|\log(b-x)|,\ldots$$

si mantiene numericamente maggiore di un certo numero positivo k *(in particolare se la* f(x) *diviene in* b *infinita di ordine uguale o superiore a quello di una delle funzioni*

$$\frac{1}{b-x},\ \frac{1}{(b-x)\log(b-x)},\ \frac{1}{(b-x)\log(b-x)\log|\log(b-x)|},\ldots\Big).$$

La prima parte del teorema si dimostra subito osservando che, per le ipotesi fatte, l'integrale definito singolare $\int_{b-\delta'}^{b-\delta} f(x)dx$ è numericamente minore di uno degli integrali

$$k\int_{b-\delta'}^{b-\delta}\frac{dx}{(b-x)^{\mu}},\quad k\int_{b-\delta'}^{b-\delta}\frac{dx}{(b-x)[\log(b-x)]^{1+\mu}},$$

$$k\int_{b-\delta'}^{b-\delta}\frac{dx}{(b-x)\log(b-x)[\log|\log(b-x)|]^{1+\mu}},\ldots$$

i quali sono rispettivamente uguali a $\frac{k}{1-\mu}(\delta'^{1-\mu}-\delta^{1-\mu})$,

---

Ponendo poi $y=\frac{1}{x}$, abbiamo

$$\lim_{y=0} y^n(\log y)^{n_1}(\log|\log y|)^{n_2}(\log\log|\log y|)^{n_3}\ldots$$

$$=\lim_{x=\infty}(-1)^{n_1}\frac{(\log x)^{n_1}(\log\log x)^{n_2}(\log\log\log x)^{n_3}\ldots}{x^n}=0$$

e quindi

$$\lim_{x=b}(b-x)^n[\log(b-x)]^{n_1}[\log|\log(b-x)|]^{n_2}\ldots=0,$$

cc che le funzioni

$$\frac{1}{(b-x)^n[\log(b-x)]^{n_1}[\log|\log(b-x)|]^{n_2}\ldots}$$

di ngono infinite nel punto b.

$$\frac{k}{\mu}\,[(\log \varepsilon)^{-\mu} - (\log \varepsilon')^{-\mu}],\ \frac{k}{\mu}\,[(\log|\log \varepsilon'|)^{-\mu} - (\log|\log \varepsilon|)^{-\mu}],\ldots \text{ e}$$

quindi $\lim \int_{b-\varepsilon_1}^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx = 0$, e la $f(x)$ è integrabile.

La seconda parte del teorema si dimostra osservando che

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

dove c indica un punto appartenente all' intorno di b, di cui è parola nell' enunciato del teorema, e che $\int_c^{b-\varepsilon} f(x)dx$ è numericamente maggiore di uno degli integrali

$$k\int_c^{b-\varepsilon}\frac{dx}{b-x},\ k\int_c^{b-\varepsilon}\frac{dx}{(b-x)\log(b-x)},\ k\int_c^{b-\varepsilon}\frac{dx}{(b-x)\log(b-x)\log|\log(b-x)|},\ldots$$

i quali sono rispettivamente uguali a

$$k[\log(b-c) - \log \varepsilon],\qquad k[\log\log(b-c) - \log\log \varepsilon],\ldots$$

e quindi $\lim_{\varepsilon=0} \int_c^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \pm\infty$, ed essendo perciò ancora

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \pm\infty,$$

la $f(x)$ non è integrabile nell' intervallo (a, b).

Esempi

1) La funzione $\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ diviene infinita di ordine $\dfrac{1}{2}$ nei punti $1, -1, \dfrac{1}{k}, -\dfrac{1}{k}$, perchè

$$\lim_{x=\pm 1} \sqrt{1 \mp x}\,\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x)}} = \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}},$$

$$\lim_{x=\pm\frac{1}{k}} \sqrt{\frac{1}{k} \pm x} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \sqrt{\frac{k}{2(k^2-1)}},$$

e quindi è integrabile in intervalli cui appartengono anche i punti $1, -1, \frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$. Così pure è integrabile in qualunque intervallo, cui appartengono i punti a, b, c,.... la funzione

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots}},$$

sottointendendo, per funzioni come queste, di considerare valori di x pei quali esse sono reali.

2) La funzione $\log \operatorname{sen} x$ diviene infinita nel punto zero, e l'ordine del suo infinito è minore di qualunque numero positivo [1]), giacchè, se $\mu > 0$,

$$\lim_{x=0} x^\mu \log \operatorname{sen} x = \lim_{x=0} x^\mu \left(\log \frac{\operatorname{sen} x}{x} + \log x\right) = 0,$$

e noi possiamo supporre anche $\mu < 1$. Quindi essa è integrabile in ogni intervallo cui appartenga anche il punto zero, ed ha perciò significato l'integrale $\int_0^x \log \operatorname{sen} x \, dx$.

3) Non sono integrabili, in un intervallo cui appartenga il punto a, le funzioni $\frac{e^{x-a}}{x-a}$, $\frac{1}{\operatorname{sen}(x-a)}$ perchè esistono intorni alla destra e alla sinistra del punto a nei quali esse mantengono lo stesso segno, e divengono in a infinite di primo ordine.

4) La funzione $\frac{1}{\operatorname{sen} x(\log x)^n}$, dove supporremo $n > 1$, diviene infinita nel punto *uno*, come è chiaro, e nel punto *zero* perchè

$$\lim_{x=0} [\operatorname{sen} x(\log x)^n] = \lim \left[\frac{\operatorname{sen} x}{x} x(\log x)^n\right] = 0.$$

---

[1]) L'ordine di infinito delle funzioni $\log x$, $\log \operatorname{sen} x$, $\log \operatorname{tg} x$,... e simili, p r x convergente a zero, è minore di qualunque numero positivo, senza essere z o; quindi è una grandezza non rappresentabile nel comune campo dei n neri.

Ma pel punto *zero* abbiamo

$$\lim_{x=0} \frac{x(\log x)^{1+\mu}}{\operatorname{sen} x(\log x)^n} = \lim \left[\frac{x}{\operatorname{sen} x} \frac{1}{(\log x)^{n-1-\mu}} \right] = 0,$$

prendendo μ positivo e $< n - 1$; e, pel punto 1, abbiamo

$$\lim_{x=1} \frac{x-1}{(\log x)^n} = \lim \frac{x}{n(\log x)^{n-1}} = \infty;$$

quindi la nostra funzione è integrabile in qualunque intervallo cui appartenga anche il punto *zero*, ma non il punto *uno*.

5) Non possiamo applicare alle funzioni $\frac{1}{x^2} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, $\cos \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, che divengono infinite nel punto zero, il nostro teorema, perchè la prima parte di esso non ci dà alcuna indicazione circa alla loro integrabilità, e la seconda non può applicarsi perchè negli intorni del punto zero esse subiscono continui cangiamenti di segno. Però, osservando che la prima funzione è la derivata di $\cos \frac{1}{x}$, la seconda di $x \cos \frac{1}{x}$, per x diverso da zero, abbiamo

$$\int_0^x \frac{1}{x^2} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \, dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_\varepsilon^x \frac{1}{x^2} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \, dx = \lim_{\varepsilon=0} \left(\cos \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{\varepsilon} \right),$$

e, poichè il limite non esiste, la funzione $\frac{1}{x^2} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ non è integrabile in un intervallo cui appartenga il punto zero; invece la seconda funzione è integrabile perchè

$$\int_0^x \left(\cos \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) dx = \lim_{\varepsilon=0} \left(x \cos \frac{1}{x} - \varepsilon \cos \frac{1}{\varepsilon} \right) = x \cos \frac{1}{x}.$$

67. Vediamo ora se e come vengano modificati i principali teoremi, che abbiamo precedentemente dimostrati nell'ipotesi che la funzione integranda $f(x)$ fosse finita, quando questa, mantenendo integrabile, divenga infinita in un numero finito di punti dell'intervallo di integrazione (a, b), supponendo per fissare le idee $a < b$.

Posto $\varphi(x) = \int_a^x f(x)\,dx$, è facile vedere che la $\varphi(x)$ è anche continua nei punti di infinito della $f(x)$. Sia x un tal punto, e c indichi un punto qualunque tra a e x tale che tra c e x non vi sia alcun infinito di $f(x)$. Allora, posto $\int_c^y f(x)\,dx = \psi(y)$, abbiamo

$$\varphi(x) = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^x f(x)\,dx = \varphi(c) + \lim_{h=0} \int_c^{x-h} f(x)\,dx = \varphi(c) + \lim_{h=0} \psi(x-h)$$

$$= \lim_{h=0} [\varphi(c) + \psi(x-h)] = \lim_{h=0} \varphi(x-h),$$

la quale ci dice che la $\varphi(x)$ è continua nel punto x a sinistra.

Inoltre abbiamo

$$\varphi(x+h) = \lim_{h'=0} \int_a^{x-h'} f(x)\,dx + \lim_{h'=0} \int_{x+h'}^{x+h} f(x)\,dx = \varphi(x) + \lim_{h'=0} \int_{x+h'}^{x+h} f(x)\,dx,$$

dove è supposto $h' < h$, cosichè, assegnato σ, esiste un intorno c_h alla destra di x per tutti i punti $x + h'$ del quale, escluso x, è

$$(1) \qquad \left| \varphi(x+h) - \varphi(x) - \int_{x+h'}^{x+h} f(x)\,dx \right| < \frac{\sigma}{2};$$

d'altra parte, poichè $f(x)$ è integrabile in (a, b), esiste pure un intorno c alla destra di x, per tutte le coppie $x + h''$, $x + h'''$ $(h'' < h''')$ del quale, escluso x, è $\left| \int_{x+h''}^{x+h'''} f(x)\,dx \right| < \frac{\sigma}{2}$; se $x + h$ è un punto qualunque di questo intorno, pei punti $x + h'$ comuni a c e a c_h, oltre alla (1) è verificata pure la $\left| \int_{x+h'}^{x+h} f(x)\,dx \right| < \frac{\sigma}{2}$, e quindi per tutti i punti $x + h$ di c sarà

$$| \varphi(x+h) - \varphi(x) | < \sigma,$$

cioè la $\varphi(x)$ è continua anche alla destra del punto x.

Riguardo alla derivata, abbiamo visto nei n. 187, 197 del vol. I. come si comporti la funzione $\varphi(x)$, se nel punto x la $f(x)$ è finita.

Se poi nel punto x la funzione diviene infinita, ma esiste un suo intorno nel quale (il punto x escluso) la $f(x)$ si mantiene continua, abbiamo la formola nota

$$(2) \qquad \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = \varphi'(x+\theta h) = f(x+\theta h),$$

cosichè se il punto x è un vero e proprio infinito della $f(x)$ cioè se $\lim\limits_{\varepsilon=0} f(x+\varepsilon) = \pm\infty$, allora nel punto x la $\varphi(x)$ ha una derivata infinita; ma se il punto x non è un vero e proprio infinito della $f(x)$, cioè se avvicinandoci al punto x la $f(x)$ prende *anche* valori numericamente maggiori di qualunque numero positivo prefissato, rimarrà dubbio su ciò che avvenga della $\varphi(x)$ relativamente alla sua derivata in x.

Così ad es: l' integrale

$$\varphi(x) = \int_{-a}^{x} \left(\cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) dx = x\cos\frac{1}{x} + a\cos\frac{1}{a}$$

non ammette derivata nel punto zero, perchè non esiste il limite per $h=0$ di $\dfrac{\varphi(0+h)-\varphi(0)}{h} = \cos\dfrac{1}{h}$; mentre invece l' integrale

$$\varphi(x) = \int_{-a}^{x} \left[2x\cos\left(e^{\frac{1}{x}}\right) + e^{\frac{1}{x}}\operatorname{sen}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)\right] dx$$

$$= x^2\cos\left(e^{\frac{1}{x}}\right) - a^2\cos\left(e^{-\frac{1}{a}}\right)$$

ammette derivata nel punto zero, perchè

$$\lim_{h=0}\frac{\varphi(0+h)-\varphi(0)}{h} = \lim h\cos\left(e^{\frac{1}{h}}\right) = 0.$$

Lo stesso dubbio avrà luogo se non esiste un intorno del punto x nel quale la $f(x)$ si mantiene continua (come ad es: se il punto x fosse punto limite di un gruppo di punti in cui $f(x)$ è discontinua), perchè allora la $\varphi(x)$ non ammettendo, o non potendo noi asserire che in quell' intorno ammetta sempre, derivata, non potremo stabilire la formola (2).

Supponiamo ora che la $f(x)$ non abbia discontinuità di seconda specie in (a, b), e che esista una funzione $F(x)$ finita e continua tale, che nei punti x ove $f(x)$ è continua sia $F'(x) = f(x)$ e nei punti x ove è discontinua sia $F'_d(x) = f\,x + 0)$, $F'_s(x) = f(x - 0)$; allora avrà luogo la formola

$$(3) \qquad F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)\,dx.$$

Invero, se $a_1, a_2, \ldots a_n$ indicano gli infiniti di $f(x)$ tra a e x avremo:

$$(4) \begin{cases} F(a_1 - \varepsilon) - F(a) = \int_a^{a_1 - \varepsilon} f(x)dx, \quad F(a_2 - \varepsilon) - F(a_1 + \varepsilon) = \int_{a_1 + \varepsilon}^{a_2 - \varepsilon} f(x)dx, \ldots \\ F(x) - F(a_m + \varepsilon) = \int_{a_m + \varepsilon}^{x} f(x)dx, \end{cases}$$

e sommando e passando al limite per ε convergente a zero, osservando che la $F(x)$ è funzione continua in (a, b), si ha appunto la (2).

Sono ovvie le modificazioni da introdursi nella dimostrazione se il punto a, o il punto x, o tutti e due fossero punti di infinito di $f(x)$.

Notiamo poi che se la $f(x)$ non ha discontinuità di seconda specie, ma nulla si sa sulla sua integrabilità in quanto ha nell'intervallo (a, b) degli infiniti, ma solo si sa che è integrabile in qualunque parte dell'intervallo che non ne contenga, la esistenza della $F(x)$ porta per conseguenza la integrabilità della $f(x)$, giacchè allora gli integrali (4) hanno limite determinato finito per ε convergente a zero.

In particolare, se $f(x)$ avendo un numero finito d'infiniti in (a, b) è del resto sempre continua e $F(x)$ è una funzione finita e continua, per la quale nei punti ove $f(x)$ è finita è $F'(x) = f(x)$, cioè e $\int f(x)dx = F(x)$ per tutti i punti x ove $f(x)$ è finita, allora

la $f(x)$ sarà integrabile in (a, b) ed avremo

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)dx.$$

Così ad esempio, poichè $\frac{d}{dx}(3\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ pei valori di x diversi da zero, si può subito asserire che $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ è integrabile in qualunque intervallo, cui appartenga anche il punto zero, e scrivere ad es: $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 6.$

La funzione $\frac{-1}{x}$ ha per derivata $\frac{1}{x^2}$ per x diverso da zero, ma non è finita nel punto zero; non potremo quindi, applicando le precedenti considerazioni, concluderne che $\frac{1}{x^2}$ è integrabile in un intervallo cui appartiene il punto zero; e riconosciamo invece, o col calcolo diretto dell' integrale, o applicando il teorema n. 66, che non lo è.

68. *Se le funzioni* f(x), F(x) *sono integrabili in* (a, b), *e sono pure integrabili* |f(x)|, |F(x)|, *e alcun punto di infinito di* f(x) *non coincide con alcun punto di infinito di* F(x), *allora il prodotto* f(x). F(x) *è pure integrabile in* (a, b).

Invero sia a_1 un infinito, poniamo, di $f(x)$; per uno dei relativi integrali singolari $\int_{a_1-\delta'}^{a_1-\delta} f(x)\, F(x)dx$ abbiamo

$$\left| \int_{a_1-\delta'}^{a_1-\delta} f(x)\, F(x)\, dx \right| < M \int_{a_1-\delta'}^{a_1-\delta} |f(x)|dx,$$

dove M indica un numero maggiore dei valori di $|F(x)|$ nell'intervallo $(a_1 - \delta', a_1 - \delta)$, e, poichè l'integrale del secondo membro ha, per ipotesi, zero per limite al diminuire nel modo indicato dell'intervallo di integrazione, anche il nostro integrale singolare avrà per limite zero. Lo stesso si dimostra per l'altro integrale singolare.

Notiamo che il teorema potrebbe non sussistere se qualche infinito di $f(x)$ coincidesse con qualche infinito di $F(x)$. Così ad esempio è integrabile in un intervallo cui appartiene il punto *uno* la funzione $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ma non la funzione

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

69. Il primo teorema della media (Vedi n. 58) si mantiene ancora valido se la funzione $f(x)$, che è positiva in (a, b), ha un numero finito d'infiniti in (a, b) ed è integrabile. Infatti, supponendo per semplicità che vi sia un solo infinito c in (a, b), avremo, indicato con m, M il limite inferiore e superiore dei valori di $\varphi(x)$ in (a, b),

$$m \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx \leq \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\varphi(x)dx \leq \mathrm{M} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx,$$

$$m \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx \leq \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,\varphi(x)dx \leq \mathrm{M} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx,$$

le quali, essendo valide per quanto piccolo sia ε, danno, al limite,

$$m \int_a^{c} f(x)dx \leq \int_a^{c} f(x)\,\varphi(x)dx \leq \mathrm{M} \int_a^{c} f(x)dx,$$

$$m \int_c^{b} f(x)dx \leq \int_c^{b} f(x)\,\varphi(x)dx \leq \mathrm{M} \int_c^{b} f(x)dx,$$

e quindi

$$m\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x)\,\varphi(x)dx \leq M\int_a^b f(x)dx.$$

Si intende come questa dimostrazione si estenda subito al caso di più infiniti, in numero finito, di $f(x)$ in (a, b).

Il secondo teorema della media (vedi n. 61) vale ancora se la funzione $f(x)$ diventa infinita in (a, b), purchè $f(x)$ e $f(x).\varphi(x)$ siano integrabili in (a, b).

Invero, ricordando che questo teorema si deduce dalla formola

$$m\varphi(a) \leq \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \leq M\varphi(a),$$

dove m, M indicano il minimo e massimo dei valori di $\int_a^x f(x)dx$ pei valori di x da a a b, dimostriamo che essa ha ancora luogo. Ciò si vede subito, osservando che, ove c sia un punto di infinito di $f(x)$ in (a, b), avremo

$$m\varphi(a) \leq \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\varphi(x)dx \leq M\varphi(a)\,,\quad m\varphi(a) \leq \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \leq M\varphi(a).$$

70. Il cambiamento di variabile in un integrale $\int_a^b f(x)dx$, nel quale la funzione $f(x)$ diviene infinita in (a, b) ed è integrabile, si opera nello stesso modo come se la $f(x)$ fosse finita, purchè valgano le relative formole di trasformazione nelle parti di (a, b) che non contengono infiniti di $f(x)$; poichè, se c è un punto d'infinito, avremo

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx = \int_\alpha^{\gamma-\delta} f[x(t)]\,x'(t)dt,$$

essendo $a = x(\alpha)$, $c = x(\gamma)$, e δ quantità che converge a zero con ε; quindi al limite, per ε convergente a zero,

$$\int_a^c f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f[x(t)]\, x'(t)dt,$$

ed analogamente

$$\int_c^b f(x)dx = \int_\gamma^\beta f[x(t)]\, x'(t)dt,$$

e perciò

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[x(t)]\, x'(t)dt.$$

Notiamo che la funzione $f[x(t)]\, x'(t)$, mentre non può acquistare nuovi infiniti, potrà perderne, cioè potrà avvenire che in punti di (α, β), corrispondenti a punti di infinito di $f(x)$ in (a, b), essa si mantenga finita. Così ad esempio, posto $x = \operatorname{sen} t$, abbiamo

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 t}},$$

e la funzione $\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 t}}$ si mantiene finita per $t = \dfrac{\pi}{2}$.

Per dare un esempio dell'utilità del cambiamento di variabile pel calcolo effettivo degli integrali, si voglia, osservando che la funzione integranda è integrabile, calcolare

$$I = \int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Poniamo $x = \operatorname{sen} t$, ed avremo

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{sen} t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \left(2 \operatorname{sen} \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}\right) dt$$

$$= \frac{\pi}{2} \log 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{sen} \frac{t}{2} \, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos \frac{t}{2} \, dt,$$

e ponendo nell'ultimo integrale $t = \pi - t_1$, o, come suol dirsi, cambiando t in $\pi - t$, è

$$I = \frac{\pi}{2} \log 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{sen} \frac{t}{2} \, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{sen} \frac{t}{2} \, dt$$

$$= \frac{\pi}{2} \log 2 + \int_0^{\pi} \log \operatorname{sen} \frac{t}{2} \, dt;$$

ed infine, cambiando t in $2t$ nell'ultimo integrale, è

$$I = \frac{\pi}{2} \log 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{sen} t \, dt = \frac{\pi}{2} \log 2 + 2 I,$$

da cui

$$\int_0^1 \frac{\log x \, dx}{\sqrt{1 - x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{sen} x \, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2.$$

Relativamente al cambiamento di variabile in un integrale definito, sia che la funzione integranda si mantenga finita sia che non si mantenga tale nell'intervallo di integrazione, noteremo poi che il teorema per la frasformazione, che suppone univalente la funzione trasformatrice $x = x(t)$, sussiste ancora, come è naturale, se per $x(t)$ si prende un ramo univalente di una funzione a più valori, purchè

tutte le condizioni dell'enunciato del teorema siano soddisfatte. Ove ciò non avvenisse in tutto l'intervallo (a, b), se questo potrà spezzarsi in un numero finito di parti in ciascuna delle quali tutte quelle condizioni siano soddisfatte, si potrà applicare il teorema a ciascun integrale relativo a ciascuna di queste parti, integrali la cui somma uguaglia $\int_a^b f(x)dx$; otterremo così delle formole analoghe alle (2), n. 62, ma da esse non sempre potremo passare alla formola (1) n. 62. Supponiamo ad es. $a < b$, e $x_1(t)$, $x_2(t)$ due rami univalenti di una funzione plurivalente, e sia $x_1(\alpha) = a$, $x_1(\beta) = b_1$, $x_2(\beta) = b$, $x_1(\gamma) = x_2(\gamma) = c$, $a < b_1 < c < b$, $\alpha < \beta < \gamma$. Assumiamo per funzione trasformatrice $x = x(t)$ la funzione continua costituita da $x_1(t)$ pei valori di t da α a γ e dalla $x_2(t)$ pei valori di t da γ a β; e questi rami siano tali che, mentre la t sempre crescendo prende i valori $\alpha \ldots \beta \ldots \gamma$, la x sempre crescendo prenda i valori $a \ldots b_1 \ldots c$, e mentre t sempre decrescendo prende i valori da γ a β, la x sempre crescendo prenda i valori da c a b. Allora abbiamo

$$\int_a^c f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f[x_1(t)]\, x'_1(t)\, dt, \quad \int_c^b f(x)dx = \int_\gamma^\beta f[x_2(t)]\, x'_2(t)dt,$$

e quindi ancora

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f[x_1(t)]\, x'_1(t)dt + \int_\gamma^\beta f[x_2(t)]\, x'_2(t)dt,$$

e. quantunque si soglia anche scrivere

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f[x(t)]\, x'(t)dt + \int_\gamma^\beta f[x(t)]\, x'(t)dt,$$

è chiaro che si commetterebbe errore scrivendo

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[x(t)]\, x'(t)dt.$$

Esempio. — Sia $I = \int_0^\pi f(x)\,dx$, e si ponga $x = \text{arc sen}\, t$, prendendo così $x(t) = \text{arc sen}\, t$. Ora, per potersi servire di questa posizione per trasformare l'integrale I in altri colla variabile corrente di integrazione t, bisogna non limitarsi a considerare i valori di arc sen t compresi tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, come si è fatto nel Vol. I n. 9, ma bisognerà considerare i valori di arc sen t compresi tra 0 e π, cosichè indicando con Arc sen t il più piccolo arco il cui seno è t, noi considereremo della funzione arc sen t i due rami $x_1(t) = \text{Arc sen}\, t$, $x_2(t) = \pi - \text{Arc sen}\, t$, e poichè abbiamo $x_1(0) = 0$, $x_1(1) = x_2(1) = \frac{\pi}{2}$, $x_2(0) = \pi$, e tutte le condizioni richieste sono soddisfatte, avremo

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx = \int_0^1 \frac{f(\text{Arc sen}\, t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}} - \int_1^0 \frac{f(\pi - \text{Arc sen}\, t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$= \int_0^1 \frac{f(\text{Arc sen}\, t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_0^1 \frac{f(\pi - \text{Arc sen}\, t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

71. In tutti gli integrali definiti finora considerati si è supposto sempre finito l'intervallo di integrazione (a, b); passiamo ora a considerare gli integrali, nei quali la variabile corrente di integrazione possa assumere valori numericamente maggiori di qualunque numero positivo prefissato, o, come suol dirsi, gli integrali definiti con limiti infiniti.

Supposto che la $f(x)$ sia integrabile (finita o no) in qualunque intervallo (a, b) per quanto grande si fissi il numero positivo b (condizione che, senza più esprimerla, supporremo sempre verificata per le funzioni che ora tratteremo) noi poniamo la definizione

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b=\infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$

e diciamo che la $f(x)$ è integrabile nell'intervallo (a, ∞) se detto limite esiste ed è finito; non integrabile negli altri casi.

Analogamente poniamo

$$\int_a^{-\infty} f(x)\,dx = \lim_{b=\infty} \int_a^{-b} f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{a=\infty \\ b=\infty}} \int_{-a}^{b} f(x)\,dx,$$

e, come è chiaro, possiamo limitarci a considerare, per semplicità, i soli integrali $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$.

La condizione necessaria e sufficiente affinchè esista e sia finito il $\lim_{b=\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ è che, dato σ, esista un numero c positivo, tale che per tutti i valori di γ, γ' maggiori di c sia $\left| \int_a^{\gamma'} f(x)dx - \int_a^{\gamma} f(x)\,dx \right| < \sigma$, ossia tale che, per $\gamma > c$ e per qualunque numero positivo ε, sia

$$\left| \int_a^{\gamma+\varepsilon} f(x)\,dx - \int_a^{\gamma} f(x)\,dx \right| = \left| \int_{\gamma}^{\gamma+\varepsilon} f(x)\,dx \right| < \sigma;$$

cosichè, chiamando *integrali definiti singolari* gli integrali $\int_{\gamma}^{\gamma+\varepsilon} (x)dx$ dove γ è comunque grande e positivo ed ε è numero positivo qualunque, vediamo che: *la condizione necessaria e sufficiente affinchè la* f(x) *sia integrabile nell' intervallo* (a, ∞) *è che l' integrale singolare* $\int_{\gamma}^{\gamma+\varepsilon} f(\ )dx$, *abbia per limite zero al crescere di* γ, *qualunque sia* ε *positivo*.

ESEMPI

1) $$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b=\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim(\text{arc tg } b - \text{arc tg } 0) = \frac{\pi}{2}.$$

2) $$\int_0^\infty e^{-a^2x}dx = \lim_{b=\infty}\int_0^b e^{-a^2x}dx = \lim\left[-\frac{1}{a^2}e^{-a^2b} + \frac{1}{a^2}\right] = \frac{1}{a^2}.$$

3) La funzione e^{a^2x} non è integrabile nell'intervallo $(0, \infty)$, in quanto il limite per $b=\infty$ di $\int_0^b e^{a^2x}\,dx$ è l'infinito, poichè

$$\lim_{b=\infty}\int_0^b e^{a^2x}dx = \lim\left[\frac{1}{a^2}e^{a^2b} - \frac{1}{a^2}\right] = \infty.$$

4) Le funzioni sen x, cos x non sono integrabili nell'intervallo (a, ∞) perchè non esistono i limiti di $\int_a^b \text{sen } x\,dx = -\cos b + \cos a$, e di $\int_a^b \cos x\,dx = \text{sen } b - \text{sen } a$, per b crescente indefinitamente.

5) L'integrale singolare relativo alla funzione $\log(3 - \text{sen } x)$ è

$$\int_\gamma^{\gamma+\varepsilon} \log(3 - \text{sen } x)dx > \log 2\int_\gamma^{\gamma+\varepsilon} dx = \varepsilon \log 2,$$

e quindi, non potendo avere zero per limite al crescere di γ qualunque sia ε, la funzione $\log(3 - \text{sen } x)$ non è integrabile nell'intervallo (a, ∞).

6) Per la funzione e^{-x^2}, poichè $\lim_{x=\infty} x^2 e^{-x^2} = 0$, avremo

$$\int_\gamma^{\gamma+\varepsilon} e^{-x^2}dx = \int_\gamma^{\gamma+\varepsilon} x^2 e^{-x^2}\frac{dx}{x^2} < c\int_\gamma^{\gamma+\varepsilon}\frac{dx}{x^2} = c\left[\frac{-1}{\gamma+\varepsilon} + \frac{1}{\gamma}\right],$$

dove c è un certo numero positivo, e perciò, essendo zero il limite dell' integrale singolare, essa è integrabile nell' intervallo (a, ∞).

72. Il teorema seguente serve spesso per decidere della integrabilità di una funzione in un intervallo (a, ∞):

La funzione f(x) *è integrabile nell' intervallo* (a, ∞) *se esiste un numero positivo* γ *tale che, per tutti gli* $x \geqq \gamma$, *uno dei prodotti*

$$x^{1+\mu} f(x), x(\log x)^{1+\mu} f(x), x \log x (\log \log x)^{1+\mu} f(x), \ldots$$

dove μ *è numero positivo, si mantenga minore numericamente di un certo numero positivo* k *(in particolare se la* f(x) *al crescere indefinitamente di* x *diviene infinitesima di ordine uguale o superiore a quello di*

$$\frac{1}{x^{1+\mu}}, \frac{1}{x(\log x)^{1+\mu}}, \frac{1}{x \log x(\log \log x)^{1+\mu}}, \ldots\Big);$$

e la f(x) *non è integrabile in* (a, ∞), *perchè* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *avrebbe un valore infinito, se per* $x \geqq \gamma$ *la* f(x) *mantiene sempre lo stesso segno ed uno dei prodotti*

$$x f(x), x \log x . f(x), x \log x \log \log x . f(x), \ldots$$

si mantiene sempre numericamente maggiore di un certo numero positivo k *(in particolare se la* f(x) *al crescere indefinitamente di* x *si mantiene discosta da zero più di una certa quantità, o, se diviene infinitesima, lo diviene di ordine uguale o inferiore a quello di*

$$\frac{1}{x}, \frac{1}{x \log x}, \frac{1}{x \log x \log \log x}, \ldots,\Big).$$

La dimostrazione di questo teorema è completamente analoga a quella del teorema al n. 66, talchè possiamo lasciare al lettore la cura di esercitarsi ad effettuarla.

Esempi

1 È integrabile la funzione $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ nell' intervallo (a, ∞) perchè.

al crescere di x indefinitamente, diviene infinitesima di ordine secondo, avendosi

$$\lim_{x=\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = \lim \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^4}+1}} = 1;$$

e non è integrabile la funzione $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}$, perchè, al crescere di x. si mantiene sempre positiva, e diviene infinitesima di ordine $\frac{2}{3}$, avendosi $\lim_{x=\infty} x^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}} = \lim \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+1}} = 1.$

2) Sono integrabili nell' intervallo $(a\ ,\ \infty)$ le funzioni $\operatorname{sen}\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{(\log x)^2} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, perchè $\lim_{x=\infty} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x^2} = \lim \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 1$,

$\lim_{x=\infty} x(\log x)^2 \frac{1}{(\log x)^2} \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$; e non sono integrabili le funzioni

$$\frac{3}{2} - \sqrt[3]{\operatorname{sen} x}\ ,\quad \frac{\log x}{1+x(\log x)^2}\ ,\quad \frac{(\log x)^2}{(\log x)^3 + x \log\log x}$$

perchè al crescere di x si mantengono tutte positive, e la prima è sempre $\geqq \frac{1}{2}$, e per le altre due abbiamo

$$\lim_{x=\infty} x \log x \frac{\log x}{1+x(\log x)^2} = \lim \frac{1}{\frac{1}{x(\log x)^2}+1} = 1,$$

$$\lim_{x=\infty} x \log x \log\log x \frac{(\log x)^2}{(\log x)^3 + x \log\log x} = \lim \frac{1}{\frac{1}{x \log\log x} + \frac{1}{(\log x)^3}} = \infty.$$

3) Le funzioni $\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$, $\frac{\cos x}{x^2}$ sono integrabili in (a, ∞), perchè

$$x^2 \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2} \leq 1, \qquad x^2 \frac{|\cos x|}{x^2} \leq 1.$$

4) La prima parte del teorema non ci dà nessuna indicazione intorno alla integrabilità della funzione $\frac{1}{x} \operatorname{sen} x$, e la seconda non può venire applicata perchè la funzione ha continui cangiamenti di segno al crescere di x. Lo stesso dicasi per le funzioni $\operatorname{sen}(x^2)$, $\cos(x^2)$; ma vedremo tra breve che tutte sono integrabili.

73. La trasformazione degli integrali con limiti infiniti si opera come quella per gli integrali con limiti finiti, purchè le formole di trasformazione valgano per quanto grande si fissi l'intervallo di integrazione. Invero, abbia significato l'$\int_a^\infty f(x)dx$, e posto $x = x(t)$ sia valida la formola

$$\int_a^x f(x)\, dx = \int_\alpha^t f[x(t)]\, x'(t)\, dt$$

per quanto grande si fissi il limite superiore x dell'integrale. Allora se $\lim_{t=\gamma} x(t) = \infty$, cioè se al crescere indefinito di x la t converge ad un limite finito γ, avremo

$$(1) \qquad \int_a^\infty f(x)dx = \lim_{x=\infty} \int_a^x f(x)dx = \lim_{t=\gamma} \int_\alpha^t f[x(t)]x'(t)dt = \int_\alpha^\gamma f[x(t)]x'(t)\, dt,$$

come volevasi provare; oppure avverrà che sia $\lim_{t=\infty} x(t) = \infty$ ed allora

$$(2) \qquad \int_a^\infty f(x)dx = \lim_{x=\infty} \int_a^x f(x)dx = \lim_{t=\infty} \int_\alpha^t f[x(t)]x'(t) = \int_\alpha^\infty f[x(t)]\, x'(t)dt,$$

come volevasi provare.

Supponiamo ora integrabile in (a, b) la $f(x)$, e sia $\lim_{t=\alpha} x(t) = b$; avremo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x=b} \int_a^x f(x)dx = \lim_{t=\alpha} \int_\alpha^t f[x(t)]\, x'(t)dt = \int_\alpha^\infty f[x(t)]\, x'(t)dt,$$

che serve a passare da un integrale con limiti finiti ed un altro con uno dei limiti infinito.

Notiamo poi che le formole (1), (2), qualora non si sappia se la $f(x)$ sia integrabile in (a, ∞) restando però ferme le altre condizioni solite, ma si trovi che è integrabile $f[x(t)]\, x'(t)dt$ nell'intervallo (α, γ) o nell'intervallo (α, ∞), servono a mostrarci la integrabilità di $f(x)$ nell'intervallo (a, ∞).

Esempi

1) $I = \int_0^\infty \log\left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{dx}{1+x^2}$; poniamo $x = \operatorname{tg} t$ ed avremo

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\operatorname{tg} t + \frac{1}{\operatorname{tg} t}\right) dt = -\int_0 \log(\operatorname{sen} t \cos t)\, dt$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{sen} t\, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos t\, dt,$$

e, cambiando nell'ultimo integrale t in $\frac{\pi}{2} - t$,

$$I = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{sen} t\, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \log \operatorname{sen} t\, dt = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{sen} t\, dt = \pi \log 2$$

(v. n. 70).

2) Si voglia calcolare $I = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}\,dy}{1+y}$ dove a è una frazione propria positiva.

Posto $a = \frac{m}{n}$, m, n interi positivi e $m \leq n-1$, e $y = x^n$, abbiamo $I = n \int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{x^n+1}$. Ora quando $m \leq n-1$ la funzione $\frac{x^{m-1}}{x^n+1}$ è integrabile nell'intervallo $(0, \infty)$, perchè

$$\lim_{x=\infty} x^{n-m+1} \frac{x^{m-1}}{x^n+1} = \lim \frac{x^n}{x^n+1} = 1, \text{ e } n-m+1 \geq 2.$$

Il lettore può esercitarsi a calcolare $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{x^n+1}$. A tale scopo si usino le formole dell'esercizio 12° a pagina 447, vol. I, osservando che

$$\log\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k+1}{n}\pi + 1\right) = 2\log x + \log\left(1 - \frac{2}{x}\cos\frac{2k+1}{n}\pi + \frac{1}{x^2}\right)$$

ed usando le formole note

$$\operatorname{sen}\zeta + \operatorname{sen}(\zeta+h) + \operatorname{sen}(\zeta+2h) + \ldots + \operatorname{sen}(\zeta+sh)$$
$$= \frac{\operatorname{sen}\frac{(s+1)h}{2}\operatorname{sen}\left(\zeta + \frac{sh}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{h}{2}},$$

$$\cos\zeta + \cos(\zeta+h) + \cos(\zeta+2h) + \ldots + \cos(\zeta+sh)$$
$$= \frac{\operatorname{sen}\frac{(s+1)h}{2}\cos\left(\zeta + \frac{sh}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}$$

e quella che si ottiene da quest' ultima derivandola rapporto ad h, cioè

$$-\operatorname{sen}(\zeta+h)-2\operatorname{sen}(\zeta+2h)-\ldots-s\operatorname{sen}(\zeta+sh)$$

$$=\frac{1}{2\operatorname{sen}^2\frac{h}{2}}\left\{s\operatorname{sen}\frac{h}{2}\cos\left[\zeta+\left(s+\frac{1}{2}\right)h\right]-\cos\left(\zeta+\frac{sh}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{sh}{2}\right\}.$$

Si trova così, quando m, n sono interi positivi e $m \leq n-1$,

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{x^n+1}=\frac{\pi}{n\operatorname{sen}\frac{m\pi}{n}},$$

e quindi rimane dimostrata la formola

$$\int_0^\infty \frac{y^{a-1}\,dy}{1+y}=\frac{\pi}{\operatorname{sen}a\pi},$$

se a è razionale e $0<a<1$; e vedremo in seguito che vale ancora se a è irrazionale e compreso tra 0 e 1.

Dall' ultima formola ricaviamo

$$\int_0^1 \frac{y^{a-1}\,dy}{1+y}+\int_1^\infty \frac{y^{a-1}\,dy}{1+y}=\frac{\pi}{\operatorname{sen}a\pi},$$

e, cambiando y in $\frac{1}{y}$ nel secondo integrale,

$$\int_0^1 \frac{y^{a-1}\,dy}{1+y}-\int_1^0 \frac{y^{-a}\,dy}{1+y}=\frac{\pi}{\operatorname{sen}a\pi}$$

cioè

$$\int_0^1 \frac{y^{a-1}+y^{-a}}{1+y}\,dy=\frac{\pi}{\operatorname{sen}a\pi},\quad 0<a<1.$$

3) La funzione $\frac{x^{m-1}}{x^n-1}$ (m, n interi positivi) non è integrabile nell' intervallo $(0, \infty)$ perchè nel punto *uno* diviene infinita di primo ordine, ma è integrabile la funzione $\frac{x^{m'-1}-x^{m-1}}{x^n-1}$, dove m e m' sono minori di n, perchè il fattore $x-1$ sparisce nel numeratore e denominatore, talchè la frazione ha un valore finito nel punto *uno*, e all' infinito diviene zero di ordine superiore al primo. Supposto $m'=n-m$, si calcola facilmente l' integrale $\int_0^\infty \frac{x^{n-m-1}-x^{m-1}}{x^n-1}\,dx$ calcolando prima l' integrale indefinito $\int \frac{x^{n-m-1}-x^{m-1}}{x^n-1}\,dx$ mediante le formole dell'esercizio 12° a pag. 477 vol. I, e poi passando all' integrale definito come si è indicato precedentemente. Si trova così

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-m-1}-x^{m-1}}{x^n-1}\,dx = \frac{2\pi}{n}\cot\frac{m\pi}{n},\quad 0 < m \leq n-1.$$

Se in questo integrale poniamo $x^n = y$, ricaviamo

$$\int_0^\infty \frac{y^{\frac{m}{n}-1}-y^{-\frac{m}{n}}}{1-y}\,dy = 2\pi\cot\frac{m\pi}{n},$$

e, posto $\frac{m}{n}=a$ cosichè a sia una frazione positiva, abbiamo

$$\int_0^\infty \frac{y^{a-1}-y^{-a}}{1-y}\,dy = 2\pi\cot a\pi;$$

spezzando l'integrale in due, il primo coi limiti $0, 1$, il secondo coi limiti $1, \infty$ e cambiando in quest' ultimo y in $\frac{1}{y}$, abbiamo

$$\int_0^1 \frac{y^{a-1}-y^{-a}}{1-y}\,dy = \pi\cot a\pi,$$

formola che rimane così dimostrata pei valori razionali di a compresi tra 0 ed 1, ma che, come vedremo, vale anche qualunque sia a tale che $0 < a < 1$.

4) Si voglia calcolare $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^b x\, dx$, dove $-1 < b < 1$. Ponendo $x = \operatorname{arc\,tg} y$ abbiamo $I = \int_0^{\infty} \frac{y^b\, dy}{1+y^2}$, e ponendo ancora $y = \sqrt{z}$,

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{z^{\frac{b}{2} - \frac{1}{2}}\, dz}{1+z} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{z^{\frac{b+1}{2} - 1}\, dz}{1+z},$$

e, poichè $0 < \frac{b+1}{2} < 1$, avremo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^b x\, dx = \frac{\pi}{2 \operatorname{sen} \frac{b+1}{2}\pi}, \quad -1 < b < 1.$$

Ad esempio

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}\, dx = \pi.$$

74. Se per i valori di x dell'intervallo (a, b) si ha la formola

$$\int f(x)dx = \varphi(x) + \int \psi(x)dx$$

e quindi

$$\int [f(x) - \psi(x)]dx = \varphi(x),$$

avremo

$$(1) \qquad \int_a^b [f(x) - \psi(x)]dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

ossia

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a) + \int_a^b \psi(x)dx\,;$$

cosichè, in particolare, dalla formola della integrazione per parti

$$\int f(x)F'(x)dx = f(x)\,F(x) - \int F(x)\,f'(x)dx,$$

che supponiamo abbia luogo nell'intervallo $(a\,,b)$, si ricava

$$(2) \qquad \int_a^b f(x)\,F'(x)dx = f(b)\,F(b) - f(a)\,F(a) - \int_a^b F(x)\,f'(x)dx.$$

Se poi le formole (1), o (2) valgono per quanto grande sia b, avremo

$$\lim_{b=\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b=\infty} \varphi(b) - \varphi(a) + \lim_{b=\infty} \int_a^b \psi(x)dx,$$

$$\lim_{b=\infty} \int_a^b f(x)\,F'(x)dx = \lim_{b=\infty} f(b)\,F(b) - f(a)\,F(a) - \lim_{b=\infty} \int_a^b F(x)\,f'(x)dx,$$

dalle quali risulta che, se sono determinati e finiti due dei limiti in una di queste formole, lo è pure il terzo e si ha allora

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b=\infty} \varphi(b) - \varphi(a) + \int_a^\infty \psi(x)dx,$$

$$\int_a^\infty f(x)\,F'(x)dx = \lim_{b=\infty} f(b)\,F(b) - f(a)\,F(a) - \int_a^\infty f'(x)\,F(x)\,dx.$$

ESEMPI

1) Abbiamo la formola (Vedi formola (3) pag. 496, vol. I)

$$\int \frac{x^{m+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^m\sqrt{1-x^2}}{m+1} + \frac{m}{m+1}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

dalla quale, supposto m positivo e quindi $\frac{x^{m+1}}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{x^{m-1}}{\sqrt{1-x^2}}$ integrabili nell' intervallo $(0, 1)$, ricaviamo

$$\int_0^1 \frac{x^{m+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{m}{m+1}\int_0^1 \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2) Integrando per parti abbiamo

$$\int \frac{2\alpha x \operatorname{sen} x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}\,dx = x\log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2) - \int \log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx$$

e perciò, ricordando i risultati dell' esempio 5° a pag. 439, vol. I,

$$\int_0^\pi \frac{2\alpha x \operatorname{sen} x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}\,dx$$

$$= \pi\log(1+\alpha)^2 - \int_0^\pi \log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx = \begin{cases} \pi\log(1+\alpha)^2 & \text{se } |\alpha|<1 \\ \pi\log\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)^2 & \text{se } |\alpha|>1. \end{cases}$$

(Vedi nel seguente esercizio 3° i casi $\alpha = 1$, $\alpha = -1$).

3) Proviamo ora che sono integrabili nell' intervallo $(0, \infty)$ le funzioni $\operatorname{sen}(x^2)$, $\cos(x^2)$.

Abbiamo, per i valori di x finiti e diversi da zero,

$$\int \cos(x^2)\,dx = \int 2x\cos(x^2)\,\frac{dx}{2x} = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2x} + \frac{1}{2}\int \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}\,dx,$$

dalla quale,

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{\varepsilon}^{x}\cos(x^2)\,dx=\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2x}-\lim_{\varepsilon=0}\varepsilon\,\frac{\operatorname{sen}(\varepsilon^2)}{2\varepsilon^2}+\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon=0}\int_{\varepsilon}^{x}\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}\,dx,$$

cioè, prendendo l'unità come valore di $\frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}$ nel punto zero,

$$\int_0^x\cos(x^2)\,dx=\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2x}+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}\,dx,$$

e quindi

$$\lim_{x=\infty}\int_0^x\cos(x^2)\,dx=\lim\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2x}+\frac{1}{2}\lim\int_0^x\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}\,dx,$$

e, poichè $\lim\limits_{x=\infty}\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2x}=0$ e $\frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}$ è integrabile in $(0,\infty)$ essendo $x^2\frac{|\operatorname{sen} x^2|}{x^2}\leqq 1$, abbiamo

$$\int_0^\infty\cos(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}\,dx.$$

Per riconoscere che anche $\operatorname{sen}(x^2)$ è integrabile nello stesso intervallo osserviamo che si ha

$$\int\operatorname{sen}(x^2)\,dx=-\frac{\cos(x^2)}{2x}-\frac{1}{2}\int\frac{\cos(x^2)}{x^2}\,dx,$$

per valori finiti di x e diversi da zero; ma qui non possiamo proced re come nel caso precedente, perchè $\frac{\cos(x^2)}{x^2}$ non è integrabile in n intervallo cui appartenga il punto zero, e $\frac{\cos(x^2)}{x}$ ha per limit l'infinito al diminuire di x. Ma ci serviremo di questa formola

per provare che l' integrale singolare per la funzione $\operatorname{sen}(x^2)$ ha per limite zero.

Invero abbiamo

$$\int_{\gamma}^{\gamma+\varepsilon} \operatorname{sen}(x^2)dx = -\frac{\cos[(\gamma+\varepsilon)^2]}{2(\gamma+\varepsilon)} + \frac{\cos(\gamma^2)}{\gamma} - \frac{1}{2}\int_{\gamma}^{\gamma+\varepsilon} \frac{\cos(x^2)}{x^2}\,dx$$

e quindi

$$\lim_{\gamma=\infty} \int_{\gamma}^{\gamma+\varepsilon} \operatorname{sen}(x^2)\,dx = 0,$$

qualunque sia ε, e la funzione $\operatorname{sen}(x^2)$ è integrabile nell' intervallo (a, ∞), ed in particolare nell' intervallo $(0, \infty)$.

Esercizi

1. Se m è intero maggiore dell' unità, abbiamo

$$\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\,dx$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1.3.5\ldots(m-1)}{2.4.6\ldots m}\,\dfrac{\pi}{2} & \text{se } m \text{ è pari} \\[2ex] \dfrac{2.4.6\ldots(m-1)}{3.5.7\ldots m} & \text{se } m \text{ è dispari.} \end{cases}$$

2. Posto $I_m = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ed osservando che

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{(2.4..6\ldots 2n)^2}{[1.3.5\ldots(2n-1)]^2}\,\frac{1}{2n+1},$$

si dimostri la formola di *Wallis*

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty}\left\{\frac{(2.4.6\ldots 2n)^2}{(3.5.7\ldots(2n-1))^2}\,\frac{1}{2n+1}\right\}.$$

3. Conosciamo già il valore di $\int_0^\pi \log(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2)dx$ per α diverso da ± 1; si studino questi casi $\alpha = 1$, $\alpha = -1$, e si troverà zero per valore dell' integrale.

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cot x \, dx = \frac{\pi}{2} \log 2.$

5. Studio dell' integrale $I = \int_0^\infty \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$.

Se $4ac - b^2 > 0$ è $I = \frac{\pi}{\sqrt{4ac - b^2}}$ se $a > 0$, $I = \frac{-\pi}{\sqrt{4ac - b^2}}$ se $a < 0$. Se $4ac - b^2 = 0$ è $I = \frac{2}{b}$ se a, b hanno lo stesso segno, e se hanno segno diverso $\frac{1}{ax^2 + bx + c}$ non è integrabile nell' intervallo $(0, \infty)$.

Se $4ac - b^2 < 0$, ed a, b, c hanno lo stesso segno è

$$I = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \log \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}},$$

e, se a, b, c non hanno tutte lo stesso segno, la funzione $\frac{1}{ax^2 + bx + c}$ non è integrabile nell' intervallo $(0, \infty)$.

6. Se $f(x)$ è finita e integrabile in (a, b) comunque grande sia b e $\varphi(x)$ è integrabile in (a, ∞) e non cambia segno da un certo valore di x in poi, il prodotto $f(x)\varphi(x)$ è integrabile in (a, ∞).

7. Per le precedenti funzioni $f(x)$, $\varphi(x)$ si ha $\int_a^\infty f(x)\varphi(x)\,dx = k \int_a^\infty \varphi(x)dx$, $m \leq k \leq M$, essendo m, M i limiti inferiore e superiore di $f(x)$ nell' intervallo (a, ∞) (primo teorema della media).

8. Se la funzione $f(x, y)$ è simmetrica rispetto ad x, y, e la $f\left(x, \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}$

è integrabile nell'intervallo $(0, 1)$, si ha

$$\int_0^\infty f\left(x, \frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x} = 2\int_0^1 f\left(x, \frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x}.$$

9. Se $f\left(ax + \frac{b}{x}\right)$, dove a, b sono positivi, è integrabile in $(0, \infty)$, si ha

$$\int_0^\infty f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2a}\int_\infty^{2\sqrt{ab}} f(y) \left[1 - \frac{1}{\sqrt{y^2 - 4ab}}\right] dy + \frac{1}{2a}\int_{2\sqrt{ab}}^\infty f(y) \left[1 + \frac{y}{\sqrt{y^2 - 4ab}}\right] dy$$

$$= \frac{1}{a}\int_{2\sqrt{ab}}^\infty f(x) \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 4ab}} = \frac{1}{a}\int_0^\infty f(\sqrt{x^2 + 4ab}) dx;$$

e se $f\left(a^2x^2 + \frac{b^2}{x^2}\right)$ è integrabile in $(0, \infty)$,

$$\int_0^\infty f\left(a^2x^2 + \frac{b^2}{x^2}\right) dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty f(x^2 + 2ab)\, dx.$$

10. Dalla formola $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\, dx}{1 + x^n} = \frac{\pi}{n \operatorname{sen} \frac{m\pi}{n}}$, dove m, n sono interi positivi e $m \leq n - 1$, si ricavi

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}\, dx}{(1 - x)^{\frac{m}{n}}} = \frac{\pi}{n \operatorname{sen} \frac{m\pi}{n}}.$$

Integrazione per serie

75. *Se i termini* u_n *d' una serie* $\sum_1^\infty u_n$ *sono funzioni finite di* x *ed integrabili in un intervallo* (a, b), *e in tutto questo intervallo la serie è uniformemente convergente, la sua somma* f(x) *è integrabile in* (a, b), *e la serie degli integrali* $\sum_1^\infty \int_a^b u_n\,dx$ *è convergente ed ha per somma l' integrale della serie,* $\int_a^b f(x)dx$, *cioè*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (\sum_1^\infty u_n)dx = \sum_1^\infty \int_a^b u_n\,dx\,;$$

ossia, come suol dirsi, alla nostra serie è applicabile l' integrazione termine a termine o alla funzione $f(x)$, il cui sviluppo in serie è $\sum_1^\infty u_n$, la integrazione per serie.

Invero, assegnato il numero positivo σ_1, scriviamo

$$(1) \qquad f(x) = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + R_n(x),$$

dove $n \leq m$, essendo m quel numero tale che, per $n \geq m$ e per tutti i valori di x dell'intervallo (a, b), inclusi gli estremi, è $|R_n(x)| < \sigma_1$.

Decomponiamo l' intervallo (a, b), $(a < b)$, in parti $h_1, h_2 \ldots h_p$ ed indicate con $D_{1s}, D_{2s} \ldots D_{ns}, D_{fs}, D_{Rs}$ le oscillazioni di $u_1, u_2 \ldots u_n$, $f(x)$, $R(x)$ in h_s, avremo

$$D_{fs} \leq D_{1s} + D_{2s} + \ldots + D_{ns} + D_{Rs}\,, \quad (s = 1, 2, \ldots p),$$

dalle quali, osservando che $D_{Rs} < 2\sigma_1$ perchè in tutto (a, b) è $|R(x)| < \sigma_1$, abbiamo

$$\sum_1^p h_s\, D_{fs} \leq \sum_1^p h_s\, D_{1s} + \sum_1^p h_s\, D_{2s} + \ldots + \sum_1^p h_s\, D_{ns} + (b - a)\, 2\sigma_1\,;$$

e, giacchè possiamo supporre la decomposizione di (a, b) nelle parti h_s tale che ciascuna delle somme del secondo membro risulti minore di $\frac{\sigma_1}{n}$ essendo le $u_1, u_2 \ldots$ integrabili in (a, b), avremo ancora

$$\sum_1^p h_s \, D_{fs} < \sigma_1 [1 + 2(b - a)].$$

In conseguenza, assegnato σ, e preso nelle formole precedenti $\sigma_1 = \frac{\sigma}{1 + 2(b - a)}$, risulta esistere una decomposizione di (a, b) in parti h_s, per la quale è $\sum_1^p h_s \, D_{fs} < \sigma$, e quindi la $f(x)$ è integrabile in (a, b), e rimane così dimostrata una parte del teorema.

Ciò dimostrato, siamo autorizzati a ricavare dalla (1) la formola

$$\int_a^b R_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \sum_{r=1}^{r=n} \int_a^b u_r \, dx.$$

Ma, essendo $|R_n(x)| < \sigma_1$ per $n \geqq m$ e per tutti i punti x di (a, b), è ancora

$$\left| \int_a^b R_n(x)\, dx \right| \leqq \int_a^b |R_n(x)|\, dx < \sigma_1 \int_a^b dx = \sigma_1 (b - a),$$

cosichè

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \sum_{r=1}^{r=n} \int_a^b u_r \, dx \right| < \sigma_1 (b - a),$$

e quindi, dato σ e posto $\sigma_1 = \frac{\sigma}{b - a}$, esiste un numero m tale che per $n \geqq m$ è

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \sum_{r=1}^{r=n} \int_a^b u_r \, dx \right| < \sigma,$$

la quale ci dice che $\int_a^b f(x)dx$ è il limite, per n crescente indefinitamente, della somma dei primi n termini della serie $\sum_1^\infty \int_a^b u_r\, dx$, e rimane così dimostrato completamente il teorema.

76. Se sono soddisfatte le condizioni dell'enunciato del teorema ora dimostrato, avremo ancora

$$\int_a^x f(x)\, dx = \sum_1^\infty \int_a^x u_n\, dx,$$

ove x è un punto qualunque dell'intervallo (a, b), giacchè basta ripetere per l'intervallo (a, x) la dimostrazione precedente relativa all'intervallo (a, b).

Di più osserviamo che, qualunque sia il punto x appartenente ad (a, b), arriveremo sempre mediante il precedente procedimento alla formola

$$\left| \int_a^x f(y)\, dy - \sum_{r=1}^{r=n} \int_a^x u_r\, dy \right| < \sigma,$$

valevole qualunque sia x appartenente all'intervallo (a, b) e per $n \geqq m$, dalla quale formola, osservando che la differenza nel primo membro è il resto della serie $\sum_1^\infty \int_a^x u_r\, dy$, ricaviamo che *questa serie è equiconvergente nell'intervallo* (a, b).

77. In seguito al teorema ora dimostrato, possiamo applicare ad una serie, che soddisfaccia in un intervallo (a, b) alle condizioni contenute nel suo enunciato, l'integrazione definita termine a termine tra limiti appartenenti al detto intervallo. Quando essa non soddisfaccia a tali condizioni, potrebbe anche essere che la integrazione

termine a termine sia per essa effettuabile, ma noi non siamo autorizzati senz'altro ad eseguirla; occorrerebbe allora riconoscerne in qualche altro modo la legittimità.

Esempio. Consideriamo la serie

$$\sum_1^\infty [nxe^{-nx^2} - (n+1)xe^{-(n+1)x^2}],$$

convergente per qualunque valore finito di x, avendo essa per somma xe^{-x^2}. Essa è inoltre uniformemente convergente in qualunque intervallo cui non appartenga il punto *zero*, perchè esisteranno allora due numeri a, A tali che per gli x dell'intervallo sia $a < |x| < A$, ed essendo $\frac{(n+1)x}{e^{(n+1)x^2}}$ il resto della serie e

$$\left|\frac{(n+1)x}{e^{(n+1)x^2}}\right| < \frac{(n+1)A}{e^{(n+1)a^2}} < \frac{(n+1)A}{(a+1)n^2 + \frac{(n+1)^2}{2}a^4} = \frac{2A}{2a^2 + (n+1)a^4},$$

basterà prendere m in modo che sia $\frac{2A}{2a^2 + (m+1)a^4} < \sigma$, affinchè risulti $\left|\frac{(n+1)x}{e^{(n+1)x^2}}\right| < \sigma$ per $n \geqq m$ e qualunque sia il valore di x appartenente all'intervallo. Ma se il punto *zero* appartiene all'intervallo non esiste un numero a pel quale sia $a < |x|$, e potremo sempre prendere $x = \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}$, per quanto grande sia n, e per questo valore di x il resto diviene uguale a $\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}}$.

Potremo quindi applicare alla nostra serie l'integrazione termine a termine in qualunque intervallo cui non appartenga il punto zero, ed abbiamo infatti, supposto $a > 0$ e $x > a$,

$$\int_a^x xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{1}{2}e^{-a^2} = \sum_1^\infty \left[\int_a^x nxe^{-nx^2}dx - \int_a^x (n+1)xe^{-(n+1)x^2}\right]$$

$$= \sum_1^\infty \left[-\frac{1}{2}e^{-nx^2} + \frac{1}{2}e^{-na^2} + \frac{1}{2}e^{-(n+1)x^2} - \frac{1}{2}e^{-(n+1)a^2}\right]$$

In nn intervallo cui appartenga il punto zero non possiamo senz'altra ricerca applicare l'integrazione termine a termine. Noi riscontriamo qui che in un intervallo $(0, x)$ tale procedimento non è lecito, perchè l'integrale della serie è

$$\int_0^x xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{1}{2},$$

mentre che la serie degli integrali dei termini è

$$\sum_1^\infty\left[-\frac{1}{2}e^{-nx^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-(n+1)x^2} - \frac{1}{2}\right]$$

$$= \sum_1^\infty\left[-\frac{1}{2}e^{-nx^2} + \frac{1}{2}e^{-(n+1)x^2}\right] = -\frac{1}{2}e^{-x^2};$$

invece è lecito in un intervallo $(-a, x > 0)$, perchè

$$\int_{-a}^x xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{1}{2}e^{-a^2},$$

che è uguale alla serie degli integrali dei termini,

$$\sum_1^\infty\left[-\frac{1}{2}e^{-nx^2} + \frac{1}{2}e^{-na^2} + \frac{1}{2}e^{-(n+1)x^2} - \frac{1}{2}e^{-(n+1)a^2}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{1}{2}e^{-a^2}.$$

78. Se ad una serie $\sum_1^\infty u_n$ si può applicare l'integrazione termine a termine in un intervallo $(a, b-\varepsilon)$, dove $a < b$ e ε positivo e comunque piccolo, si potrà anche applicare tale integrazione nell'intervallo (a, b), avendosi così

(1 $$\int_a^b \left(\sum_1^\infty u_n\right) dx = \sum_1^\infty \int_a^b u_n\,dx,$$

quando la serie $\sum_1^\infty \int_a^x u_n\,dx$, mantenendosi convergente per $x = b$, sia una funzione $\varphi(x)$ continua anche per $x = b$. Ciò accadrà, in particolare, quando detta serie risulti equiconvergente in un intorno del punto b (Vedi vol. I. n. 141, pag. 278).

Invero, avremo

$$\int_a^{b-\varepsilon}\left(\sum_1^\infty u_n\right)dx = \sum_1^\infty \int_a^{b-\varepsilon} u_n\,dx = \sum_1^\infty \int_a^b u_n\,dx - \left(\sum_1^\infty \int_a^b u_n\,dx - \sum_1^\infty \int_a^{b-\varepsilon} u_n\,dx\right)$$

$$= \sum_1^\infty \int_a^b u_n\,dx - [\varphi(b) - \varphi(b-\varepsilon)],$$

dalla quale, passando al limite per ε convergente a zero, abbiamo la (1).

E si intende subito come la formola (1) valga ancora se nell'intervallo (a, b) vi sieno dei punti $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, in numero finito, tali che negli intervalli $(\alpha_s + \varepsilon_s, a_s)$, $(a_s, \alpha_{s+1} - \varepsilon_{s+1})$, dove a_s indica un punto qualunque tra α_s e α_{s+1}, sussistano le stesse condizioni che abbiamo poste per il precedente intervallo $(a, b - \varepsilon)$.

In modo analogo si prova che, se alla serie $\sum_1^\infty u_n$ può applicarsi l'integrazione termine a termine in un intervallo (a, b) comunque grande si fissi b, ad essa potremo applicare la stessa integrazione nell'intervallo (a, ∞), avendo così

$$\int_a^\infty \left(\sum_1^\infty u_n\right)dx = \sum_1^\infty \int_a^\infty u_n\,dx, \tag{2}$$

quando, posto $\psi(x) = \sum_1^\infty \int_a^x u_n\,dx$, sia $\sum_1^\infty \int_a^\infty u_n\,dx = A$, dove $A = \lim_{x=\infty} \psi(x)$ è quantità finita determinata.

Invero, passando al limite per x crescente indefinitamente nella

formola

$$\int_a^x (\sum_1^\infty u_n)\,dx = \sum_1^\infty \int_a^x u_n\,dx = \sum_1^\infty \int_a^x u_n\,dx - (\sum_1^\infty \int_a^\infty u_n\,dx - \sum_1^\infty \int_a^x u_n\,dx)$$

$$= \sum_1^\infty \int_a^\infty u_n\,dx - (A - \psi(x)),$$

ricaviamo la (2).

79. La integrazione per serie è un mezzo utilissimo tanto pel calcolo degli integrali definiti e indefiniti, come anche per calcolare la somma di certe serie. Diamone alcuni

ESEMPI

1) Per $|x| < 1$ abbiamo (Vol. I, pag. 322).

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^x dx\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8 + ..\right)$$

e poichè la serie tra parentesi è equiconvergente nell'intervallo $(0, x)$ (I, n. 138, pag. 272), possiamo eseguire la integrazione termine a termine ed otterremo così

$$(1) \quad \text{arc sen}\, x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots, (|x| < 1)$$

(I, pag. 324). Ora possiamo affermare di più che questo sviluppo vale anche per $|x| = 1$. Invero la serie

$$(2) \qquad 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{7} + \ldots$$

è convergente, perchè i suoi termini sono minori dei corrispondenti della serie convergente

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1.3}{2.4.6} + \frac{1.3.5}{2.4.6.8} + \ldots,$$

che ricaviamo dalla seconda serie della pag. 322 del volume I, facendo in essa $x = -1$. In conseguenza la serie (1) è equiconvergente nell'intervallo $(-1, +1)$, e quindi lo sviluppo (1) vale anche per $x = \pm 1$. Ponendo $x = 1$, abbiamo

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{7} + \ldots$$

2) Per $|x| < 1$ abbiamo

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^x dx\left(1 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1.3}{2.4}x^8 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^{12} + \ldots\right.$$
$$\left. + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}x^{4n} + \ldots\right),$$

e, poichè possiamo integrare termine a termine, abbiamo

$$(3) \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = x + \frac{1}{2}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^9}{9} + \ldots + \frac{1.3.5..(2n-1)}{2.4.6..2n}\frac{x^{4n+1}}{4n+1} \ldots$$

se $|x| < 1$. Ma la serie del secondo membro è convergente anche per $|x| = 1$, perchè, facendovi $x = 1$, otteniamo una serie i cui termini sono minori dei corrispondenti della serie convergente (2); quindi vediamo anche qui che il precedente sviluppo vale anche per $|x| = 1$.

In quanto all'integrale indefinito, lo si ottiene dal secondo membro della (3) aggiungendovi una costante, cosichè si ha

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = x + \frac{1}{2}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^9}{9} + \ldots + C,$$

valevole nell'intervallo $(-1, +1)$ di x.

3) Supposto $0 < a < 1$, $0 < x < 1$, abbiamo

$$(4) \quad \int_0^x \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1-x}\,dx = \int_0^x dx(x^{a-1} - x^{-a})\,(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

$$= \frac{x_a}{a} - \frac{x^{-a+1}}{-a+1} + \frac{x^{a+1}}{a+1} - \frac{x^{-a+2}}{-a+2} + \frac{x^{a+2}}{a+2} - \frac{x^{-a+3}}{-a+3}$$

$$+ \frac{x^{a+3}}{a+3} - \dots$$

Ora quest' ultima serie è non solo convergente anche per $x = 1$, ma è anche equiconvergente nell' intervallo $(0, 1)$. Invero, se $a < \frac{1}{2}$, poichè allora

$$a < 1 - a < 1 + a < 2 - a < 2 + a < 3 - a < \dots,$$

i suoi termini sono alternativamente positivi e negativi e indefinitamente decrescenti, anche per $x = 1$, ciò che prova che la serie è convergente anche per $x = 1$. Inoltre, indicato con R_n il resto della serie troncata al termine m^{esimo}, abbiamo

$$R_{2n} = \left(\frac{x^{n+a}}{n+a} - \frac{x^{n+1-a}}{n+1-a}\right) + \left(\frac{x^{n+1+a}}{n+1+a} - \frac{x^{n+2-a}}{n+2-a}\right) + \dots$$

$$= \frac{x^{n+a}}{n+a} - \left(\frac{x^{n+1-a}}{n+1-a} - \frac{x^{n+1+a}}{n+1+a}\right) - \dots,$$

$$-R_{2n-1} = \left(\frac{x^{n-a}}{n-a} - \frac{x^{n+a}}{n+a}\right) + \left(\frac{x^{n+1-a}}{n+1-a} - \frac{x^{n+1+a}}{n+1+a}\right) + \dots$$

$$= \frac{x^{n-a}}{n-a} - \left(\frac{x^{n+a}}{n+a} - \frac{x^{n+1-a}}{n+1-a}\right) - \left(\frac{x^{n+1+a}}{n+1+a} - \frac{x^{n+2-a}}{n+2-a}\right) - \dots,$$

cosichè $0 < R_{2n} < \frac{x^{n+a}}{n+a} < \frac{1}{n+a}$, $0 < -R_{2n-1} < \frac{x^{n-a}}{n-a} < \frac{1}{n-a}$, e tanto R_{2n} come $|R_{2n-1}|$ sono minori di $\frac{1}{n-a}$; perciò, dato σ, baster prendere $m > \frac{1}{\sigma} + a$, affinchè, per $n \geq m$ e per tutti i valori di x dell' intervallo $(0, 1)$, inclusi gli estremi, R_{2n} e $|R_{2n-1}|$ risultino minori di σ, e la serie è quindi equiconvergente nell'intervallo $(0, 1)$.

Se $a = \frac{1}{2}$ la nostra serie è uguale a zero.

Se $a > \frac{1}{2}$, allora è

$$1 - a < a < 2 - a < 1 + a < 3 - a < 2 + a < 4 - a < \ldots;$$

ma la nostra serie possiamo anche scriverla così

$$-\frac{x^{1-a}}{1-a} + \frac{x^a}{a} - \frac{x^{2-a}}{2-a} + \frac{x^{1+a}}{1+a} - \frac{x^{3-a}}{3-a} + \frac{x^{2+a}}{2+a} - \ldots$$

perchè essa non viene con ciò a cambiare di natura e di valore, poichè le somme di uno stesso numero pari di termini a cominciare dal primo sono le stesse nelle due serie, e le somme di uno stesso numero dispari n di termini differiscono tra loro per la somma di due termini che hanno ciascuno per limite zero al crescere infinitamente di n. Ora nella serie così scritta i termini sono alternativamente positivi e negativi e indefinitamente decrescenti, cosichè, con ragionamento analogo al precedente, giungeremo alla stessa conclusione.

La nostra serie, essendo dunque uniformemente convergente nell' intervallo $(0, 1)$, passando al limite per $x = 1$ nella formola (4), possiamo prendere la serie dei limiti dei termini in luogo del limite della serie ed abbiamo così

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1-x}\, dx = \frac{1}{a} - \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} - \frac{1}{2-a} + \frac{1}{2+a} - \ldots, 0 < a < 1.$$

Ma, d' altra parte, l' integrale del primo membro essendo uguale a $\pi \cot a\pi$ [n. 73,3)], otteniamo la formola notevole

$$\cot a\pi = \frac{1}{a\pi} - \frac{1}{\pi - a\pi} + \frac{1}{\pi + a\pi} - \frac{1}{2\pi - a\pi} + \frac{1}{2\pi + a\pi} - \ldots, 0 < a < 1.$$

ossia, ponendo $a\pi = x$,

$$(5) \quad \cot x = \frac{1}{x} - \frac{1}{\pi - x} + \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{2\pi - x} + \frac{1}{2\pi + x} - \frac{1}{3\pi - x} + \ldots$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{2^2\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{3^2\pi^2 - x^2} - \ldots,$$

che noi abbiamo così dimostrata per $0 < x < \pi$. Ma è facile riconoscere che vale per qualunque valore di x che non sia multiplo di π. Invero, tanto il primo membro che il secondo hanno π per periodo, giacchè, se in luogo di x poniamo $x + \pi$, il primo membro non cambia, e neppure il secondo, perchè otteniamo una serie dalla quale, aggruppando i termini a due a due a partire dal secondo e permutandoli in ciascun gruppo, si ritorna alla serie primitiva. Cambiando x in $x - \pi$ non cambia il primo membro e la serie del secondo membro diviene una serie, dalla quale, operando nel modo precedente a partire dal secondo termine e nella serie ottenuta operando allo stesso modo a partire dal primo, si ritorna alla serie primitiva.

Se nella (5) cambiamo x in $\frac{\pi}{2} - x$ otteniamo

$$(6) \qquad \operatorname{tg} x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{\pi}{2} + x} + \frac{1}{3\frac{\pi}{2} - x} - \frac{1}{3\frac{\pi}{2} + x} + \frac{1}{5\frac{\pi}{2} - x} - \frac{1}{5\frac{\pi}{2} + x} + \dots$$

che vale per tutti i valori di x non multipli dispari di $\frac{\pi}{2}$.

Osservando che $\frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cot \frac{x}{2}$ ed applicando le formole (5), (6), otteniamo

$$(7) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{sen} x} &= \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{2\pi - x} + \frac{1}{2\pi + x} \\ &\quad + \frac{1}{3\pi - x} - \frac{1}{3\pi + x} - \frac{1}{4\pi - x} + \dots \\ &= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n\pi - x} - \frac{1}{n\pi + x} \right), \end{aligned}$$

valevole per tutti i valori di x non multipli di π; e cambiando in essa x in $\frac{\pi}{2} - x$ si ottiene

$$\frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2} - x} + \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2} + x} \right]$$

valevole pei valori di x non multipli dispari di $\frac{\pi}{2}$.

Dalla formola (5) ricaviamo

$$\int_0^x \left(\cot x - \frac{1}{x}\right) dx = \int_0^x dx \left(-\frac{1}{\pi - x} + \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{2\pi - x} + \frac{1}{2\pi + x} - \dots\right)$$

essendo $x < \pi$. Nel secondo membro possiamo integrare termine a termine, perchè la serie

$$-\frac{1}{\pi - y} + \frac{1}{\pi + y} - \frac{1}{2\pi - y} + \frac{1}{2\pi + y} - \dots$$

è equiconvergente nell'intervallo $(0, x)$, giacchè lo è nei due intervalli $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, c\right)$, essendo $c < \pi$. Invero, nel primo intervallo troviamo, con ragionamento analogo a quello sopra tenuto,

$$0 < R_{2n-1} < \frac{1}{n\pi + y} < \frac{1}{n\pi}, \quad 0 < -R_{2n-2} < \frac{1}{n\pi - y} < \frac{1}{(n-1)\pi};$$

e nel secondo intervallo, partendoci dalla serie che otteniamo dalla proposta lasciando fermo il primo termine e aggruppando i seguenti a due a due e permutandoli in ciascun gruppo, troviamo

$$0 < R_{2n} < \frac{1}{n\pi + y} < \frac{1}{n\pi}, \quad 0 < -R_{2n-1} < \frac{1}{(n+1)\pi - y} < \frac{1}{n\pi},$$

quindi etc.

Avremo adunque

$$(9) \quad \begin{cases} \log \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = \log \dfrac{\pi^2 - x^2}{\pi^2} + \log \dfrac{2^2\pi^2 - x^2}{2^2\pi^2} + \log \dfrac{3^2\pi^2 - x^2}{2^2\pi^2} + \dots \\ = \lim\limits_{n=\infty} \log \left\{ \dfrac{\pi^2 - x^2}{\pi^2} \cdot \dfrac{2^2\pi^2 - x^2}{2^2\pi^2} \cdot \dfrac{3^2\pi^2 - x^2}{3^2\pi^2} \dots \dfrac{n^2\pi^2 - x^2}{n^2\pi^2} \right\} \\ = \log \lim\limits_{n=\infty} \left\{ \dfrac{\pi^2 - x^2}{\pi^2} \cdot \dfrac{2^2\pi^2 - x^2}{2^2\pi^2} \cdot \dfrac{3^2\pi^2 - x^2}{3^2\pi^2} \dots \dfrac{n^2\pi^2 - x^2}{n^2\pi^2} \right\} \end{cases}$$

da cui

$$\operatorname{sen} x = \lim_{n=\infty} \left\{ x \, \frac{\pi^2 - x^2}{\pi^2} \, \frac{2^2\pi^2 - x^2}{2^2\pi^2} \cdots \frac{n^2\pi^2 - x^2}{n^2\pi^2} \right\}$$

$$= \lim_{n=\infty} \left\{ x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \right\}$$

o, come suole scriversi, in forma di *prodotto infinito*,

$$(10) \quad \operatorname{sen} x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4^2\pi^2}\right)\cdots,$$

formola che rimane così dimostrata per $0 < x < \pi$, ma che si vede vale ancora per $x = 0$ e $x = \pi$. E vale anche per qualunque altro valore di x; basterebbe, per dimostrare ad esempio che vale anche nell'intervallo $(0, c)$, $c < 2\pi$, partirci dalla formola

$$\cot x - \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi - x} = \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{2\pi - x} + \cdots,$$

che si ricava dalla (5), e, osservando che il primo membro è integrabile nell'intervallo $(0, c)$, integrare tra 0 e $x < \pi$. Si giungerebbe così alla formola (9), da cui si è ricavata la (10), che possiamo così ritenere dimostrata per qualunque valore finito di x.

Operando in modo analogo sulla formola (6) troviamo

$$(11) \quad \cos x = \left(1 - \frac{2^2 x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{2^2 x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{2^2 x^2}{5^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{2^2 x^2}{7^2\pi^2}\right)\cdots$$

valevole per qualunque valore finito di x.

Ponendo mente alle identità

$$u_0 u_1 = u_0 + u_0(u_1 - 1), \quad u_0 u_1 u_2 = u_0 + u_0(u_1 - 1) + u_0 u_1 (u_2 - 1), \ldots$$

$$u_0 u_1 u_2 \ldots u_n = u_0 + u_0(u_1 - 1) + u_0 u_1 (u_2 - 1) + u_0 u_1 u_2 (u_3 - 1) + \ldots$$
$$+ u_0 u_1 \ldots u_{n-1}(u_n - 1),$$

abbiamo dalla (11), posto $u_0 = 1$, $u_k = 1 - \dfrac{2^2 x^2}{(2k-1)^2\pi^2}$,

$$\cos x = \lim_{n=\infty} \left\{ \left(1 - \frac{2^2 x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{2^2 x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{2^2 x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right) \right\},$$

$$\cos x = \lim_{n=\infty} \left\{ 1 - \frac{2^2 x^2}{\pi^2} - \frac{2^2 x^2(\pi^2 - 2^2 x^2)}{\pi^2 . 3^2 \pi^2} - \frac{2^2 x^2(\pi^2 - 2^2 x^2)(3^2 \pi^2 - 2^2 x^2)}{\pi^2 . 3^2 \pi^2 . 5^2 \pi^2} \right.$$

$$\left. - \ldots - \frac{2^2 x^2(\pi^2 - 2^2 x^2)(3^2 \pi^2 - 2^2 x^2) \ldots [(2n-3)^2 \pi^2 - 2^2 x^2]}{\pi^2 . 3^2 \pi^2 . 5^2 \pi^2 \ldots (2n-1)^2 \pi^2} \right\}$$

ossia

$$\cos x = 1 - \frac{2^2 x^2}{\pi^2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^2 x^2(\pi^2 - 2^2 x^2)(3^2 \pi^2 - 2^2 x^2) \ldots [(2n-3)^2 \pi^2 - 2^2 x^2]}{\pi^2 . 3^2 \pi^2 . 5^2 \pi^2 \ldots (2n-1)^2 \pi^2}$$

valevole per qualunque valore finito di x; ponendo $x = \frac{\pi y}{2}$ e per $\cos \frac{\pi y}{2}$ l'espressione $1 - 2\left(\text{sen} \frac{\pi y}{4}\right)^2$, abbiamo ancora

$$2\left(\text{sen} \frac{\pi y}{4}\right)^2 = y^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^2(1^2 - y^2)(3^2 - y^2) \ldots [(2n-3)^2 - y^2]}{1^2 . 3^2 . 5^2 \ldots (2n-1)^2},$$

da cui

$$2\left(\frac{\text{sen} \frac{\pi y}{4}}{y}\right)^2 = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1^2 - y^2)(2^2 - y^2) \ldots [(2n-3)^2 - y^2]}{1^2 . 3^2 \ldots (2n-1)^2}.$$

La serie del secondo membro è equiconvergente in un intorno del punto $y = 0$, perchè i suoi termini sono ivi positivi e minori dei corrispondenti della serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$, che è convergente perchè i suoi termini sono minori dei corrispondenti della serie convergente

$$\frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \ldots$$

Passando al limite per $y = 0$ nella formola precedente possiamo dunque prendere, in luogo del limite della serie, la serie dei limiti dei termini, ed otteniamo così la formola notevole

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots$$

4) Se $0 < x < 1$ abbiamo

$$\int_0^x \frac{\log x dx}{1 - x^2} = \int_0^x \log x dx (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots),$$

e, poichè $\int_0^x x^n \log x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \log x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$,

otteniamo

$$\int_0^x \frac{\log x dx}{1 - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \log x - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} \right].$$

Ora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ è convergente se $|x| < 1$ ed è uguale a $\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$ (vol. I, pag. 314), e la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ è pure convergente per $|x| \leq 1$, perchè per $|x| < 1$ il rapporto d'un termine al precedente ha per limite x^2 al crescere di n, e per $|x| = 1$ si riduce alla serie convergente $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, e vediamo anche così che, per essere i termini di questa maggiori dei corrispondenti della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ per $|x| < 1$, questa ultima è equiconvergente nell'intervallo $(0, 1)$. Potremo adunque, non solo scrivere

$$\int_0^x \frac{\log x dx}{1 - x^2} = \log x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \log x \log \frac{1+x}{1-x} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2},$$

ma, passando al limite per x convergente all'unità, ottenere

$$\int_0^1 \frac{\log x dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x=1} \left[\log x \frac{\log(1+x)}{\log(1-x)}\right] - \lim_{x=1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{2} \lim[\log x \log(1-x)] - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lim x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = -\frac{\pi^2}{8}.$$

5) Volendosi calcolare $\int_0^{\infty} \frac{x^m dx}{e^x - 1}$, dove m è intero positivo [riconosciamo subito che $\frac{x^m}{e^x - 1}$ è integrabile nell'intervallo $(0, \infty)$], osserviamo che si ha

$$\int_x^y \frac{x^m dx}{e^x - 1} = \int_x^y \frac{e^{-x} x^m dx}{1 - e^{-x}} = \int_x^y x^m (e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \ldots) dx$$

$$= \int_x^y \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^m e^{-nx}\right) dx$$

se $x > 0$ e $y > x$, e, poichè possiamo integrare termine a termine e ricordando la formola dimostrata nel n. 205 vol. I, abbiamo

$$\int_x^y \frac{x^m dx}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{e^{-ny}}{-n} \left[y^m + \frac{m}{n} y^{m-1} + \frac{m(m-1)}{n^2} y^{m-2} + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots 2.1}{n^m} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-nx}}{n} \left[x^m + \frac{m}{n} x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{n^2} x^{m-2} + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots 2.}{n^m} \right] \right\}$$

che possiamo anche, giacchè le singole serie sono convergenti, sc i-

vere così

$$(12)\quad \int_x^y \frac{x^m dx}{e^x - 1} = -y^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-ny}}{n} - m y^{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-ny}}{n^2} - \ldots - m(m-1)\ldots 2.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-ny}}{n^{m+1}}$$

$$+ x^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n} + m x^{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2} + \ldots + m(m-1)\ldots 2 . 1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^{m+1}} .$$

Osserviamo ora che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-ny}}{n}$ è uniformemente convergente nell'intervallo (a, ∞), $a > 0$, perchè è convergente la serie a termini non minori $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-na}}{n}$; che le serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$,... sono convergenti, e quindi uniformemente convergenti nell'intervallo $(0, \infty)$ le serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^3}$ ..; che $\lim_{y=\infty} y^p e^{-ny} = 0$; che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n} = -\log(1 - e^{-x})$ per $x > 0$, e che $\lim_{x=\infty} x^m \log(1 - e^{-x}) = 0$. Per queste osservazioni si vedrà subito come, passando al limite nella (12) per y crescente indefinitamente e poi passando ancora al limite per x convergente a zero, potremo sempre prendere la serie dei limiti dei termini in luogo del limite di ogni serie ed ottenere così

$$\int_0^{\infty} \frac{x^m\, dx}{e^x - 1} = 1 . 2 \ldots m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{m+1}} .$$

6) Pel calcolo di alcuni integrali con limite infinito giova qualche volta procedere in modo analogo al seguente:

Si voglia conoscere se $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ è integrabile nell'intervallo $(0, \infty)$, e, ove lo sia, calcolare $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$.

Abbiamo

$$\int_0^b \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \left\{ \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} + \int_{2\pi}^{3\pi} + \ldots + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} + \int_{n\pi}^{n\pi+\alpha} \right\} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx,$$

dove $b = n\pi + \alpha$, $\alpha < \pi$.

Si riconosce subito che il primo termine del secondo membro è positivo e gli altri alternativamente negativi e positivi e decrescenti continuamente e indefinitamente in valore assoluto, perchè, posto $x = \pi + y$, abbiamo

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\operatorname{sen}(y+\pi)}{y+\pi}\, dy = -\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\operatorname{sen} y}{y+\pi}\, dy,$$

e quindi

$$\left| \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \right| < \left| \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\operatorname{sen} y}{y}\, dy \right|;$$

ed inoltre, essendo

$$\left| \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \right| < \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{dx}{x} = \log\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right),$$

$$\left| \int_{n\pi}^{n\pi+\alpha} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \right| < \log\left(1+\frac{\alpha}{n\pi}\right),$$

è ancora $\lim\limits_{n=\infty} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = 0$, $\lim\limits_{n=\infty} \int_{n\pi}^{n\pi+\alpha} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = 0$.

Cosichè la serie $\left\{ \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} + \int_{2\pi}^{3\pi} + \dots \right\} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$ essendo convergente perchè i suoi termini sono di segno alternato etc., la somma dei suoi primi n termini ha un limite finito e determinato, ed avremo

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \lim_{b=\infty} \int_0^{b} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \lim_{n=\infty} \left[\left\{ \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} + \dots + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \right\} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \right],$$

e riconosciamo così la integrabilità di $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ nell'intervallo $(0, \infty)$.

Per calcolare il valore $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$, scriviamo così:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \lim_{m=\infty}\left[\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\frac{\pi}{2}} + \int_{2\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} + \ldots + \int_{(m-1)\frac{\pi}{2}}^{m\frac{\pi}{2}}\right\} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\right].$$

ed osserviamo che, posto $x = k\pi - y$, è

$$\int_{(2k-1)\frac{\pi}{2}}^{2k\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = (-1)^{k+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} y}{k\pi - y}\,dy;$$

e, posto $x = k\pi + y$, è $\int_{2k\frac{\pi}{2}}^{(2k+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = (-1)^k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} y}{k\pi + y}\,dy$, così chè

avremo

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \lim_{m=\infty}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} y}{y}\,dy + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} y}{\pi - y}\,dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} y}{\pi + y}\,dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} y}{2\pi - y}\,dy + \ldots\right\}$$

$$= \lim_{m=\infty}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} y\left[\frac{1}{y} + \frac{1}{\pi - y} - \frac{1}{\pi + y} - \frac{1}{2\pi - y} + \ldots\right] dy\right\};$$

ma il limite della quantità tra parentesi sotto il segno integrale è $\frac{1}{\operatorname{sen} y}$ [Vedi formola (7)], quindi, potendosi prendere l'integrale del lim .te in luogo del limite dell' integrale giacchè la serie $\frac{1}{y} + \frac{1}{\pi - y} -$

è equiconvergente nell' intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, avremo in ultimo

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} y\, dy}{\operatorname{sen} y} = \frac{\pi}{2}.$$

Da questa formola ricaviamo il valore di $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} ax}{x}\, dx$.

Posto $ax = y$, se $a > 0$, abbiamo $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} ax}{x}\, dx = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{y}\, dy = \frac{\pi}{2}$;

e se $a < 0$, $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} ax}{x}\, dx = \int_0^{-\infty} \frac{\operatorname{sen} y}{y}\, dy = -\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y_1}{y_1}\, dy_1 = -\frac{\pi}{2}$; cosichè

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} ax}{x}\, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se} \quad a > 0 \\ 0 & \text{»} \quad a = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{»} \quad a < 0. \end{cases}$$

Questo integrale ci dà un esempio di una funzione della quantità a, che per a positivo ha un valore costante, per a negativo un altro valore costante ed ha così una discontinuità di prima specie per $a = 0$, dove prende il valore medio dei valori che assume per a positivo e per a negativo.

Esercizi

1. $$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \quad \text{se } 0 < x < 1,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1.3...(2n-1)}{2.4...2n} \frac{1}{4n-1},$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = 2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1.3...(2n-1)}{2.4...2n} \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{x}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{1.3...(2n-1)}{2.4...2n} \frac{1}{(4n+1)x^{4n+1}} \text{ se } x > 1.$$

2. $$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}\, dx = -\frac{\pi^2}{6}.$$

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{1+k \operatorname{sen} x}{1-k \operatorname{sen} x}\right) \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \pi \operatorname{arc\,sen} k \ , \ |k| \leq 1.$$

4. $$\int_0^{\pi} \log(1+k\cos x) \frac{dx}{\cos x} = \pi \operatorname{arc\,sen} k \ , \ |k| \leq 1.$$

5. Posto $I = \int_0^1 \frac{x \log x\, dx}{1-x^2}$ si trovi la relazione $-\frac{\pi^2}{8} + I = 4I$,

da cui $I = -\frac{\pi^2}{24}$, e se ne ricavi

$$\int_0^1 \frac{\log x\, dx}{1-x} = -\frac{\pi^2}{6}, \quad \int_0^1 \frac{\log x\, dx}{1+x} = -\frac{\pi^2}{12}$$

e le formole

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots,$$

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \dots,$$

$$\frac{\pi^2}{24} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots$$

6. $$\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x \, dx}{1 + \cos^2 x} = \pi\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

7. $$\int_0^1 \frac{x^{a-1}\, dx}{1 + x^b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a+3b} + \frac{1}{a+4b} - \ldots,$$

$a > 0,\ b > 0,\ a \leq b;$

ad esempio si ha, per $a = 1, b = 3$; $a = 2, b = 3$; $a = 1, b = 4$; $a = 3, b = 4$,

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \log 2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1 + 3n}, \quad \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \log 2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2 + 3n},$$

$$\frac{\pi + \log(3 + 2\sqrt{2})}{4\sqrt{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1 + 4n}, \quad \frac{\pi - \log(3 + 2\sqrt{2})}{4\sqrt{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3 + 4n}.$$

8. $$\int_0^{\pi} e^{\rho \cos\varphi} \cos(\rho \operatorname{sen} \varphi)\, d\varphi = \pi,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\rho \cos\varphi} \cos(\rho \operatorname{sen} \varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1 \,.\, 2 \ldots (2n+1)} \frac{\rho^{2n+1}}{2n+1}$$

(Vol. 1, pag. 323).

9. Se n è intero positivo, si ha

$$\int_0^{\pi} e^{\rho \cos\varphi} \cos(\rho \operatorname{sen} \varphi) \cos n\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2} \frac{\rho^n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n},$$

$$\int_0^{\pi} e^{\rho \cos\varphi} \operatorname{sen} (\rho \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{sen} n\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2} \frac{\rho^n}{1.2.3 \ldots n}$$

(Dimostrare e servirsi delle formole $\int_0^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0$,

$\int_0^\pi \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = 0$, se m, n interi positivi sono diversi;

$\int_0^\pi \operatorname{sen} mx \cos nx dx = 0$ anche se $m = n$, e

$\int_0^\pi \cos^2 mx\, dx = \frac{\pi}{2}$, $\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 mx\, dx = \frac{\pi}{2}$).

10. $$\int_y^1 \frac{\operatorname{sen}(a \log x)}{\log x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{a^{2n+1}}{2n+1} - \frac{a^{2n+1}}{2n+1} y[(\log y)^{2n} \right.$$

$$\left. - 2n(\log y)^{2n-1} + 2n(2n-1)(\log y)^{2n-2} - \ldots + 2n(2n-1)..2.1] \right\}$$

se $y > 0$ e qualunque sia a; e, se $-1 \leq a \leq 1$,

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(a \log x)}{\log x} dx = \operatorname{arc\,tg} a.$$

11. $$\int_0^1 \frac{x^\alpha - x^\beta}{\log x} dx = \log \frac{1+\alpha}{1+\beta}, \quad |\alpha| < 1, \ |\beta| < 1.$$

12. Posto $S_n = 1 + \alpha \cos x + \alpha^2 \cos 2x + \alpha^3 \cos 3x + \ldots + \alpha^{n-1} \cos(n-1)x$ e avuto riguardo alla formola $2\cos kx \cos x = \cos(k-1)x + \cos(k+1)x$, si trova $(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) S_n = 1 - \alpha \cos x - \alpha^n \cos nx + \alpha^{n+1} \cos(n-1)x$, dalla quale, se $|\alpha| < 1$, si ricava, qualunque sia x,

$$\frac{1 - \alpha \cos x}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} = 1 + \alpha \cos x + \alpha^2 \cos 2x + \alpha^3 \cos 3x + \ldots + \alpha^n \cos nx + \ldots.$$

e da questa

$$\frac{1 - \alpha^2}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} = 1 + 2(\alpha \cos x + \alpha^2 \cos 2x + \alpha^3 \cos 3x + \ldots).$$

In conseguenza, si provi che $\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} mx\, dx}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} = \frac{\pi}{2} \alpha^{m-1}$, se m intero positivo e $|\alpha| < 1$.

$$13. \int_0^\pi \cos mx \log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx = -\frac{\pi\alpha^m}{m}, \quad m \text{ int. pos.}, \ |\alpha|<1.$$

[Si dimostri la formola

$$\frac{\alpha \operatorname{sen} x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2} = \alpha \operatorname{sen} x + \alpha^2 \operatorname{sen} 2x + \alpha^3 \operatorname{sen} 3x + \alpha^4 \operatorname{sen} 4x + \ldots,$$

e da questa si ricavi

$$\log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2) = -2\left(\alpha\cos x + \frac{\alpha^2\cos 2x}{2} + \frac{\alpha^3\cos 3x}{3} + \frac{\alpha^4\cos 4x}{4} + \ldots\right)\Big]$$

Alcuni teoremi sulle funzioni a due o più variabili indipendenti.

80. Per l'ulteriore studio degli integrali definiti ci occorre ora dimostrare alcune proprietà delle funzioni a due o più variabili indipendenti, che sono la generalizzazione delle analoghe, per le funzioni di una variabile indipendente, svolte nel Vol. I a pag. 88 e seguenti, e di alcune delle quali, pel caso di due variabili, abbiamo dato un cenno nel n. 75 del vol. I, e che ora dimostreremo più ampiamente.

Sia C un campo di valori per le variabili $x_1, x_2 \ldots x_n$, e siano (a) un punto di coordinate $(a_1, a_2 \ldots a_n)$, (b) un altro punto del campo, di coordinate $(b_1, b_2 \ldots b_n)$. Siano $x_r = x_r(t)$ funzioni continue di t, pei valori di t da t_0 a t_1, ove è $a_r = x_r(t_0)$, $b_r = x_r(t_1)$; a questi valori di t corrisponderanno dei punti che costituiranno una successione continua o linea o cammino, che, se è tutta nel campo C, diremo essere una linea del campo che unisce i punti (a) e (b).

Il campo C dicesi *connesso*, se due suoi punti qualunque possono unirsi mediante una linea tutta appartenente a C. Ove non si avverta il contrario, dicendo campo C, intenderemo campo connesso e finito.

Potremo, per semplicità, limitarci a considerare le funzioni $u(x, y)$ di due variabili indipendenti x, y; le dimostrazioni che da-

remo si estendono con tutta facilità al caso di funzioni di più variabili.

Sia $u(x, y)$ funzione finita dei punti di un campo C. Abbiamo già notato (vol. I, n. 75, pag. 115) che, se in un punto (x_0, y_0) la u è continua ed è diversa da zero, esiste un intorno del punto (x_0, y_0) per tutti i punti del quale la u mantiene lo stesso segno di $u(x_0, y_0)$.

Abbiamo poi i seguenti teoremi:

81. *Se* $u(x, y)$ *è continua in tutto il campo* C [1]), *esiste almeno un punto di* C *nel quale la* u *prende un qualunque valore compreso tra* $u(x_0, y_0)$ *e* $u(x_1, y_1)$ *essendo* (x_0, y_0) *e* (x_1, y_1) *due punti qualunque di* C (Conf. vol. I, n. 59).

Infatti, uniamo (x_0, y_0), (x_1, y_1) con una linea L contenuta in C, le cui equazioni siano $x = x(t)$, $y = y(t)$, $x(t)$, $y(t)$ essendo funzioni continue di t, e tali che $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$, $y_1 = y(t_1)$. La funzione continua di t, $F(t) = u[x(t), y(t)]$, prenderà per qualche valore di t compreso tra t_0 e t_1 un qualunque valore compreso tra $F(t_0) = u(x_0, y_0)$ e $F(t_1) = u(x_1, y_1)$, e a quel valore di t corrisponde un punto di C appartenente alla linea L, e rimane così dimostrato il teorema.

82. *Sia* $u(x, y)$ *funzione finita nel campo* C *ed* l *il limite superiore (od inferiore) di* u *nel campo stesso. Allora esiste in* C *almeno un punto* (x', y'), *che può anche essere sul contorno di* C, *tale che in ogni suo intorno il limite superiore (od inferiore) dei valori di* u *è ancora* l; *tale cioè che in ogni suo intorno nessuno dei valori che prende* u *supera (o è superato da)* l, *ma, dato* $l - \sigma$ *(o* $l + \sigma$*), vi è sempre in quell'intorno qualche punto* (x_1, y_1) *pel quale* $u(x_1, y_1) > l - \sigma$ *(o* $u(x_1, y_1) < l + \sigma$*), ossia* $|u(x_1, y_1) - l| < \sigma$. (vol. I, n.i 62,75).

Infatti, supposto l limite superiore, ed a, b il minimo e massimo valore di x, e c, d il minimo e massimo valore di y per tutti i punti di C, consideriamo le rette $x = a + \frac{b-a}{2}$, $y = c + \frac{d-c}{2}$, le quali dividono il campo C in regioni, in una delle quali almeno il limite superiore dei valori di u è ancora l; prendiamo a considerare quella, o una di quelle, ove ciò succede, ed indichiamo con a_1, b_1 il mi-

---

[1]) Dicendo campo C intendiamo sempre « campo finito C, incluso il contorno ».

nimo e massimo valore di x, con c_1, d_1 il minimo e massimo valore di y per tutti i punti di questo nuovo campo C_1, contenuto completamente nel primitivo C, ed osserviamo che $a \leq a_1$, $b \geq b_1$, $c \leq c_1$, $d \geq d_1$. Ripetiamo lo stesso procedimento relativamente al campo C_1 ed a quelli che mano a mano in questo modo si presentano, ciascuno dei quali sarà sempre contenuto nei precedenti. Nascono così le due successioni di numeri

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots ; \; b \geq b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq \ldots ,$$

che hanno per limite un unico numero x'; e le altre due successioni di numeri

$$c \leq c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n \leq \ldots ; \; d \geq d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n \geq \ldots ,$$

che hanno per limite un unico numero y'; il punto (x', y') appartiene a tutti i campi C, $C_1, C_2, \ldots$, nei quali il limite superiore dei valori di u è ancora l.

Ora, qualunque e comunque piccolo sia un intorno c di (x', y'), potremo sempre prendere n così grande che il rettangolo determinato dalle rette $x = a_n$, $x = b_n$, $y = c_n$, $y = d_n$, o il pezzo di esso che appartiene a C, sia contenuto in c: quindi anche in c il limite superiore dei valori di u è l.

Da questo teorema si ricava subito, con dimostrazione perfettamente analoga a quella del n. 63 vol. I, il seguente:

Una funzione u(x, y) *continua in tutto il campo* C *e non costante prende sempre nello stesso campo il valore massimo e il valore minimo, cioè, se* l *è il limite superiore (inferiore) di* u, *esiste sempre in* C *almeno un punto* (x', y'), *che può anche essere sul contorno, tale che* u(x', y') = l.

Notiamo poi che se la $u(x, y)$ è data solo pei punti d'una linea L o si vuole considerare per soli questi punti, si ha che:

Se l *è il limite superiore (inferiore) di* u(x, y) *nella linea* L, *esiste su questa linea almeno un punto* (x', y'), *tale che in ogni suo intorno appartenente ad* L *il limite superiore (inferiore) dei valori di* u *è ancora* l.

Invero, supponiamo che le coordinate x, y dei punti di L si ottengano dalle due funzioni continue $x = x(t)$, $y = y(t)$ attribuendo a t i valori da t_0 a t_1, cosichè la u divenga una funzione di t nell'intervallo (t_0, t_1). Allora al punto t', in ogni intorno del quale il limite superiore (inferiore) dei valori di u è ancora l, e a questi in-

torni, corrispondono sulla linea L un punto (x', y') e degli intorni nei quali il limite superiore di u è l.

83. *Se* u(x, y) *è funzione continua nel campo* C, *assegnato un numero positivo* σ, *esiste un corrispondente numero positivo* τ *tale che, per tutti i punti* (x, y) *del campo, è*

$$|u(x, y) - u(x_1, y_1)| < \sigma,$$

essendo (x_1, y_1) *un punto qualunque di un circolo con centro in* (x, y) *e di raggio* τ, *o un punto qualunque di quella parte di questo circolo, che, contenendo il punto* (x, y), *appartiene al campo* C.

Invero, assegnato σ, esiste per ogni punto (x, y) di C un intorno di (x, y), per tutti i punti (x_1, y_1) del quale è $|u(x, y) - u(x_1, y_1| < \sigma$.

Ora si può e giova prendere come intorni del punto (x, y) dei circoli col centro in questo punto, o la parte di essi che, contenendo il punto (x, y), appartengono al campo C; cosichè potremo dire che, per ogni punto (x, y) di C, esiste un numero positivo ε tale, che per tutti i punti (x_1, y_1) del circolo di raggio ε col centro in (x, y), o per tutti i punti (x_1, y_1) di quella parte di esso che contiene (x, y) e che appartiene a C, è $|u(x, y) - u(x_1, y_1)| < \sigma$. Di questi numeri ε ne esiste un numero infinito per ogni punto del campo, giacchè, esistendone uno, tutti i numeri positivi minori godono della stessa proprietà. Noi considereremo ora per ogni punto (x, y) il limite superiore di questi numeri ε, che indicheremo con $\varepsilon(\sigma, x, y)$, e questo limite superiore è una funzione dei punti (x, y) del campo C. Indichiamo con τ il limite inferiore di questa funzione $\varepsilon(\sigma, x, y)$; è chiaro allora che risulterà dimostrato il teorema se proveremo che τ non è zero.

È ciò che effettivamente ha luogo. Infatti, sia (x', y') quel punto di C in ogni intorno del quale il limite inferiore dei valori di $\varepsilon(\sigma, x, y)$ è ancora τ; e sia r il raggio del circolo (r) col centro in (x', y') tale che per tutti i suoi punti (x_1, y_1), o per i punti di quella sua parte $(r)_1$ che contiene (x', y') e che appartiene a C, è $|u(x', y') - u(x_1, y_1)| < \frac{\sigma}{2}$. Descriviamo ora col centro in (x', y') e con ra gio $\frac{r}{2}$ un circolo, e consideriamo tutti i suoi punti (x_2, y_2), o tu i i suoi punti che appartengono a $(r)_1$. Qualunque sia il punto

(x_2, y_2), il circolo $\left(\frac{r}{2}\right)$ di centro (x_2, y_2) e di raggio $\frac{r}{2}$ è contenuto in (r) e contiene (x', y'), cosichè, se (x_3, y_3) è un punto qualunque di $\left(\frac{r}{2}\right)$ o di quella sua parte che è contenuta in $(r)_1$, avremo

$$|u(x', y') - u(x_2, y_2)| < \frac{\sigma}{2}, \quad |u(x', y') - u(x_3, y_3)| < \frac{\sigma}{2}$$

e da queste

$$|u(x_2, y_2) - u(x_3, y_3)| < \sigma;$$

dalla qual formola risulta che per tutti i punti (x_2, y_2) la funzione $\varepsilon(\sigma, x_2, y_2)$, e quindi anche il suo limite inferiore, non può essere minore di $\frac{r}{2}$. Ma per tutti i punti (x_2, y_2) il limite inferiore di $\varepsilon(\sigma, x_2, y_2)$ è ancora il limite inferiore δ di $\varepsilon(\sigma, x, y)$ per tutti i punti del campo C; dunque δ non può essere minore di $\frac{r}{2}$, e quindi è diverso da zero, come volevamo dimostrare.

Questo teorema dimostra che le funzioni continue sono *uniformemente continue* o *equicontinue* per tutti i punti del campo C, o, come suol dirsi, nel campo C.

Da questo teorema si ricava, senz'altro, analogamente a quanto abbiamo visto al n. 64, vol. I per le funzioni di una sola variabile, che:

Se u(x, y) *è funzione continua nel campo* C, *assegnato un numero positivo* σ, *esiste un corrispondente numero positivo* δ *tale che è*

$$|u(x', y') - u(x'', y'')| < \sigma,$$

essendo (x', y'), (x'', y'') *due punti qualunque del campo appartenenti ad un circolo di raggio* δ *e col centro in un punto qualunque* (x, y) *del campo, o due punti qualunque di una parte di un circolo di raggio* δ, *che ha il centro in un punto qualunque* (x, y) *e che, contenendo questo punto, appartiene al campo.*

Notiamo anche quì che, se la funzione $u(x, y)$ data e finita nel campo C è continua rispetto alle due variabili x, y per tutti i punti d'una linea L, essa è su questa linea *uniformemente continua*, cioè:

Dato σ, *esiste un corrispondente numero positivo* δ *tale che*, per

tutti i punti (x , y) *di* L, *è*

$$|u(x, y) - u(x_1, y_1)| < \sigma,$$

dove (x_1, y_1) *è un punto qualunque di un circolo col centro in* (x , y) *e di raggio* δ, *o un punto qualunque di quella parte di questo circolo che, contenendo il punto* (x , y), *appartiene al campo* C.

La dimostrazione, con modificazioni lievissime ed evidenti, è la stessa del precedente teorema; così, comincieremo col dire che, assegnato σ, esiste per ogni punto (x, y) di L un intorno di (x, y) appartenente a C per tutti i punti (x_1, y_1) del quale etc.

Continuità, derivazione e integrazione degli integrali definiti rispetto ad un parametro.

84. Consideriamo un integrale $\int_a^b f(x, y)dx$, dove $b > a$ e $f(x, y)$ è funzione finita di x, y pei valori del campo rettangolare limitato dalle rette $x = a$, $x = b$, $y = \alpha$. $y = \beta$, ed integrabile rispetto alla x nell' intervallo (a, b), qualunque sia il valore di y dell' intervallo (α, β); esso è funzione della variabile o parametro y, e lo indicheremo con $\varphi(y)$.

Siano y_0 ed $y_0 + k$ valori di y dell' intervallo (α, β); abbiamo

$$|\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0)| = \left| \int_a^b [f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)]\, dx \right|,$$

così che è condizione *necessaria* e *sufficiente* affinchè $\varphi(y)$ sia continua per $y = y_0$ che, dato σ, esista un valore k_0 positivo tale che per $|k| \leq k_0$ il secondo membro della precedente formola sia minore di σ. Ora ciascuna delle seguenti è, da se sola, condizione *sufficiente* affinchè ciò avvenga:

Che la $f(x, y)$ sia sempre finita, e sia per $y = y_0$ equicontinua (Vedi Vol. I, pag. 113) rispetto alla y nell' intervallo (a, b) di x, cioè per i punti dell' intervallo (a, b) sulla retta $y = y_0$; perchè allora esiste

un k_0 tale che per $|k| \leq k_0$ è

$$|f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)| < \frac{\sigma}{b - a}$$

per tutti i punti di quell' intervallo, e quindi

$$\int_a^b |f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)|\, dx < \sigma,$$

ed *a fortiori*

$$|\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0)| < \sigma.$$

2) Che la $f(x, y)$ sia sempre finita e sia per tutti i punti dell' intervallo, (a, b) su $y = y_0$, continua rispetto alle due variabili (x, y); perchè allora, in virtù del teorema alla fine del n. 83, esisterà un k_0 tale che ecc.

3) Che la $f(x, y)$ sia sempre finita, e, ove non siano soddisfatte le due precedenti condizioni, ciò dipenda dall' esservi nell' intervallo (a, b) su $y = y_0$ dei punti, in numero finito, la cui presenza faccia cessare la equicontinuità di $f(x, y)$ rispetto alla y, o nei quali la $f(x, y)$ non sia continua assolutamente rispetto alle x, y ma, tolti i quali con intorni comunque piccoli, negli intervalli restanti la $f(x, y)$ sia equicontinua rispetto alla y, o continua rispetto ad x, y.

Invero, se c è un tal punto, osserviamo che

$$|\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0)| = \left| \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} + \int_{c+\varepsilon}^{b} \right\} [f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)]\, dx \right|,$$

dove ε indica un numero positivo. Se A è il limite superiore dei valori di $|f(x, y)|$ nel campo di valori che consideriamo, o un numero qualunque maggiore di questo limite, abbiamo

$$\left| \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x, y_0 + k) dx \right| < A2\varepsilon, \quad \left| \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x, y_0)\, dx \right| < A2\varepsilon,$$

e quindi
$$\left| \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} [f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)]\, dx \right| < 4A\varepsilon;$$

cosichè, assegnato σ, potremo fissare ε in guisa che risulti $4A\varepsilon < \frac{\sigma}{3}$, e poi determinare k_0 in guisa che, pei punti degli intervalli $(a, c-\varepsilon)$, $(c+\varepsilon, b)$ su $y = y_0$, e per $|k| \leq k_0$, sia

$$\left| \int_a^{c-\varepsilon} [f(x, y_0+k) - f(x, y_0)]\, dx \right| < \frac{\sigma}{3}, \quad \left| \int_{c+\varepsilon}^{b} [f(x, y_0+k) - f(x, y_0)]\, dx \right| < \frac{\sigma}{3},$$

ed allora per quei valori di k avremo $|\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0)| < \sigma$.

Si intende subito come la dimostrazione si estenda al caso di un numero finito di punti come c.

4) Che, mantenendosi la $f(x, y)$ sempre integrabile rispetto alla x pei valori di x, y da considerarsi, se in (a, b) vi sono dei valori $x = c$, in numero finito, tali che $f(c, y)$ sia infinita per $y = y_0$, o sia infinita per tutti i punti d'un intorno, sulla retta $x = c$, del punto (c, y_0), si possano però per ogni punto c trovare due numeri positivi k_0, ε tali che, per $|k| \leq k_0$ e qualunque sia ε_1 positivo e $< \varepsilon$, i due integrali

$$(1) \qquad \int_{c-\varepsilon}^{c-\varepsilon_1} [f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)]\, dx, \int_{c+\varepsilon_1}^{c+\varepsilon} [f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)]\, dx$$

siano numericamente minori di un numero prefissato σ; e che la $f(x, y)$, tolti i punti c con intorni comunque piccoli, negli intervalli restanti sia tale, che il corrispondente integrale sia funzione continua di y per $y = y_0$.

Infatti, supposto che vi sia uno solo di tali punti c, avremo

$$\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0) = \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} + \int_{c+\varepsilon}^{b} \right\} [f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)]\, dx$$

$$= \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} + \int_{c+\varepsilon}^{b} + \lim_{\varepsilon_1=0} \int_{c-\varepsilon}^{c-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_1=0} \int_{c+\varepsilon_1}^{c+\varepsilon} \right\} [f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)]\, dx;$$

m , per la ipotesi ammessa, dato σ, potremo fissare ε e k_0 in guisa cl ε, per $|k| \leq k_0$, ciascuno dei due ultimi termini del secondo mem-

bro risulti numericamente minore di $\frac{\sigma}{4}$; e poi $k_1 \leq k_0$ in guisa che i due primi termini siano, ciascuno, minori numericamente di $\frac{\sigma}{4}$, cosichè per $|k| \leq k_1$ si avrà $|\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0)| < \sigma$.

Se c è uno degli estremi dell' intervallo (a, b), si intende che si avrà da considerare uno solo degli integrali (1).

Esempi

1) Nell' integrale

$$\varphi(y) = \int_0^\pi \log(1 - 2y \cos x + y^2)\, dx$$

la funzione integranda diviene infinita nel punto $x = 0$ per $y = 1$. mantendosi integrabile. Ora

$$\varphi(1+k) - \varphi(1) = \left\{ \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^\pi \right\} \{\log[2(1+k)(1 - \cos x) + k^2] - \log 2(1 - \cos x)\}\, dx$$

ovvero, osservando che

$$\log[2(1 + k)(1 - \cos x) + k^2] = \log 2(1 + k) + \log\left(1 - \cos x + \frac{k^2}{2(1 + k)}\right),$$

sarà

$$\varphi(1 + k) - \varphi(1) = \varepsilon \log 2(1 + k)$$

$$+ \int_0^\varepsilon \left[\log\left(1 - \cos x + \frac{k^2}{2(1 + k)}\right) - \log 2(1 - \cos x)\right] dx$$

$$+ \int_\varepsilon^\pi \{\log[2(1 + k)(1 - \cos x) + k^2] - \log 2(1 - \cos x)\}\, dx.$$

Se si comincia a supporre ε sufficientemente piccolo, mettiamo sia $\varepsilon < \frac{\pi}{3}$, sarà, pei valori di x da considerarsi nel primo integr le,

$\frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \cos x$, e preso $|k| \leq k_0 < \frac{1}{2}$ sarà $\frac{k^2}{2(1+k)} < k^2 < \frac{1}{4} < \cos x$, e quindi $1 > 1 - \cos x + \frac{k^2}{2(1+k)} \geq 1 - \cos x$, e perciò

$$\left| \log \left(1 - \cos x + \frac{k^2}{2(1+k)}\right) \right| \leq |\log (1 - \cos x)| ;$$

e, poichè, per μ numero positivo qualunque e che a noi giova ora prendere minore dell' unità, è $\lim_{x=0} x^\mu \log (1 - \cos x) = 0$, come facilmente si verifica, possiamo ora asserire che, per $x < \varepsilon < \frac{\pi}{3}$ e per $|k| \leq k_0 < \frac{1}{2}$, le espressioni

$$x^\mu \log \left(1 - \cos x + \frac{k^2}{2(1+k)}\right), \; x^\mu \log(1 - \cos x)$$

saranno numericamente minori di un certo numero positivo A. e quindi

$$\left| \int_0^\varepsilon \left[\log\left(1 - \cos x + \frac{k^2}{2(1+k)}\right) - \log (1 - \cos x)\right] dx \right| < \frac{A\varepsilon^{1-\mu}}{1-\mu} ;$$

cosichè osservando ancora che, per quei valori di k, è $\varepsilon \log 2(1+k) < \varepsilon \log 3$, potremo fissare ε in guisa che, per quei valori di k, sia

$$\left| \varepsilon \log 2(1+k) + \int_0^\varepsilon \left[\log\left(1 - \cos x + \frac{k^2}{2(1+k)}\right) - \log 2(1 - \cos x)\right] dx \right| < \frac{\sigma}{2} ,$$

essendo σ un numero dato positivo e comunque piccolo. Poi prenderemo $k_1 \leq k_0$ in modo che per $|k| \leq k_1$ sia

$$\left| \int_\varepsilon^\pi \left\{\log [2(1+k)(1 - \cos x) + k^2] - \log 2(1 - \cos x)\right\} dx \right| < \frac{\sigma}{2},$$

cosi hè, per quei valori di k, è

$$|\varphi(1+k) - \varphi(1)| < \sigma$$

e la $\varphi(y)$ è continua anche per $y = 1$.

In modo analogo si proverebbe che $\varphi(y)$ è continua anche per $y = -1$, nel qual caso la funzione integranda diviene infinita per $x = \pi$.

Verifichiamo poi che questo ha realmente luogo, perchè è $\varphi(y) = \pi \log y^2$ per $|y| > 1$ e $\varphi(y) = 0$ per $-1 \leq y \leq 1$ [n. 198 vol. I, 5) ed esercizio 3° a pag. 183].

2) Sia $\varphi(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^y x \, dx$ dove supponiamo sia $-1 < y < 1$. (La funzione $\operatorname{tg}^y x$ è allora integrabile nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, perchè se y è positiva diviene infinita di ordine y per $x = \frac{\pi}{2}$, e se y è negativa diviene infinita pure di ordine y nel punto $x = 0$, perchè $\lim_{x=\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x = 1$, $\lim_{x=0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$, e se $y = 0$ si mantiene sempre finita).

Ora, quantunque la funzione integranda per $x = 0$ $\left(\text{o per } x = \frac{\pi}{2}\right)$ diventi infinita qualunqne sia y negativo (o positivo), la $\varphi(y)$ è continua per qualunque dei valori di y che consideriamo.

Invero, supposto $y > 0$, avremo

$$\varphi(y+k) - \varphi(y) = \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \right\} (\operatorname{tg}^{y+k} x - \operatorname{tg}^y x) \, dx ;$$

ma, se μ indica un numero qualunque positivo < 1 e $> y$, e si prenda k_0 tale che sia $y + k_0 < \mu$, cosichè per $|k| \leq k_0$ sia anche $y + k < \mu$, avremo, per $|k| \leq k_0$,

$$\lim_{x=\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{\mu} (\operatorname{tg}^{y+k} x - \operatorname{tg}^y x) = 0,$$

dalla quale risulta subito l'esistenza di un intorno $\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2}\right)$, ove

potremo già supporre $\varepsilon < \frac{\pi}{4}$, per tutti i punti x del quale, $\frac{\pi}{2}$ escluso, $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{\mu}(\mathrm{tg}^{y+k_0} x - \mathrm{tg}^{y_0} x)$ risulterà minore di una certa quantità positiva A, e quindi anche per $|k| \leq k_0$ e pei punti dello stesso intorno risulterà anche

$$\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{\mu}(\mathrm{tg}^{y+k} x - \mathrm{tg}^{y} x) < \mathrm{A}$$

perchè $\mathrm{tg}^{y+k} x < \mathrm{tg}^{y+k_0} x$. Cosichè $\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} (\mathrm{tg}^{y+k} x - \mathrm{tg}^{y} x) dx < \frac{\mathrm{A}\varepsilon^{1-\mu}}{1-\mu}$,

e ragionando come nell'esempio precedente si prova che $\varphi(y)$ è continua pel valore y che consideriamo.

In modo analogo si proverebbe che $\varphi(y)$ è continua se $y < 0$, e se $y = 0$.

Il che si può verificare perchè sappiamo che è [N. 73 esempio 4)]

$$\varphi(y) = \frac{\pi}{2 \operatorname{sen} \frac{y+1}{2} \pi}, \quad \text{se} \quad -1 < y < 1.$$

85. Supponiamo ora che i limiti a, b dell'integrale sieno funzioni di y, $a = a(y)$, $b = b(y)$, continue per $y = y_0$, e la $f(x, y)$ sia finita e tale che $\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y) dx$ sia funzione continua di y per $y = y_0$. Allora la funzione di y,

$$\varphi(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx,$$

è continua per $y = y_0$.

Invero

$$|\varphi(y_0+k)-\varphi(y_0)|=\left|\int_{a(y_0+k)}^{b(y_0+k)} f(x,y_0+k)dx-\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y_0)dx\right|$$

$$=\left|\int_{a(y_0)}^{b(y_0)}[f(x,y_0+k)-f(x,y_0)]dx+\int_{a(y_0+k)}^{a(y_0)} f(x,y_0+k)dx+\int_{b(y_0)}^{b(y_0+k)} f(x,y_0+k)dx\right| ;$$

ma, se A indica un numero positivo maggiore del limite superiore di $|f(x,y)|$ per tutti i valori di x,y che si considerano, è

$$\left|\int_{a(y_0+k)}^{a(y_0)} f(x,y_0+k)\,dx\right|<\mathrm{A}|a(y_0+k)-a(y_0)|,$$

$$\left|\int_{b(y_0)}^{b(y_0+k)} f(x,y_0+k)\,dx\right|<\mathrm{A}|b(y_0+k)-b(y_0)|,$$

cosichè, dato σ, poichè $a(y)$, $b(y)$ sono continue per $y=y_0$ e per la proprietà supposta di $f(x,y)$, esiste un numero k_0 tale che per $|k|\leq k_0$ è

$$\mathrm{A}|a(y_0+k)-a(y_0)|<\frac{\sigma}{3},\ \mathrm{A}|b(y_0+k)-b(y_0)|<\frac{\sigma}{3},$$

$$\left|\int_{a(y_0)}^{b(y_0)}[f(x,y_0+k)-f(x,y_0)]dx\right|<\frac{\sigma}{3},$$

e quindi, per tali valori di k,

$$|\varphi(y_0+k)-\varphi(y_0)|<\sigma.$$

Notiamo poi che $\varphi(y)$ potrà essere continua anche se la $f(x,y)$ non si mantenga sempre finita.

86. Consideriamo l' integrale

$$\varphi(y)=\int_a^\infty f(x,y)dx,$$

ammessa integrabile la $f(x, y)$ nell'intervallo (a, ∞) per tutti i valori di y di un intervallo (α, β), e tale che $\int_a^\gamma f(x, y)dx$ risulti funzione continua di y per quanto grande si fissi γ.

Supporremo inoltre che, assegnato σ, esista un numero γ tale che, per tutti gli y di un certo intorno $(y_0 - k_0, y_0 + k_0)$ di y_0, sia $\left|\int_\gamma^b f(x, y)dx\right| < \sigma$, qualunque sia $b > \gamma$, ciò che esprimeremo dicendo che l'integrale $\int_a^\infty f(x, y)dx$ è *uniformemente* o *equi-convergente in modo semplice* [1]) nell'intorno $(y_0 - k_0, y_0 + k_0)$ di y_0.

Dico allora che l'integrale $\varphi(y)$ è funzione continua di y per $y = y_0$.

Infatti, dato σ, fissiamo γ in modo che risulti $\left|\int_\gamma^b f(x, y)dx\right| < \frac{\sigma}{3}$ pei punti y di $(y_0 - k_0, y_0 + k_0)$ e qualunque sia $b > \gamma$, cosichè sia

$$\left|\int_a^b [f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)]dx\right|$$

$$= \left|\int_a^\gamma [f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)]dx + \int_\gamma^b [f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)]dx\right|$$

$$< \left|\int_a^\gamma [f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)]dx\right| + \frac{\sigma}{3} + \frac{\sigma}{3}$$

---

[1]) Un integrale $\int_a^\infty f(x, y)dx$ dicesi *uniformemente* o *equi-convergente* in un intervallo (α, β) di y se, dato σ, esiste un numero c tale che, per tutti i punti y di (α, β), è $\left|\int_\gamma^b f(x, y)dx\right| < \sigma$, qualunque sia $\gamma \geq c$ e qualunque sia $b > \gamma$.

per $|k| \leq k_0$ e qualunque sia $b > \gamma$. Al limite, per b crescente indefinitamente, avremo perciò

$$\left| \int_a^\infty [f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)] dx \right| \leq \left| \int_a^\gamma [f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)] dx \right| + \frac{2\sigma}{3};$$

ma possiamo determinare $k_1 \leq k_0$ in modo che l'integrale del secondo membro risulti minore di $\frac{\sigma}{3}$ per $|k| \leq k_1$, cosichè, per $|k| \leq k_1$, sarà

$$|\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0)| < \sigma,$$

che dimostra il teorema.

Relativamente a tutte le precedenti considerazioni faremo infine notare che le condizioni imposte alla $f(x, y)$ sono condizioni sufficienti, affinchè l'integrale $\varphi(y)$ che in esse si considera sia funzione continua di y, così chè, ove non siano soddisfatte, potrebbe ciò non ostante essere $\varphi(y)$ funzione continua; ma ciò allora non potrebbe senz'altro asserirsi ed occorrerebbero perciò speciali ricerche.

Esempi

1) Dimostriamo che l'integrale

$$\varphi(a) = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\, dx}{1 + x}$$

è funzione continua di a per i valori di a dell'intervallo $(0, 1)$, esclusi gli estremi.

Questo integrale venne considerato al n. 73, esempio 2), e si dimostrò essere uguale a $\frac{\operatorname{sen} a\pi}{\pi}$ pei valori razionali di a compresi tra 0 e 1.

La funzione integranda è, pei valori di x e di a che consideriamo, sempre continua assolutamente rispetto ad x, a; inoltre, poichè il valore a_0 che considereremo è compreso tra 0 e 1, vi sarà un intorno (α, β) di a_0 tale che $0 < \alpha < \beta < 1$, e pei punti a di

questo intorno, se si suppone $x > 1$, sarà

$$\frac{x^{a-1}}{x+1} = \frac{1}{x^{1-a}(x+1)} \leq \frac{1}{x^{1-\beta}(x+1)} < \frac{1}{x^{2-\beta}},$$

e quindi. supposto $\gamma > 1$ e $b > \gamma$,

$$\int_{\gamma}^{b} \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} < \int_{\gamma}^{b} \frac{dx}{x^{2-\beta}} = \frac{1}{\beta-1}\left(\frac{1}{b^{1-\beta}} - \frac{1}{\gamma^{1-\beta}}\right),$$

cosichè, qualunque sia il numero positivo σ assegnato, potremo sempre determinare γ in modo che, qualunque sia $b > \gamma$, e per i valori a dell'intorno (α, β), risulti $\int_{\gamma}^{b} \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} < \sigma$, ed il nostro integrale $\varphi(a)$, essendo perciò convergente in modo uniforme semplice nell'intorno (α, β) di a_0, è continuo per $a = a_0$, essendo a_0 un valore qualunque compreso tra 0 e 1.

Ora possiamo provare che la formola $\varphi(a) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}$, dimostrata al n. 73 per a razionale e compreso tra 0 e 1 ed ivi ammessa per tutti i valori di a dell'intervallo $(0, 1)$, esclusi gli estremi, vale effettivamente per tutti questi valori.

Invero se a_0 è un numero irrazionale qualunque maggiore di 0 e minore di 1, sia esso il limite di una successione $a_1, a_2, a_3, \ldots$ di numeri razionali interni all'intervallo $(0, 1)$. Vale allora la formola

$$\varphi(a_n) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a_n\pi}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

e passando al limite quando a_n assume successivamente i valori $a_1, a_2, a_3, \ldots$, poichè è $\lim \frac{\pi}{\operatorname{sen} a_n\pi} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a_0\pi}$ ed abbiamo ora dimostrato che $\lim \varphi(a_n) = \varphi(a_0)$, abbiamo

$$\varphi(a_0) = \int_0^{\infty} \frac{x^{a_0-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a_0\pi}.$$

2) Se la funzione $f(x, y)$ è integrabile nell'intervallo (a, ∞) perchè. per tutti i valori y di un certo intorno di y_0, soddisfa alla condi-

zione dell' enunciato del teorema al n. 72, restando ferma l' altra condizione che $\int_a^\gamma f(x,y)dx$ sia funzione continua di y per $y = y_0$ per quanto grande si fissi γ, l'integrale $\varphi(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx$ è funzione continua di y per $y = y_0$.

Proviamolo nel caso che il prodotto $|x^{1+\mu} f(x,y)|$, dove $\mu > 0$, qualunque sia y appartenente ad un certo intorno di y_0, risulti minore di un certo numero h positivo. Allora avremo

$$\left| \int_\gamma^b f(x,y)dx \right| = \left| \int_\gamma^b x^{1+\mu} \frac{f(x,y)dx}{x^{1+\mu}} \right| < h \int_\gamma^b \frac{dx}{x^{1+\mu}} = \frac{h}{\mu}\left(\frac{1}{\gamma^\mu} - \frac{1}{b^\mu}\right),$$

e, poichè μ è positivo, potremo, dato σ, fissare γ in modo che etc.

Così ad esempio, possiamo subito asserire che l' integrale $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x^{1+\mu}} dx$, dove $0 < \mu < 1$ (cosichè la funzione $\frac{\operatorname{sen}(xy)}{x^{1+\mu}}$ è integrabile in un intervallo cui appartiene il punto $x = 0$ qualunque sia y), è funzione continua di y per qualunque valore di y, perchè abbiamo sempre $x^{1+\mu} \frac{|\operatorname{sen}(xy)|}{x^{1+\mu}} \leq 1$, qualunque sia y.

Se $\mu = 0$, cioè se si considera l' integrale $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x} dx$, occorrerebbe istituire speciale ricerca, e si vedrebbe facilmente, usando la formola

$$\int \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x} dx = -\frac{\cos(xy)}{xy} - \frac{1}{y}\int \frac{\cos(xy)}{x^2} dx$$

dalla quale si trae

$$\int_\gamma^b \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x} dx = -\frac{\cos(by)}{by} + \frac{\cos(\gamma y)}{\gamma y} - \frac{1}{y}\int_\gamma^b \frac{\cos(xy)}{x^2} dx,$$

che esso è funzione continua di y, se y è diverso da zero; ma lo

stesso procedimento non serve a indicarci se esso sia continuo, oppure no, per $y=0$.

Riconosciamo però, d'altra parte, che non lo è, perchè $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x}\,dx$ è uguale a $\frac{\pi}{2}$ per $y>0$, eguale a $-\frac{\pi}{2}$ per $y<0$, ed eguale a zero per $y=0$ (n. 79, es. 6).

87. Proponiamoci ora di calcolare la derivata rapporto ad y della funzione $\varphi(y)=\int_a^b f(x,y)dx$, per $y=y_0$. Dovremo calcolare perciò il limite, per k convergente a zero, di

$$\frac{\varphi(y_0+k)-\varphi(y_0)}{k}=\int_a^b \frac{f(x,y_0+k)-f(x,y_0)}{k}\,dx,$$

nello stabilire la qual formola si presuppone che $f(x,y)$ sia integrabile nell'intervallo (a,b) quando per y si prendano i valori di un certo intorno del punto y_0, i punti y_0+k del quale vengono in essa considerati. Supposta inoltre la $f(x,y)$ continua rispetto alla y pei punti di detto intorno e per qualunque valore di x di (a,b), e che ammetta per questi valori di x,y la derivata rapporto ad y, avremo

$$f(x,y_0+k)-f(x,y_0)=kf'_y(x,y_0+\theta_x k)$$

essendo $0<\theta_x<1$; e quindi ancora

$$\frac{\varphi(y_0+k)-\varphi(y_0)}{k}=\int_a^b f'_y(x,y_0+\theta_x k)\,dx$$

$$=\int_a^b f'_y(x,y_0)dx+\int_a^b [f'_y(x,y_0+\theta_x k)-f'_y(x,y_0)]\,dx,$$

dalla quale

$$(1)\quad \frac{y_0+k)-\varphi(y_0)}{k}-\int_a^b f'_y(x,y_0)dx\Big|=\Big|\int_a^b [f'_y(x,y_0+\theta_x k)-f'_y(x,y_0)]dx\Big|$$

Ora se, dato σ, esiste un numero k_0 positivo tale che per $|k| \leq k_0$ risulti

$$(2) \qquad \left| \int_a^b [f'_y(x, y_0 + \theta_x k) - f'_y(x, y_0)] dx \right| < \sigma,$$

dalla formola (1) si ricava

$$(3) \qquad \lim_{k=0} \frac{\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0)}{k} = \varphi'(y_0) = \int_a^b f'_y(x, y_0) dx.$$

Si scorge subito che: *è condizione sufficiente per stabilire la formola* (2) *che la* $f'_y(x, y)$ *sia equicontinua rispetto alla* y *nell' intervallo* (a, b) *sulla retta* $y = y_0$, *oppure che in questo intervallo essa sia assolutamente continua rispetto alle due variabili* x, y.

Notiamo di più che alla stessa formola (2) si giunge ancora se, la $f'_y(x, y)$ mantenendosi sempre finita pei valori delle variabili che si devono considerare, vi sono nell' intervallo (a, b) su $y = y_0$ dei punti c, in numero finito, la cui presenza fa cessare la continuità uniforme della $f'_y(x, y)$ rispetto alla y, o nei quali la $f'_y(x, y)$ non è continua rapporto ad x, y, ma, tolti i quali con intorni comunque piccoli, negli intervalli restanti la $f'_y(x, y)$ soddisfa alle precedenti condizioni. Ciò vedrebbesi allo stesso modo del caso analogo al n. 84, 3).

Come pure potrà avvenire che la $f(x, y)$, o la $f'_y(x, y)$, sia infinita in qualche punto dell' intervallo di integrazione, e che sia ancora valida la (3), come or ora vedremo.

La formola (3) ci dice che la derivata di un integrale definito, rapporto ad un parametro y di cui è funzione la funzione integranda, si ottiene senza aver bisogno di eseguire il calcolo dell' integrale, ma semplicemente derivando rapporto ad y la funzione integranda; si ha così la regola conosciuta col nome di regola di *derivazione sotto il segno integrale*, utilissima, come vedremo, per l' effettivo calcolo degli integrali definiti, e che noi potremo senz' altro adoperare quando si trovino verificate per la $f(x, y)$ le condizioni sufficienti precedentemente stabilite, affinchè abbia luogo la (3).

88. Sia ora

$$\varphi(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx,$$

dove supponiamo la $f(x, y)$ tale che permetta la derivazione sotto il segno integrale quando si suppongano costanti i limiti dell' integrale stesso; avremo

$$\frac{\varphi(y_0+k)-\varphi(y_0)}{k}=\int_{a(y_0)}^{b(y_0)}\frac{f(x, y_0+k)-f(x, y)}{k}dx-\frac{1}{k}\int_{a(y_0)}^{a(y_0+k)}f(x, y_0+k)\,dx$$

$$+\frac{1}{k}\int_{b(y_0)}^{b(y_0+k)}f(x, y_0+k)\,dx.$$

Supposta la $f(x, y)$ continua nel punto $x=a(y_0), y=y_0$ e nel punto $x=b(y_0), y=y_0$ possiamo porre, nel secondo integrale, $f(x, y_0+k)=f[a(y_0), y_0]+\varepsilon_1$, e nel terzo $f(x, y_0+k)=f[b(y_0), y_0]+\varepsilon_2$ dove $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ indicano quantità che possono numericamente rendersi minori di qualunque quantità positiva prefissata col prendere le k sufficientemente piccole in valore assoluto, e in luogo di questi integrali potremo scrivere

$$-\frac{a(y_0+k)-a(y_0)}{k}f[a(y_0), y_0]-\frac{1}{k}\int_{a(y_0)}^{a(y_0+k)}\varepsilon_1 dx,$$

$$\frac{b(y_0+k)-b(y_0)}{k}f[b(y_0), y_0]+\frac{1}{k}\int_{b(y_0)}^{b(y_0+k)}\varepsilon_2 dx;$$

cosichè, ammessa la esistenza delle derivate $a'(y_0)$, $b'(y_0)$ e posto $\frac{a(y_0+k)-a(y_0)}{k}=a'(y_0)+\delta_1$, $\frac{b(y_0+k)-b(y_0)}{k}=b'(y_0)+\delta_2$, dove δ_1, δ_2 convergono a zero con k, e preso k_0 in guisa che per $|k|\leq k_0$ sia $|\varepsilon_1|<\sigma_1$, $|\varepsilon_2|<\sigma_1$, e quindi

$$\left|\frac{1}{k}\int_{a(y_0)}^{a(y_0+k)}\varepsilon_1 dx\right|<\sigma_1|a'(y_0)+\delta_1|\ ,\ \left|\frac{1}{k}\int_{b(y_0)}^{b(y_0+k)}\varepsilon_2 dx\right|<\sigma_1|b'(y_0)+\delta_2|,$$

ed osservando ancora che

$$\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} dx = \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f'_y(x, y_0)\, dx + \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} [f'_y(x, y_0 + \theta_x k) - f'_y(x, y_0)] dx,$$

avremo

$$\left| \frac{\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0)}{k} - \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f'_y(x, y_0) dx + f[a(y_0), y_0]\, a'(y_0) - f[b(y_0), y_0]\, b'(y_0) \right.$$

$$< \left| \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} [f'_y(x, y_0 + \theta_x k) - f'_y(x, y_0)]\, dx \right| + |\delta_1 f[a(y_0), y_0]| + \sigma_1 |a'(y_0) + \delta_1|$$

$$+ |\delta_2 f[b(y_0), y_0]| + \sigma_1 |b'(y_0) + \delta_2|;$$

e, poichè σ_1 si può prendere piccolo come si vuole e col prendere k sufficientemente piccolo in valore assoluto ciò avviene pure per δ_1, δ_2 e per il primo termine del secondo membro, si vede subito come, assegnato σ, possa prendersi k_1 in guisa che per $|k| \leq k_1$ il secondo membro risulti minore di σ, e quindi avremo

$$\varphi'(y_0) = \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f'_y(x, y_0) dx - a'(y_0) f[a(y_0), y_0] + b'(y_0) f[b(y_0), y_0].$$

89. Supponendo per la precedente funzione $\varphi(y)$ soddisfatte le condizioni perchè ad essa, considerata come funzione composta di y, si possa applicare la regola di derivazione delle funzioni composte nel punto y (condizioni che omettiamo di singolarmente accennare e che sono generalmente verificate, ma che in ogni caso si potrà verificare se siano soddisfatte confrontando la nostra funzione, $\varphi(y)$. di y e di $a(y)$, $b(y)$, colle funzioni generali dei teoremi ai numeri 80,84 del vol. I), avremo

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial a} \frac{da}{dy} + \frac{\partial \varphi}{\partial b} \frac{db}{dy};$$

ma $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \displaystyle\int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x, y)\, dx$; e, la derivata di un integrale rispetto al i-

mite superiore (o inferiore) essendo la funzione (o meno la funzione) sotto il segno integrale nella quale, in luogo della variabile corrente di integrazione si ponga tal limite, sarà altresì

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a} = -f[a(y), y], \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial b} = f[b(y), y];$$

cosichè

$$\frac{d\varphi}{dy} = \int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x, y)\, dx + f[b(y), y]\, \frac{db}{dy} - f[a(y), y]\, \frac{da}{dy}.$$

Questa formola contiene come caso particolare quella dimostrata al n. 87, qualora si suppongano costanti i limiti $a(y)$, $b(y)$; e, se si suppone sia $f(x, y)$ indipendente da y, cioè, sia

$$f(x, y) = \mathrm{F}(x), \quad \varphi(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} \mathrm{F}(x)\, dx,$$

ci dà

$$\frac{d\varphi}{dy} = \mathrm{F}[b(y)]\, \frac{db}{dy} - \mathrm{F}[a(y)]\, \frac{da}{dy}.$$

90. Supponiamo che la $f(x, y)$ o la $f'_y(x, y)$ o entrambe divengano infinite per $x = c$ e per $y = y_0$, od anche per $x = c$ e per tutti i punti d'un intorno del punto (c, y_0) sulla retta $x = c$, intendendo con ciò che non vi è alcun intorno di questo punto, per tutti i punti del quale $f(x, y)$ si mantiene finita o per tutti i punti del quale si mantiene finita la $f'_y(x, y)$, ed intendendo di considerare questa derivata per tutti i punti nei quali la $f(x, y)$ è finita; e supponiamo che queste funzioni si mantengano però sempre integrabili rispetto alla x. Nel caso che la $f'_y(x, y)$ sola o insieme alla $f(x, y)$ divenga infinita supponiamo inoltre che, assegnato il solito numero σ, esistano i numeri positivi ε_0, k_0 tali che per $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ e $\varepsilon_1 < \varepsilon$, e per $|k| \leq k_0$, dove k possa anche variare con x, sia

$$(1) \qquad \left| \int_{c-\varepsilon}^{c-\varepsilon_1} f'_y(x, y_0 + k) dx \right| < \sigma, \qquad \left| \int_{c+\varepsilon_1}^{c+\varepsilon} f'_y(x, y_0 + k)\, dx \right| < \sigma;$$

in particolare potrà la $f'_y(x, y)$ soddisfare per tutti i valori y di un intorno di (c, y_0) alla condizione dell'enunciato della prima parte del teorema al n. 66 (cioè se qualunque sia l'y di tale intorno è $|f(x, y)\,(c-x)^\mu| < h$ per $|c-x| \leq \varepsilon_0$, c escluso etc.).

Allora, se si ammette che negli intervalli di (a, b), cui non appartiene il punto c, sia applicabile la derivazione sotto il segno all' integrale

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx,$$

dico che avremo

$$\varphi'(y_0) = \int_a^b f'_y(x, y_0) dx. \tag{2}$$

Invero, fissiamo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ in guisa che siano soddisfatte le condizioni (1) per $\varepsilon_1 < \varepsilon$, e per $|k| \leq k_0$ se $f'_y(x, y)$ non si mantiene finita; o semplicemente in modo che sia $A\varepsilon < \sigma$, dove $A > |f'_y(x, y)|$ per tutti i valori di x, y da considerarsi, se $f'_y(x, y)$ si mantiene finita; ed in guisa che nelle formole

$$\int_a^{c-\varepsilon} f'_y(x, y_0) dx = \int_a^c f'_y(x, y_0)\, dx + \delta_1, \quad \int_{c+\varepsilon}^b f'_y(x, y_0) dx = \int_c^b f'_y(x, y_0) dx + \delta_2,$$

$|\delta_1|$, $|\delta_2|$ risultino minori di σ. Allora, poichè negli integrali del secondo membro della formola

$$\frac{\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0)}{k} = \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon_1 = 0} \int_{c-\varepsilon}^{c-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_1 = 0} \int_{c+\varepsilon_1}^{c+\varepsilon} + \int_{c+\varepsilon}^b \right\} \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} dx$$

possiamo porre

$$\frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} = f'_y(x, y_0 + \theta_x k),$$

ed osservando che esiste un numero positivo $k_1 \leq k_0$ tale che per $|k| \leq k_1$ è $|\delta_3| < \sigma$, $|\delta_4| < \sigma$ dove le δ_3, δ_4 soddisfanno alle eguaglianze

$$\int_a^{c-\varepsilon} f'_y(x, y_0 + \theta_x k) dx = \int_a^{c-\varepsilon} f'_y(x, y_0) dx + \delta_3, \quad \int_{c+\varepsilon}^b f'_y(x, y_0 + \theta_x k) dx = \int_{c+\varepsilon}^b f'_y(x, y_0) dx + \delta_4.$$

avremo ancora

$$\frac{\varphi(y_0+k)-\varphi(y_0)}{k}=\int_a^b f'_y(x,y_0)dx+\delta_1+\delta_2+\delta_3+\delta_4$$

$$+\lim_{\varepsilon_1=0}\int_{c-\varepsilon}^{c-\varepsilon_1} f'_y(x,y_0+\theta_x k)dx+\lim_{\varepsilon_1=0}\int_{c+\varepsilon_1}^{c+\varepsilon} f'_y(x,y_0+\theta_x k)dx,$$

da cui

$$\left|\frac{\varphi(y_0+k)-\varphi(y_0)}{k}-\int_a^b f'_y(x,y_0)\,dx\right|\leq|\delta_1|+|\delta_2|+|\delta_3|+|\delta_4|+2\sigma<6\sigma$$

per $|k|\leq k_1$, e rimane così dimostrata la (2).

Si intende poi come questa formola valga ancora se vi è un numero finito di punti come c.

91. Consideriamo ora l' integrale

$$\varphi(y)=\int_a^\infty f(x,y)dx$$

e supponiamo che, per quanto grande si fissi γ, all' integrale $\int_a^\gamma f(x,y)dx$ si possa applicare la derivazione sotto il segno integrale, e che, dato σ, esistano due numeri positivi γ e k_0 tali che per $|k|\leq k_0$, potendo k variare con x, e qualunque sia $b>\gamma$, risulti $\left|\int_\gamma^b f'_y(x,y_0+k)dx\right|<\sigma$, in particolare se la funzione costituita dai limiti superiori dei valori assoluti che prende la funzione $f'_y(x,y_0+k)$ per uno stesso valore di x e per $|k|\leq k_0$ è integrabile tra un certo numero e l' infinito; allora avremo

$$\varphi'(y_0)=\int_a^\infty f'_y(x,y)dx\,.$$

Invero, fissato γ e k_0 nel modo ora detto, ed osservando che

per valori di x comunque grandi si ha sempre

$$\frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} = f'_y(x, y_0 + \theta_x k),$$

avremo

$$\frac{\varphi(y_0+k) - \varphi(y_0)}{k} = \int_a^\gamma \frac{f(x, y_0+k) - f(x, y_0)}{k} dx + \int_\gamma^\infty f'_y(x, y_0 + \theta_x k) dx$$

$$= \int_a^\gamma f'_y(x, y_0) dx + \delta + \int_\gamma^\infty f'_y(x, y_0) dx + \int_\gamma^\infty [f'_y(x, y_0 + \theta_x k) - f'_y(x, y_0)] dx$$

$$= \int_a^\infty f'_y(x, y_0) dx + \delta + \int_\gamma^\infty [f'_y(x, y_0 + \theta_x k) - f'_y(x, y_0)] dx,$$

dove sarà $|\delta| < \sigma$ per $|k| \leq k_1 \leq k_0$, cosichè, per questi valori di k,

$$\left| \frac{\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0)}{k} - \int_a^\infty f'_y(x, y_0) dx \right| < 3\sigma,$$

e quindi la (1).

92. Applichiamo le regole esposte ad alcuni

ESEMPI

1) Sia $\varphi(y) = \int_0^\pi \log(1 - 2y \cos x + y^2) dx$; si riconosce subito che, se $|y|$ è diverso da *uno*, è

$$\varphi'(y) = \int_0^\pi \frac{2y - 2\cos x}{1 - 2y \cos x + y^2} dx.$$

Se $|y| = 1$, poniamo sia $y = 1$, la funzione sotto il segno integrale di $\varphi(y)$ diviene infinita per $x = 0$; per x diverso da zero è

$f'_y(x, 1) = 1$, ma la $f'_y(x, y) = 2\,\dfrac{y - \cos x}{1 - 2y\cos x + y^2}$ non si mantiene finita in un intorno del punto $(0, 1)$, il che si riconosce subito se, facendo $y = 1 + x$, si fa convergere x a zero, e non potremo neanche asserire che, dato σ, esista un numero ε tale che per $\varepsilon_1 < \varepsilon$ e per $|k| \leq k_0$, essendo k dipendente da x, risulti

$$\left|\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon} f'_y(x, 1 + k)\,dx\right| = \left|\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon} \frac{1 + k - \cos x}{1 - 2(1 + k)\cos x + (1 + k)^2}\,dx\right| < \sigma,$$

perchè se si fa variare k con x, ponendo $k = x$, la funzione integranda non è neanche integrabile in un intorno del punto $x = 0$, come si può verificare. Cosichè, per $y = 1$, non possiamo asserire che alla $\varphi(y)$ sia applicabile la derivazione sotto il segno integrale; riconosciamo anzi che non la è, perchè sapendo che è $\varphi(y) = \pi \log y^2$ per $|y| > 1$ e $\varphi(y) = 0$ per $|y| \leq 1$, si vede che per $y = 1$ la $\varphi(y)$ non ammette derivata, avendo la derivata a sinistra uguale a zero e quella a destra uguale a π, mentre abbiamo $\int_0^{\pi} f'_y(x, 1)dx = \int_0^{\pi} dx = \pi$.

Cosichè avremo

$$\frac{d}{dy}\left\{\int_0^{\pi} \log(1 - 2y\cos x + y^2)dx\right\}$$

$$= 2\int_0^{\pi} \frac{y - \cos x}{1 - 2y\cos x + y^2}\,dx = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{y} & \text{per } |y| > 1 \\ 0 & \text{per } |y| < 1, \end{cases}$$

e per $|y| = 1$ non esiste la derivata indicata nel primo membro, mentre il secondo è uguale a $\pm\,\pi$.

2) Sia $\varphi(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2y}} \log \operatorname{sen}(xy)\,dx$, dove supponiamo y diverso da zero.

La funzione integranda diviene infinita per $x=0$, e la sua derivata rapporto ad y, per x diverso da zero, $\frac{x\cos(xy)}{\operatorname{sen}(xy)}=x\cot(xy)$ è sempre finita; e, poichè le altre condizioni richieste sono anche soddisfatte, possiamo derivare sotto il segno integrale, ed otteniamo

$$\varphi'(y)=-\frac{\pi}{2y^2}\log\operatorname{sen}\left(y\frac{\pi}{2y}\right)+\int_0^{\frac{\pi}{2y}}x\cot(xy)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2y}}x\cot(xy)\,dx;$$

cosichè, osservando che, posto $xy=\zeta$, è

$$\varphi(y)=\frac{1}{y}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\operatorname{sen}\zeta\,d\zeta=-\frac{\pi\log 2}{2y},$$

abbiamo

$$\varphi'(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2y}}x\cot(xy)\,dx=\frac{\pi\log 2}{2y^2},$$

ciò che può anche ottenersi dalla formola $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\zeta\cot\zeta\,d\zeta=\frac{\pi\log 2}{2}$ ponendo $\zeta=xy$ (Vedi esercizio 4° a pag. 183).

3) La derivata rapporto ad y, $\frac{x^{y-1}\log x}{1+x}$, della funzione sotto il segno integrale in

$$\varphi(y)=\int_0^{\infty}\frac{x^{y-1}\,dx}{1+x}=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi y}.\quad 0<y<1,$$

[Vedi N. 73, es. 2)] non si mantiene finita in un intorno del punto $(x=0\,,y)$, ma è tale però che

$$\lim_{x=0}x(\log x)^{1+\mu}\frac{x^{y-1}\log x}{1+x}=\lim\frac{x^y(\log x)^{2+\mu}}{1+x}=0,$$

dove μ si suppone positivo, e perciò per $|k| \leq k_0$ risulterà

$$\left|\frac{x^{y+k}(\log x)^{2+\mu}}{1+x}\right| \leq \left|\frac{x^{y-k_0}(\log x)^{2+\mu}}{1+x}\right|$$

minore di una certa quantità positiva, e nel nostro caso anche piccola a piacere e prefissata; quindi potremo intanto applicare all' integrale $\int_0^\gamma \frac{x^{y-1}\,dx}{1+x}$ la derivazione sotto il segno, e ciò anche per quanto grande si fissi γ.

Inoltre, poichè

$$\lim_{x=\infty} \frac{x^{y-1}\log x}{1+x} = \lim \frac{\log x}{x^{1-y}(1+x)} = \lim \frac{1}{x[(1-y)x^{-y}+(2-y)\,x^{1-y}]},$$

si vede che questa derivata diviene all' infinito infinitesima di ordine superiore al primo, $2-y$, e si riconosce che è integrabile in un intervallo (γ, ∞) la funzione $\frac{x^{y-1+k_0}\log x}{1+x}$ dei massimi valori che $\frac{x^{y-1+k}\log x}{1+x}$ prende, corrispondentemente ad ogni valore di x, quando y varia tra $y-k_0$ e $y+k_0$; cosichè potremo applicare la derivazione sotto il segno integrale ed avremo così

$$\varphi'(y) = \int_0^\infty \frac{x^{y-1}\log x}{1+x}\,dx = -\frac{\pi^2\cos\pi y}{\operatorname{sen}^2\pi y}, \quad 0<y<1.$$

In particolare $\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx = 0.$

93. Sia $f(x,y)$ funzione continua in un campo finito che contenga internamente il rettangolo limitato dalle rette $x=a$, $x=b$, $y=\alpha$, $y=\beta$; allora la funzione di y, $\varphi(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$, essendo con inua per i valori di y dell' intervallo (α, β) è integrabile, cosichè

avremo

$$u = \int_\alpha^\beta \varphi(y)\, dy = \int_\alpha^\beta \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy,$$

che scriveremo semplicemente

$$u = \int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

La espressione nel secondo membro chiamasi *integrale doppio* [1], ed esprime che dobbiamo prima integrare la funzione di x, $f(x, y)$, tra a e b, e dell' integrale così ottenuto $\varphi(y)$ dobbiamo prendere l'integrale rispetto ad y tra α e β.

Analogamente, posto $\psi(x) = \int_\alpha^\beta f(x, y) dy$, abbiamo

$$v = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy;$$

dico che $u = v$.

Invero, poichè $f(b, y)$, che è la derivata di $\int_a^b f(x, y) dx$ rapporto a b, è funzione continua di b, y, potremo per calcolare $\frac{\partial u}{\partial b}$ derivare sotto il segno integrale $\int_\alpha^\beta$ ed avremo così

$$\frac{\partial u}{\partial b} = \int_\alpha^\beta f(b, y)\, dy;$$

---

[1]) La teoria degli integrali doppi sarà svolta in seguito; qui ne diamo quel tanto che occorre per non privarci ora di un mezzo potente pe l'effettivo calcolo degli integrali definiti.

e, poichè $\frac{\partial v}{\partial b} = \int_\alpha^\beta f(b, y)\, dy$, è $\frac{\partial u}{\partial b} = \frac{\partial v}{\partial b}$. Analogamente si proverebbe che le derivate di u, v rapporto ad a, α, β sono uguali; cosichè $u = v +$ costante. Ma per $a = b$ è $u = 0$, $v = 0$, quindi la costante è zero, cioè $u = v$, come volevamo dimostrare, ossia

$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy,$$

che ci dice che in un integrale doppio, nella ipotesi fatta che $f(x, y)$ sia continua e i limiti dell' integrale siano costanti e finiti, le integrazioni possono invertirsi, od anche ci dà la regola di *integrazione sotto il segno integrale*, in virtù della quale per calcolare l' integrale definito rapporto ad y tra α e β di $\int_a^b f(x, y)\, dx$ si può integrare la funzione sotto il segno integrale $\int_a^b$.

94. Supponendo che abbia valore determinato finito $\int_\alpha^\beta dy \int_a^\infty f(x, y)\, dx$, e, per quanto grande si fissi γ, sia sempre

$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^\gamma f(x, y)\, dx = \int_a^\gamma dx \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy,$$

e che $\int_a^\infty f(x, y)\, dx$ sia equiconvergente nell' intervallo (α, β) di y (vedi nota a pag. 221), dico che avrà valore determinato finito anche $\int_a^\infty dx \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy$ e che avremo

$$(1) \qquad \int_\alpha^\beta dy \int_a^\infty f(x, y)\, dx = \int_a^\infty dx \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy.$$

Invero, dato σ, sia c tale che per $\gamma \geqq c$ e per $b > \gamma$ e qualunque sia l'y di (α, β) è $\left|\int_\gamma^b f(x, y)\, dx\right| < \frac{\sigma_1}{\beta - \alpha}$ essendo $\sigma_1 < \sigma$, e quindi $\left|\int_\gamma^\infty f(x, y)\, dx\right| \leqq \frac{\sigma_1}{\beta - \alpha} < \frac{\sigma}{\beta - \alpha}$; scriviamo

$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^\infty f(x, y) dx = \int_\alpha^\beta dy \int_a^\gamma f(x, y) dx + \int_\alpha^\beta dy \int_\gamma^\infty f(x, y) dx$$

$$= \int_a^\gamma dx \int_\alpha^\beta f(x, y) dy + \int_\alpha^\beta dy \int_\gamma^\infty f(x, y) dx,$$

da cui riconosciamo che per $\gamma \geqq c$ si ha

$$\left|\int_\alpha^\beta dy \int_a^\infty f(x, y) dx - \int_a^\gamma dx \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy\right| < \sigma,$$

cioè

$$\lim_{\gamma = \infty} \int_a^\gamma dx \int_\alpha^\beta f(x, y) dy = \int_\alpha^\beta dy \int_a^\infty f(x, y) dx,$$

ossia la (1).

Se ha valore determinato finito $\int_\alpha^\infty dy \int_a^\infty f(x, y)\, dx$ e, per quanto grande sia γ, è

$$\int_\alpha^\infty dy \int_a^\gamma f(x, y) dx = \int_a^\gamma dx \int_\alpha^\infty f(x, y) dy$$

[e perciò è sufficiente, come abbiamo visto or ora, che sia determinato finito $\int_a^\gamma dx \int_\alpha^\infty f(x,y)dy$ e che

$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^\gamma f(x,y)dx = \int_a^\gamma dx \int_\alpha^\beta f(x,y)dy$$

per quanto grande è β e che $\int_\alpha^\infty f(x,y)dy$ sia equiconvergente nell'intervallo (a,∞) di x], e se, dato σ, per $\gamma \geqq c$ è $\left|\int_\alpha^\infty dy \int_\gamma^\infty f(x,y)dx\right| < \sigma$, avrà valore determinato finito anche $\int_a^\infty dx \int_\alpha^\infty f(x,y)dy$ ed avremo

$$\int_\alpha^\infty dy \int_a^\infty f(x,y)dx = \int_a^\infty dx \int_\alpha^\infty f(x,y)dy.$$

Ciò ricavasi subito dalla formola

$$\int_\alpha^\infty dy \int_a^\infty f(x,y)dx = \int_\alpha^\infty dy \int_a^\gamma f(x,y)dx + \int_\alpha^\infty dy \int_\gamma^\infty f(x,y)dx,$$

da cui

$$\left|\int_\alpha^\infty dy \int_a^\infty f(x,y)dx - \int_a^\gamma dx \int_\alpha^\infty f(x,y)dy\right| = \left|\int_\alpha^\infty dy \int_\gamma^\infty f(x,y)dx\right|.$$

95. Se $f(x,y)$ diviene infinita per $x=c$, essendo c un punto dell'intervallo (a,b), ma ha valore determinato finito l'integrale

$\int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x,y)dx$ ed è lecito invertire le integrazioni in $\int_\alpha^\beta dy \int_{a_1}^{b_1} f(x,y)dx$ ove (a_1, b_1) non contenga c, e se gli integrali singolari di $f(x,y)$ relativi al punto c convergono in (α, β) uniformemente a zero, cioè se, dato σ, esiste un ε_0 tale che per $\varepsilon < \varepsilon_0$, $\varepsilon_1 < \varepsilon$, $\varepsilon_2 < \varepsilon_0$, $\varepsilon_3 < \varepsilon_2$ e qualunque sia l'y di (α, β) è $\left| \int_{c-\varepsilon}^{c-\varepsilon_1} f(x,y)dx \right| < \sigma$, $\left| \int_{c+\varepsilon_3}^{c+\varepsilon_2} f(x,y)dx \right| < \sigma$, allora ha valore determinato finito anche $\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)dy$ e si ha

$$(1) \qquad \int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)dy.$$

Infatti, dalla formola

$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_\alpha^\beta dy \int_a^{c-\varepsilon} f(x,y)dx + \int_\alpha^\beta \left[\lim_{\varepsilon_1=0} \int_{c-\varepsilon}^{c-\varepsilon_1} f(x,y)dx \right] dy$$

$$+ \int_\alpha^\beta \left[\lim_{\varepsilon_3=0} \int_{c+\varepsilon_3}^{c+\varepsilon_2} f(x,y)dx \right] dy + \int_\alpha^\beta dy \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x,y)dx$$

si ricava

$$\left| \int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x,y)dx - \int_a^{c-\varepsilon} dx \int_\alpha^\beta f(x,y)\, dy - \int_{c+\varepsilon_2}^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)\, dy \right|$$

$$\leq \left| \int_\alpha^\beta \left[\lim_{\varepsilon_1=0} \int_{c-\varepsilon}^{c-\varepsilon_1} f(x,y)\, dx \right] dy \right| + \left| \int_\alpha^\beta \left[\lim_{\varepsilon_3=0} \int_{c+\varepsilon_3}^{c+\varepsilon_2} f(x,y)dx \right] dy \right|,$$

e, poichè il secondo membro per $\varepsilon_2 < \varepsilon_0$, $\varepsilon < \varepsilon_0$ è $\leq \frac{2\sigma}{\beta - \alpha}$, avremo

che, comunque convergano a zero ε, ε_2 il limite di

$$\int_a^{c-\varepsilon} dx \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy + \int_{c+\varepsilon_2}^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy \text{ è } \int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x,y)\,dx,$$ cioè si ha la (1).

Il teorema vale ancora se dei punti come c ve ne è un numero finito in (a, b).

96. La derivazione e la integrazione sotto il segno sono mezzi potenti pel calcolo effettivo degli integrali definiti. Diamone alcuni

ESEMPI

1) Dalla formola

$$\int \frac{dx}{1+y^2 \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1-y^2}\,[x - y \operatorname{arc\,tg}(y \operatorname{tg} x)] + C$$

si ricava

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+y^2 \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\pi}{2(1+y)};$$

moltiplicando per dy e integrando tra 0 e y, dove y è diverso da -1, abbiamo

$$\int_0^y dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+y^2 \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\pi}{2}\int_0^y \frac{dy}{1+y} = \frac{\pi}{2}\log(1+y),$$

e, poichè, come si vede subito, possiamo invertire le integrazioni, abbiamo ancora

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^y \frac{dy}{1+y^2 \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\pi}{2}\log(1+y),$$

ossia, eseguendo l'integrazione interna,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arc\,tg}(y \operatorname{tg} x) \frac{dx}{\operatorname{tg} x} = \frac{\pi}{2} \log(1+y).$$

In particolare, per $y = 1$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{\operatorname{tg} x} = \frac{\pi}{2} \log 2.$

2) Abbiamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^1 \frac{dy}{a^2 - b^2 x^2 \operatorname{sen}^2 y} = \frac{1}{2ab} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{a + b \operatorname{sen} y}{a - b \operatorname{sen} y} \frac{dy}{\operatorname{sen} y},$$

e, poichè possiamo invertire le integrazioni ed osservando che per $|a| > |b|$ e se $0 \leq x^2 \leq 1$ è

$$\int \frac{dy}{a^2 - b^2 x^2 \operatorname{sen}^2 y} = \frac{1}{a\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2 x^2} \operatorname{tg} y}{a} \right) + C,$$

ricaviamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^1 \frac{dy}{a^2 - b^2 x^2 \operatorname{sen}^2 y} = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{a^2 - b^2 x^2 \operatorname{sen}^2 y} = \frac{\pi}{2a} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}}$$

$$= \frac{\pi}{2ab} \operatorname{arc\,sen} \frac{b}{a},$$

e troviamo così

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{a + b \operatorname{sen} y}{a - b \operatorname{sen} y} \frac{dy}{\operatorname{sen} y} = \pi \operatorname{arc\,sen} \frac{b}{a}, \quad |a| > |b|,$$

(Vedi Esercizio 3 a pag. 205).

3) La funzione $\dfrac{\log(1 + a^2 x^2)}{y^2 + x^2}$ è integrabile nell'intervallo $(0, +\infty)$ per

qualunque valore di a, perchè per $a=0$ è zero, e per a diverso da zero abbiamo (n. 72 e nota a pag. 154)

$$\lim_{x=\infty} x(\log x)^{1+\mu}\frac{\log(1+a^2x^2)}{y^2+x^2}=\lim x(\log x)^{1+\mu}\frac{2\log a+\log\left(1+\frac{1}{a^2x^2}\right)+2\log x}{y^2+x^2}$$

$$\lim\left\{\frac{x^2}{y^2+x^2}\frac{(\log x)^{1+\mu}}{x}\left[2\log a+\log\left(1+\frac{1}{a^2x^2}\right)\right]\right\}+2\lim\left\{\frac{x^2}{y^2+x^2}\frac{(\log x)^{2+\mu}}{x}\right\}=0,$$

e riconosciamo anche così che all' integrale

$$I=\int_0^\infty\frac{\log(1+a^2x^2)}{y^2+x^2}\,dx$$

può applicarsi la derivazione sotto il segno integrale rapporto ad a per a diverso da zero, ottenendo

$$\frac{\partial I}{\partial a}=\int_0^\infty\frac{2ax^2dx}{(1+a^2x^2)(y^2+x^2)}=\int_0^\infty\frac{2a}{1-a^2y^2}\left(\frac{1}{1+a^2x^2}-\frac{y^2}{y^2+x^2}\right)dx=\frac{\pi}{1+ay},$$

dalla quale, integrando rapporto ad a tra due limiti α, a che non contengano tra loro il, nè coincidano col, punto $a=0$, si ha

$$(1)\qquad I=\frac{\pi}{y}\log\frac{1+ay}{1+\alpha y}+C.$$

Se ora si osserva che I è continua rapporto ad a, anche per $a=0$, perchè, dato σ, per $0<a<1$ e per $\gamma\geqq c$, è

$$\int_\gamma^\infty\frac{\log(1+a^2x^2)}{y^2+x^2}\,dx\leqq\int_\gamma^\infty\frac{\log(1+x^2)}{y^2+x^2}\,dx<\sigma,$$

perchè $\frac{\log(1+x^2)}{y^2+x^2}$ è integrabile in $(0,\infty)$, potremo nella (1), passando al limite per $a=0$, porre $\lim I=0$, ed ottenere così $C=\frac{\pi}{y}\log(1+\alpha y)$ ed in conseguenza

$$I=\int_0^\infty\frac{\log(1+a^2x^2)}{y^2+x^2}\,dx=\frac{\pi}{y}\log(1+ay).$$

Cambiando in questo integrale x in $\frac{1}{x}$ e facendo $a = 1$, abbiamo

$$\int_0^\infty \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \frac{dx}{1 + y^2x^2} = \frac{\pi}{y} \log(1 + y);$$

moltiplicando per ydy e integrando tra 0 e β si ha

$$\int_0^\beta ydy \int_0^\infty \log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\frac{dx}{1+y^2x^2} = \pi\int_0^\beta \log(1 + y)dy = \pi(1 + \beta)\log(1 + \beta) - \pi\beta.$$

Ora possiamo invertire le integrazioni, perchè, oltre ad essere $\int_0^\beta dy \int_0^\gamma dx \ldots = \int_0^\gamma dx \int_0^\beta dy \ldots$, per quanto grande sia γ, è anche, per tutti i valori y di $(0, \beta)$,

$$\int_\gamma^\infty y \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \frac{dx}{1 + x^2y^2} < \beta \int_\gamma^\infty \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx < \varepsilon$$

per tutti i valori di γ maggiori di un certo numero c, giacchè $\log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ è integrabile in un intervallo (b, ∞).

Invertendo le integrazioni abbiamo

$$\pi(1 + \beta)\log(1 + \beta) - \pi\beta = \int_0^\infty \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx \int_0^\beta \frac{ydy}{1 + x^2y^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \log(1 + \beta^2x^2) \frac{dx}{x^2},$$

da cui ancora, posto $x = \frac{\zeta}{c}$, $\beta = \frac{c}{g}$,

$$\int_0^\infty \log\left(1+\frac{c^2}{\zeta^2}\right)\log\left(1+\frac{\zeta^2}{g^2}\right)\frac{d\zeta}{\zeta^2} = 2\pi\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{g}\right)\log\left(1+\frac{c}{g}\right) - \frac{\pi}{g}.$$

In particolare

$$\int_0^\infty \log\left(1+\frac{1}{\zeta^2}\right)\log(1+\zeta^2)\,\frac{d\zeta}{\zeta^2}=2\pi(2\log 2-1).$$

4) Abbiamo $\int_0^1 dy\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(yx)}{x}\,dx=\int_0^1 \frac{\pi}{2}\,dy=\frac{\pi}{2}$ perchè $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(yx)}{x}$ vale $\frac{\pi}{2}$ se y è positivo, e vale zero se y è zero, ma nel calcolo del nostro integrale possiamo porre $\frac{\pi}{2}$ in luogo di zero per $y=0$, perchè con ciò non cambiasi il valore dell'integrale stesso. Abbiamo perciò altresì

$$\frac{\pi}{2}=\int_0^\varepsilon dy\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(yx)}{x}\,dx+\int_\varepsilon^1 dy\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(yx)}{x}\,dx$$

$$=\varepsilon\frac{\pi}{2}+\int_\varepsilon^1 dy\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(yx)}{x}\,dx.$$

Nell' integrale doppio possiamo invertire le integrazioni perchè $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(yx)}{x}\,dx$ è equiconvergente nell' intervallo $(\varepsilon, 1)$ di y se ε è positivo e diverso da zero, essendo

$$\int_\gamma^\infty \frac{\operatorname{sen}(yx)}{x}\,dx=\int_{\gamma y}^\infty \frac{\operatorname{sen}\zeta}{\zeta}\,d\zeta,$$

e, dato σ, esiste un numero c tale che per $\gamma_1 \geqq c$ è $\left|\int_{\gamma_1}^\infty \frac{\operatorname{sen}\zeta}{\zeta}\,d\zeta\right| < \sigma$; cosichè, per tutti i valori di $\gamma \geqq \frac{c}{\varepsilon}$ e per tutti i valori di y dell'intervallo $(\varepsilon, 1)$ essendo $\gamma y \geqq \gamma\varepsilon \geqq c$, sarà $\left|\int_\gamma^\infty \frac{\operatorname{sen}(yx)}{x}\,dx\right| < \sigma$.

Avremo in conseguenza

$$\frac{\pi}{2}(1-\varepsilon)=\int_0^\infty \frac{dx}{x}\int_\varepsilon^1 \operatorname{sen}(yx)dy=\int_0^\infty \frac{dx}{x}\,\frac{\cos\varepsilon x-\cos x}{x},$$

ossia, osservando che hanno valore determinato finito gli integrali $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}(1-\cos x)$, $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}(1-\cos\varepsilon x)$, abbiamo ancora

$$\frac{\pi}{2}(1-\varepsilon)=\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}(1-\cos x)-\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}(1-\cos\varepsilon x)$$

$$=\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}(1-\cos x)-\varepsilon\int_0^\infty \frac{d\zeta}{\zeta^2}(1-\cos\zeta)=(1-\varepsilon)\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}(1-\cos x),$$

e quindi

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}(1-\cos x)=\frac{\pi}{2},\ \text{ossia}\ 2\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{x^2}dx=\frac{\pi}{2},$$

da cui, cambiando $\frac{x}{2}$ in x,

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}.$$

5) Osservando che si ha $e^{-\zeta^2}=\dfrac{1}{1+\zeta^2+\dfrac{\zeta^2}{1.2}+\dots}$, si riconosce subito che l' integrale

$$I=\int_0^\infty e^{-\zeta^2}d\zeta$$

ha valore determinato finito, che ci proponiamo calcolare.

Posto $\zeta=x\sqrt{y}$, $y>0$, e presa x come nuova variabile di inte-

grazione, abbiamo

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2 y} \sqrt{y}\, dx, \text{ da cui } I \frac{1}{\sqrt{y}} = \int_0^\infty e^{-x^2 y}\, dx\,;$$

moltiplicando per $e^{-y}\, dy$ e integrando tra $\varepsilon > 0$ e ∞, ciò che può farsi perchè $\frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}$ è integrabile in questo intervallo, otteniamo

$$(2) \qquad I \int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-y}\, dy}{\sqrt{y}} = \int_\varepsilon^\infty dy \int_0^\infty e^{-y(1+x^2)}\, dx$$

Ora dico che possiamo invertire le integrazioni nel secondo membro. Infatti, per quanto grande si prenda γ, è determinato

$$\int_0^\gamma dx \int_\varepsilon^\infty e^{-y(1+x^2)}\, dy = \int_0^\gamma dx\, \frac{e^{-\varepsilon(1+x^2)}}{1+x^2}\,,$$

e per quanto grandi siano γ e β è

$$\int_0^\gamma dx \int_\varepsilon^\beta e^{-y(1+x^2)}\, dy = \int_\varepsilon^\beta dy \int_0^\gamma e^{-y(1+x^2)}\, dx,$$

perchè $e^{-y(1+x^2)}$ è sempre continua e $\int_\varepsilon^\infty e^{-y(1+x^2)}\, dy$ equiconvergente nell'intervallo $(0, \infty)$ di x, la qual cosa si riconosce subito osservando che

$$\int_\gamma^\infty e^{-y(1+x^2)}\, dy = \frac{1}{1+x^2}\, \frac{1}{e^{\gamma(1+x^2)}} < \frac{1}{e^\gamma}\,.$$

imane quindi solo a dimostrare che, dato σ, esiste un numero c tal che per $\gamma \geqq c$ è $\int_c^\infty dy \int_0^\infty e^{-y(1+x^2)}\, dx < \sigma$. A tale scopo osser-

vando che $e^{-y(1+x^2)} = \dfrac{1}{1 + y(1+x^2) + \dfrac{y^2(1+x^2)^2}{1.2} + \ldots}$ e quindi

$$\int_\gamma^\infty e^{-y(1+x^2)}\,dx < \frac{2}{y^2}\int_\gamma^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{y^2}\left(\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{\gamma}{1+\gamma^2} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\gamma\right),$$

$$\int_\varepsilon^\infty dy \int_\gamma^\infty e^{-y(1+x^2)}\,dx < \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{1+\gamma^2} - \operatorname{arc\,tg}\gamma\right)\int_\varepsilon^\infty \frac{dy}{y^2}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\gamma\right) - \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\gamma}{1+\gamma^2},$$

si scorge la esistenza d'un numero c tale che per $\gamma \geqq c$ risulti

$$\int_\gamma^\infty dy \int_\gamma^\infty e^{-y(1+x^2)}\,dx < \sigma.$$

Provata così la invertibilità delle integrazioni nella formola (2), abbiamo subito

$$\mathrm{I}\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-y}\,dy}{\sqrt{y}} = \int_0^\infty dx \int_\varepsilon^\infty e^{-y(1+x^2)}\,dy = \int_0^\infty dx\,\frac{e^{-\varepsilon(1+x^2)}}{1+x^2},$$

e, poichè l'ultimo integrale è finito e continuo, a destra, per $\varepsilon = 0$, avremo, al limite per $\varepsilon = 0$,

$$\mathrm{I}\int_0^\infty \frac{e^{-y}\,dy}{\sqrt{y}} = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

ovvero, posto $\sqrt{y} = u$ nell'integrale del primo membro, $\mathrm{I}^2 = \frac{\pi}{2}$, dalla quale

$$\mathrm{I} = \int_0^\infty e^{-\zeta^2}\,d\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Esercizi

1. Dalla formola $\int_0^\infty \log(1 + k\cos x)\,\frac{dx}{\cos x} = \pi \operatorname{arc\,sen} k$, $|k| \leq 1$, (Eser. 4° pag. 205) si ricavi $\int_0^\pi \frac{dx}{1 + k\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{1-k^2}}$, $|k| < 1$.

2. Dalla formola $\int_0^\pi \cos mx \log(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)dx = -\frac{\pi\alpha^m}{m}$, m intero positivo, $|\alpha| < 1$, se ne ricavi un'altra, che combinata con quella dell'esercizio 12° a pag. 207 permetta di trovare

$$\int_0^\pi \frac{\cos mx}{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2}\,dx = \frac{\pi\alpha^m}{1-\alpha^2},\ |\alpha| < 1,\ m \text{ int. pos.}$$

3. Dalla formola $\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} mx}{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,\alpha^{m-1}$, $|\alpha| < 1$, m int. pos. (Es. 12° a pag. 207) si ricavi

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} mx \operatorname{arc\,tg} \frac{a \operatorname{sen} x}{1 - a\cos x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{a^m}{m},\ |a| < 1.\ m \text{ int. pos.}$$

Si dimostri che questa formola vale anche per $|a| = 1$.

4. Posto $I = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg}(xy)}{x(1+x^2)}\,dx$, osservando che

$\frac{dI}{dy} = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+y^2x^2)}$, si provi che $I = \frac{\pi}{2}\log(1+y)$. (Questo integrale è lo stesso dell'esempio I. a pag. 241).

5. $$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xy} \operatorname{sen} ax\,dx\,dy = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } a > 0 \\ 0 & \text{» } a = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{» } a < 0. \end{cases}$$

6. Dalla formola $\int_0^1 x^{y-1}\,dx = \frac{1}{y}$, $y > 0$, si ricavino, dimostrandole rigorosamente, le formole

$$\int_0^1 x^{y-1} (\log x)^n\,dx = (-1)^n \frac{1.2..n}{y^{n+1}}, \quad n \text{ int. pos.},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{\beta-1} - x^{\alpha-1}}{\log x}\,dx = \log\frac{\beta}{\alpha}, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0;$$ e da queste le altre

$$\int_0^\infty e^{-yx}\,x^n\,dx = \frac{1.2..n}{y^{n+1}}, \quad y > 0,\ n \text{ int. pos.},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\,dx = \log\frac{\beta}{\alpha}, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

7. Dalle formole

$$\text{(A)} \int_0^\infty e^{-ax} \operatorname{sen} bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}, \quad \int_0^\infty e^{-ax} \cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad a > 0,$$

si ricavi

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,x \operatorname{sen} bx\,dx = \frac{2ab}{(a^2+b^2)^2}, \quad \int_0^\infty e^{-ax}\,x \cos bx\,dx = \frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)}, \quad a > 0;$$

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos bx\,dx = \frac{1}{2}\log\frac{\beta^2+b^2}{\alpha^2+b^2}, \\ &\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \operatorname{sen} bx\,dx = \operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{b} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{b} \end{aligned}\right\} \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

Si provi che l'ultimo integrale è continuo rapporto ad α, β

anche per $\alpha = 0$, (o per $\beta = 0$), cosichè

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-\beta x}}{x} \operatorname{sen} bx\, dx = \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{b}.$$

Si provi che

$$\lim_{\beta=\infty} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\beta x}}{x} \operatorname{sen} bx\, dx = \int_0^\infty \left[\lim_{\beta=\infty} \frac{1 - e^{-\beta x}}{x} \operatorname{sen} bx\right] dx = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} bx}{x} dx,$$

e si ritrova così $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} bx}{x} dx = \pm \frac{\pi}{2}$, come già si vide in modo affatto differente a pag. 201 e seg.

8. Dalle (A) si ricavi ancora, se $a > 0$,

$$\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\operatorname{sen} \beta x - \operatorname{sen} \alpha x}{x} dx = \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{a} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha}{a},$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x} dx = \frac{1}{2} \log \frac{\beta^2 + a^2}{\alpha^2 + a^2}.$$

Si provi che, l'ultimo integrale essendo continuo rapporto ad a anche per $a = 0$, si ha $\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x} dx = \log \frac{\beta}{\alpha}$.

Si noti che $\frac{d}{d\alpha} \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x} dx = -\frac{1}{\alpha}$, mentre che non è lecito derivare sotto il segno integrale.

9. Se $I = \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} dx$, si trovi la relazione $\frac{dI}{da} = -2I$ ossia $\frac{dI}{I} = -2da$, da cui si ricavi $I = e^{-2a} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

10. $\int_0^x e^{-a^2x^2} \cos 2bx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{b^2}{a^2}}$ (Si derivi rapporto a b e si operi come nell' esercizio precedente).

11. Sia la funzione $f(x, y)$ che per x, y entrambi rdivesi da zero e

$$f(x, y) = \text{sen}\left(4 \text{ arc tg } \frac{y}{x}\right) - \frac{4xy}{x^2+y^2} \cos\left(4 \text{ arc tg } \frac{y}{x}\right)$$

e che è $f(x, y) = 0$, se una o tutte e due le variabili sono zero. Sia inoltre la funzione $\psi(x, y)$ che per x, y entrambe diverse da zero è $\psi(x, y) = x \text{ sen}\left(4 \text{ arc tg } \frac{y}{x}\right)$ e che è $\psi(x, y) = 0$ se una o tutte e due le variabili sono zero.

Si verifichi che, essendo allora $\psi_x'(x, y) = f(x, y)$ per tutti i valori di x, y, abbiamo

$$\int_0^x f(x, y) dx = \psi(x, y).$$

Per y diverso da zero vale la derivazione sotto il segno integrale rapporto ad y; si spieghi come avvenga che non vale per $y = 0$, avendosi

$$\frac{\partial \psi(x, 0)}{\partial y} = 4, \qquad \int_0^x f_y'(x, 0) dx = 0.$$

12. Si spieghi perchè $\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(y^2+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4}$, mentre che

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(y^2+x^2)^2} dy = -\frac{\pi}{4}.$$

Calcolo di alcuni integrali definiti.
Proprietà fondamentali degli integrali Euleriani.

97. Applichiamo al calcolo di alcuni integrali definiti tutti i mezzi che ci porgono le teorie sin quì svolte.

Riconoscendosi facilmente la integrabilità della funzione $\frac{\cos ax}{1+x^2}$ nell'intervallo $(0, \infty)$ ci proponiamo ora di calcolare

$$(1) \qquad I = I(a) = \int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\, dx.$$

Possiamo derivare $I(a)$ rapporto ad a, derivando sotto il segno integrale, per $a = r > 0$, ottenendo così,

$$(2) \qquad I'(r) = -\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} rx}{1+x^2}\, dx.$$

Invero, se si osserva che, integrando per parti, è

$$\int_0^b \frac{x \operatorname{sen} rx}{1+x^2}\, dx = -\frac{b \cos rb}{r(1+b^2)} + \frac{1}{r}\int_0^b \cos rx \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\, dx$$

da cui

$$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} rx}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{r}\int_0^\infty \cos rx \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\, dx,$$

od anche, osservando che $\frac{x \operatorname{sen} rx}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}\frac{\operatorname{sen} rx}{x}$, si riconosce la integrabilità di $\frac{x \operatorname{sen} rx}{1+x^2}$ nell'intervallo $(0, \infty)$. Inoltre, poichè

$$\int_\gamma^\infty \frac{x \operatorname{sen} rx}{1+x^2}\, dx = \frac{\gamma \cos r\gamma}{r(1+\gamma^2)} + \frac{1}{r}\int_\gamma^\infty \cos rx \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\, dx$$

e preso $0 < r_0 < r$ è quindi

$$\left| \int_\gamma^\infty \frac{x \operatorname{sen} rx}{1+x^2}\, dx \right| \leq \frac{1}{r_0} \frac{\gamma}{1+\gamma^2} + \frac{1}{r_0} \int_\gamma^\infty \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}\, dx,$$

si vede che, dato σ, si potrà prendere c tale che per $\gamma \geq c$ e qualunque sia l'r di un intorno (r_0, r_1) di r risulti $\left| \int_\gamma^\infty \frac{x \operatorname{sen} rx}{1+x^2}\, dx \right| < \sigma$.

Possiamo poi integrare rispetto ad a tra 0 e r i due membri della (1), integrando nel secondo membro sotto il segno integrale, ottenendo così

$$(3) \qquad \int_0^r \mathrm{I}(a) da = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} \int_0^r \cos ax\, da = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} \frac{\operatorname{sen} rx}{x},$$

giacchè la integrazione sotto il segno integrale è lecita, essendo $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\, dx$ equiconvergente nell'intervallo $(0, r)$ di a, come subito si riconosce dalla formola

$$\left| \int_\gamma^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\, dx \right| \leq \int_\gamma^\infty \frac{dx}{1+x^2}.$$

Dalla (3) sottraendo la (2) abbiamo

$$(4) \qquad \int_0^r \mathrm{I}(a) da - \mathrm{I}'(r) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} rx}{x}\, dx = \frac{\pi}{2},$$

che vale per r positivo. Moltiplicando questa eguaglianza per e^{-r}, e prendendo gli integrali indefiniti dei due membri rispetto ad r, ciò che può farsi, perchè $\mathrm{I}'(r)$ è funzione continua di r, come si può verificare, abbiamo

$$\int e^{-r} \left[\int_0^r \mathrm{I}(a)\, da \right] dr - \int \mathrm{I}'(r) e^{-r}\, dr - \frac{\pi}{2} \int e^{-r}\, dr = \mathrm{C}:$$

e quindi, giacchè integrando per parti è

$$\int e^{-r}\left[\int_0^r \mathrm{I}(a)\,da\right]dr = -e^{-r}\int_0^r \mathrm{I}(a)\,da + \int e^{-r}\,\mathrm{I}(r)dr\,,$$

$$\int \mathrm{I}'(r)e^{-r}\,dr = e^{-r}\,\mathrm{I}(r) + \int e^{-r}\,\mathrm{I}(r)dr\,,$$

si ha

$$e^{-r}\left[-\int_0^r \mathrm{I}(a)da - \mathrm{I}(r) + \frac{\pi}{2}\right] = \mathrm{C}.$$

Facendo convergere r a zero ed osservando che $\mathrm{I}(r)$ è continua per $r=0$ e che $\mathrm{I}(0)=\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$, si trova $\mathrm{C}=0$, e in conseguenza

$$(5)\qquad \int_0^r \mathrm{I}(a)da + \mathrm{I}(r) - \frac{\pi}{2} = 0\,,$$

da cui, in virtù della (4), $\mathrm{I}'(r)+\mathrm{I}(r)=0$, ossia

$$\frac{d\mathrm{I}(r)}{dr} = -\mathrm{I}(r),\ \frac{d\mathrm{I}(r)}{\mathrm{I}(r)} = -dr,\ d\log \mathrm{I}(r) = -dr\,,$$

dalla quale si vede che le funzioni $\log \mathrm{I}(r)$ e $-r$, per qualunque valore positivo di r, non possono differire che per una costante, che indicheremo con $\log \mathrm{C}$, così chè $\log \mathrm{I}(r) = -r + \log \mathrm{C}$, ossia $\log \frac{\mathrm{I}(r)}{\mathrm{C}} = -r$, $\mathrm{I}(r) = \mathrm{C}e^{-r}$.

Sostituito questo valore di I nella (5), essa ci dà

$$\mathrm{C}\int_0^r e^{-a}\,da + \mathrm{C}e^{-r} - \frac{\pi}{2} = 0 \text{ da cui } \mathrm{C} = \frac{\pi}{2}\,,$$

ed in conseguenza $\mathrm{I}(r) = \frac{\pi}{2}e^{-r}$, formola dimostrata così per r posi-

tivo, ma che vale anche, come si vede, per $r = 0$. Cosichè

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,e^{-a}.$$

Cambiando in questa formola a in ac e x in $\frac{x}{c}$, otteniamo, più generalmente,

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{c^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2c}\,e^{-ac}.$$

Osservando che col cambiare a in $-a$ non cambia il primo membro, possiamo scrivere

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{c^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2c}\,e^{-|a|c},$$

valevole qualunque sia a, oppure $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{c^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2c}\,e^{\mp ac}$, dove si prenda il segno $-$ se $a > 0$, il segno $+$ se $a < 0$.

Per a diverso da zero, si può derivare rapporto ad a sotto il segno integrale, cosichè

$$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} ax}{c^2+x^2}\,dx = \pm\frac{\pi}{2c}\,e^{\mp ac}, \left(\begin{array}{l}\text{segno superiore se } a>0\\ \text{segno inferiore se } a<0\end{array}\right).$$

Questa formola non vale, come si vede, per $a = 0$.

98. Se nella formola $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ cambiamo x in $x\sqrt{y}$ otteniamo

$$(1) \qquad \int_0^\infty e^{-x^2 y}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}}, \ (y > 0).$$

Sommando questa formola con quella che da essa ricaviamo cambiando x in $-x$, abbiamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 y}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{y}}, \quad (y > 0).$$

Se in questo integrale facciamo $y = 1$ e poi cambiamo x in $x \pm \alpha$, si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 \mp 2\alpha x}\, dx = e^{\alpha^2} \sqrt{\pi}\,,$$

dalla quale, cambiando x in $x\sqrt{a}$ e ponendo $2\alpha\sqrt{a} = b$, ricaviamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 \mp bx}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\, e^{\frac{b^2}{4a}}, \quad (a > 0).$$

Della formola (1), che ci ha ora fornito queste formole notevoli, ci serviremo ancora per ricavare il valore di $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} y}{\sqrt{y}}\, dy$, che ha valore determinato, perchè se in $\int_0^{\infty} \operatorname{sen}(z^2) dz$, che sappiamo avere valore determinato (N. 74, es. 3), poniamo $z^2 = y$ abbiamo

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sen}(z^2) dz = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} y}{\sqrt{y}}\, dy.$$

Ponendo per $\frac{1}{\sqrt{y}}$ il valore tratto dalla (1) abbiamo

$$(2) \qquad \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} y}{\sqrt{y}}\, dy = \int_0^{\varepsilon} \frac{\operatorname{sen} y}{\sqrt{y}}\, dy + \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} y}{\sqrt{y}}\, dy$$

$$= \int_0^{\varepsilon} \frac{\operatorname{sen} y}{\sqrt{y}}\, dy + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\varepsilon}^{\infty} \operatorname{sen} y\, dy \int_0^{\infty} e^{-x^2 y}\, dx.$$

Ora nel secondo integrale dell' ultimo membro possiamo invertire le integrazioni. Invero ha valore determinato l' integrale

$$\int_0^\infty dx \int_\varepsilon^\infty e^{-x^2 y} \operatorname{sen} y dy = \int_0^\infty dx \left[\frac{e^{-x^2 y}(-x^2 \operatorname{sen} y - \cos y)}{1 + x^4} \right]_\varepsilon^\infty$$

$$= \int_0^\infty dx \frac{e^{-x^2 \varepsilon}(x^2 \operatorname{sen} \varepsilon + \cos \varepsilon)}{1 + x^4}$$

(N. 232, vol. I), notando che, per $x = 0$, in luogo dell'integrale interno che allora non ha più significato, si intende sostituito un qualunque valore finito, il che non altera il valore dell' integrale rispetto alla x.

È equiconvergente nell'intervallo (ε, ∞) per y l'integrale $\int_0^\infty e^{-x^2 y} \operatorname{sen} y dx$, come ricavasi dalla formola

$$\left| \int_\gamma^\infty e^{-x^2 y} \operatorname{sen} y dy \right| \leq \int_\gamma^\infty e^{-x^2 \varepsilon} dx.$$

Inoltre, essendo

$$\int_0^\infty dx \int_\gamma^\infty e^{-x^2 y} \operatorname{sen} y dy = \int_0^\delta dx \int_\gamma^\infty e^{-x^2 y} \operatorname{sen} y dy + \int_\delta^\infty dx \int_\gamma^\infty e^{-x^2 y} \operatorname{sen} y dy,$$

potremo cominciare dal fissare δ in guisa che il primo integrale del secondo membro risulti minore numericamente di qualunque numero positivo prefissato, perchè

$$\left| \int_0^\delta dx \int_\gamma^\infty e^{-x^2 y} \operatorname{sen} y dy \right| = \left| \int_0^\delta dx \frac{e^{-x^2 \gamma}(x^2 \operatorname{sen} \gamma + \cos \gamma)}{1 + x^4} \right| < \int_0^\delta dx (1 + x^2);$$

cosichè, osservando che allora è

$$\left| \int_\delta^\infty dx \int_\gamma^\infty e^{-x^2 y} \operatorname{sen} y dy \right| < e^{-\delta^2 \gamma} \int_\delta^\infty dx \frac{1 + x^2}{1 + x^4},$$

si vede come, dato σ, esista un numero c tale che per $\gamma \geqq c$ risulti

$$\left| \int_0^x dx \int_\gamma^\infty e^{-x^2 y} \operatorname{sen} y \, dy \right| < \sigma.$$

Avremo dunque

$$\int_0^\infty dx \int_\varepsilon^\infty e^{-x^2 y} \operatorname{sen} y \, dy = \int_0^\infty \operatorname{sen} y \, dy \int_\varepsilon^\infty e^{-x^2 y} \, dx,$$

e la (2) ci dà

$$\left| \int_0^x \frac{\operatorname{sen} y}{\sqrt{y}} dy - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx \frac{e^{-x^2 \varepsilon}(x^2 \operatorname{sen} \varepsilon + \cos \varepsilon)}{1 + x^4} \right| = \left| \int_0^\varepsilon \frac{\operatorname{sen} y}{\sqrt{y}} dy \right| \leqq \int_0^\varepsilon \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{\varepsilon},$$

dalla quale

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{\sqrt{y}} dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \lim_{\varepsilon = 0} \int_0^\infty dx \frac{e^{-x^2 \varepsilon}(x^2 \operatorname{sen} \varepsilon + \cos \varepsilon)}{1 + x^4},$$

ossia, per essere

$$\lim_{\varepsilon = 0} \int_0^\infty dx \frac{e^{-x^2 \varepsilon}(x^2 \operatorname{sen} \varepsilon + \cos \varepsilon)}{1 + x^4} = \int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^4}$$

perchè l' integrale del primo membro è continuo, come si riconosce facilmente, anche per $\varepsilon = 0$, dove prende il valore $\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^4}$, poichè, come è agevole ricavare, $\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ (Vedi esercizio 12° a pag. 177, vol. I), abbiamo in ultimo

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{\sqrt{y}} dy = 2 \int_0^\infty \operatorname{sen}(\zeta^2) \, d\zeta = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

In modo analogo si trova

$$\int_0^\infty \frac{\cos y}{\sqrt{y}}\, dy = 2\int_0^\infty \cos(\zeta^2)\, d\zeta = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

99. La funzione $x^{z-1}\, e^{-x}$ è integrabile nell'intervallo $(0, \infty)$ se $\zeta > 0$, non integrabile se $\zeta \leq 0$ perchè, essendo sempre positiva, diviene allora infinita di ordine superiore o uguale al primo nel punto $x = 0$ L'integrale $\int_0^\infty x^{z-1}\, e^{-x}\, dx$ si chiama *integrale Euleriano di seconda specie* o anche *funzione gamma*, perchè è una funzione di ζ che si indica colla notazione $\Gamma(\zeta)$, cioè

$$\Gamma(\zeta) = \int_0^\infty x^{z-1}\, e^{-x}\, dx, \qquad \zeta > 0.$$

Da questa formola, cambiandovi la variabile di integrazione x successivamente in $x^{\frac{1}{z}}$, $\log \frac{1}{x}$, kx $(k > 0)$, si ottiene

$$\int_0^\infty e^{-x^{\frac{1}{z}}}\, dx = \zeta\Gamma(\zeta), \int_0^1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^{z-1} dx = \Gamma(\zeta), \int_0^\infty x^{z-1}\, e^{-kx}\, dx = \frac{\Gamma(\zeta)}{k^z}\ (k > 0).$$

Osservando che

$$d(e^{-x}\, x^z) = \zeta x^{z-1}\, e^{-x}\, dx - x^z\, e^{-x}\, dx,$$

e integrando tra 0 e ∞ i due membri di questa uguaglianza, abbiamo

$$0 = \zeta\Gamma(\zeta) - \Gamma(\zeta + 1), \qquad \Gamma(\zeta + 1) = \zeta\Gamma(\zeta).$$

Da questa formola fondamentale si ricava in particolare

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1,\ \Gamma(2) = 1 \,.\, \Gamma(1) = 1,\ \Gamma(3) = 2 \,.\, \Gamma(2) = 1 \,.\, 2, \ldots$$

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}\, e^{-x}\, dx = 1 \,.\, 2 \ldots (n-1) \ (n \text{ intero positivo}),$$

come già vedemmo al n. 96 es. 1). Ricaviamo ancora, se n è intero positivo,

$$\Gamma(\zeta + n) = (\zeta + n - 1)\,\Gamma(\zeta + n - 1),$$

e da questa, ponendovi successivamente $n - 1$, $n - 2, \ldots 2, 1$ in luogo di n e moltiplicando membro a membro tutte le formole ottenute, si ha

$$\Gamma(\zeta + n) = (\zeta + n - 1)\,(\zeta + n - 2)\ldots(\zeta + 1)\zeta\Gamma(\zeta),$$

dalla quale si scorge come, per avere i valori di $\Gamma(\zeta)$ per qualunque valore positivo di ζ, basterà aver calcolato i valori di $\Gamma(\zeta)$ per ζ compreso tra 0 e 1. Così è

$$\Gamma\left(5 + \frac{1}{3}\right) = \left(4 + \frac{1}{3}\right)\left(3 + \frac{1}{3}\right)\left(2 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\frac{1}{3}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Nella formola $\int_0^\infty x^{z-1}\,e^{-kx}\,dx = \frac{\Gamma(\zeta)}{k^z}$ poniamo $k = c + y$ dove si suppone $c > 0$, $y > 0$; allora è

$$\int_0^\infty e^{-(c+y)x}\,x^{z-1}\,dx = \frac{\Gamma(\zeta)}{(c+y)^z},$$

la quale, moltiplicata per $e^{-hy}\,y^{z_1-1}\,dy$ essendo $h > 0$, $\zeta_1 > 0$, ed integrata rispetto ad y tra 0 e ∞, ciò che è lecito fare come subito si vede, dà

$$\int_0^\infty e^{-hy}\,y^{z_1-1}\,dy\int_0^\infty e^{-(c+y)x}x^{z-1}\,dx = \Gamma(\zeta)\int_0^\infty \frac{e^{-hy}\,y^{z_1-1}}{(c+y)^z}\,dy.$$

È agevole riconoscere che si possono invertire le integrazioni nel primo membro, il quale, così facendo, diviene

$$\int_0^\infty e^{-cx}\,x^{z-1}\,dx\int_0^\infty e^{-(h+x)y}\,y^{z_1-1}\,dy = \Gamma(\zeta_1)\int_0^\infty \frac{e^{-cx}\,x^{z-1}}{(h+x)^z}\,dx,$$

cosichè avremo

$$\Gamma(z)\int_0^\infty \frac{e^{-hy}\,y^{z_1-1}}{(c+y)^z}\,dy = \Gamma(z_1)\int_0^\infty \frac{e^{-cx}\,x^{z-1}}{(h+x)^{z_1}}\,dx,$$

dove z, z_1, h, c sono positivi.

Se $z_1 > z$, si vede chè gli integrali dei due membri hanno valore determinato anche per $c=0$, e che sono continui nel punto $c=0$, di guisa che potremo passare al limite, per $c=0$, nella formola precedente e sostituire al limite degli integrali gli integrali del limite. Ciò facendo, dopo aver posto $h=1$, otteniamo

$$\Gamma(z)\Gamma(z_1-z)=\Gamma(z_1)\int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{(1+x)^{z_1}}\,dx,\ \int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{(1+x)^{z_1}}\,dx = \frac{\Gamma(z)\,\Gamma(z_1-z)}{\Gamma(z_1)},\ z_1 > z > 0,$$

dalla quale, posto $z=u$, $z_1 - z = v$, abbiamo

$$\int_0^\infty \frac{x^{u-1}}{(1+x)^{u+v}}\,dx = \frac{\Gamma(u)\,\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)},\ (u>0,\ v>0).$$

L' integrale del primo membro, che è un integrale a differenziale binomio se u e v sono razionali, chiamasi *integrale Euleriano di prima specie* e si indica con $B(u, v)$.

Posto $x = \frac{y}{1-y}$ abbiamo ancora

$$(1)\qquad B(u, v) = \int_0^1 y^{u-1}(1-y)^{v-1}\,dy.$$

La formola

$$(2)\qquad B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\,\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$$

ci fa vedere che $B(u, v) = B(v, u)$ il che potrebbe anche riconoscersi direttamente dalla (1) ponendo $y = 1 - z$.

Ponendo nella (2) $u + v = 1$ e quindi supponendo u, v entrambi frazioni proprie, si ha

$$\int_0^\infty \frac{x^{u-1}\,dx}{1+x} = \Gamma(u)\,\Gamma(1-u),$$

ossia [vedi n. 73, 2]

$$\Gamma(u)\Gamma(1-u)=\frac{\pi}{\operatorname{sen} u\pi}\,,\quad 0<u<1,$$

la qual formola riduce il calcolo delle funzioni gamma coll' argomento compreso tra $\frac{1}{2}$ e 1 al calcolo di $\Gamma(z)$ dove $0<z\leq\frac{1}{2}$.

In particolare, per $u=\frac{1}{2}$,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2=\pi\,,\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx=\sqrt{\pi}.$$

Posto $x=y^2$, abbiamo $\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, come vedemmo in altro modo al n 96.

Partendoci dalla formola

$$\Gamma(z)=k^z\int_0^\infty e^{-kx}\,x^{z-1}\,dx,\quad (k>0),$$

ed osservando che $e^x>1+x$, $e^{kx}>(1+x)^k$ e quindi $e^{-kx}<\frac{1}{(1+x)^k}$, si vede che

$$\Gamma(z)<k^z\int_0^\infty\frac{x^{z-1}\,dx}{(1+x)^k}=k^z\mathrm{B}(z\,,k-z)$$

dove si suppone $k>z$, altrimenti $\frac{x^{z-1}}{(1+x)^k}$ diventerebbe all'infinito infinitesima d' ordine inferiore al primo. Cambiando k in $k+z+1$ è

$$\Gamma(z)<(k+z+1)^z\,\mathrm{B}(z\,,k+1)=k^z\left(1+\frac{z+1}{k}\right)^z\mathrm{B}(z\,,k+1).$$

Inoltre, essendo

$$\int_0^\infty e^{-kx}\,x^{z-1}\,dx>\int_0^\infty e^{-kx}\,x^{z-1}\,dx,$$

e, poichè dalla formola $e^{-x} = 1 - x + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}\right) + \ldots$ si vede che per $0 < x < 1$ è $e^{-x} > 1 - x$, $e^{-kx} > (1-x)^k$, abbiamo

$$\int_0^\infty e^{-kx} x^{z-1}\, dx > \int_0^1 (1-x)^k x^{z-1}\, dx \text{ ossia } \Gamma(z) > k^z B(z, k+1).$$

Quindi

$$\Gamma(z) = k^z B(z, k+1) \left[1 - \theta + \theta\left(1 + \frac{z+1}{k}\right)^n\right], \quad 0 < \theta < 1,$$

dalla quale, al limite per k crescente indefinitamente,

$$\Gamma(z) = \lim_{k=\infty} k^z B(z, k+1).$$

Se assumiamo k intero positivo, è

$$B(z, k+1) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(k+1)}{\Gamma(z+k+1)} = \frac{1.2.3\ldots k}{(z+k)(z+k-1)\ldots(z+1)z}$$

e quindi

$$\Gamma(z) = \lim_{k=\infty} k^z \frac{1.2.3\ldots k}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+k)},$$

che potrebbe servire al calcolo approssimato di $\Gamma(z)$.

100. L'integrale

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}\, dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \int_0^1 x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}\, dx,$$

dove p, q, n sono numeri positivi qualunque, e che venne da Euler indicato col simbolo $\left(\frac{p}{q}\right)$, si riduce subito, ponendo $x^n = y$, alle funzioni gamma perchè abbiamo così:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{n}\int_0^1 y^{\frac{p}{n}-1}(1-y)^{\frac{q}{n}-1}\, dy = \frac{1}{n} B\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) = \frac{1}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)\Gamma\left(\frac{q}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{n}\right)},$$

da cui si vede che $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$.

In particolare, se $p+q=n$,

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{p}{n}}} = \frac{1}{n}\,\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{p}{n}\right) = \frac{1}{n}\,\frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{p}{n}\pi}, \quad n>p>0.$$

Se nell'integrale $\int_0^1 \frac{x^{p-1}\,dx}{(a+bx^n)^{p+q}}$, dove $a>0$, $b>0$. $p>0$, $q>0$, $p+q>\frac{p}{n}$, si pone $bx^n=ay$, abbiamo

$$\int_0^x \frac{x^{p-1}\,dx}{(a+bx^n)^{p+q}} = \frac{1}{nb^{\frac{p}{n}}\,a^{p+q-\frac{p}{n}}}\int_0^{\frac{x}{y}} \frac{y^{\frac{p}{n}-1}\,dy}{(1+y)^{p+q}}$$

$$= \frac{1}{nb^{\frac{p}{n}}\,a^{p+q-\frac{p}{n}}}\,\mathrm{B}\left(\frac{p}{n},\, p+q-\frac{p}{n}\right),$$

dalla quale, posto $x=\frac{1-y}{y}$ nell'integrale del primo membro, ricaviamo

$$\int_0^1 \frac{(1-y)^{p-1}\,y^{q+(n-1)p-1}}{[ay^n+b(1-y)^n]^{p+q}}\,dy = \frac{1}{nb^{\frac{p}{n}}\,a^{p+q-\frac{p}{n}}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)\Gamma\left(p+q-\frac{p}{n}\right)}{\Gamma(p+q)}.$$

In particolare, per $n=1$ e posto $a-b=c$,

$$\int_0^1 \frac{(1-y)^{p-1}\,y^{q-1}}{(b+cy)^{p+q}}\,dy = \frac{1}{b^p(b+c)^q}\,\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p>0,\ q>0.$$

Esercizi

1. $$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} ax\cos bx}{x}\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se} \quad a>b\geq 0 \\ 0 & \text{»} \quad 0\leq a<b \\ \frac{\pi}{4} & \text{»} \quad a=b>0. \end{cases}$$

2. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} ax}{x(c^2+x^2)}\,dx = \pm\frac{\pi}{2c^2}(1-e^{\mp ac}),\ \int_0^\infty \frac{\cos ax}{(c^2+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4c^2}\left(\frac{1}{c}\pm a\right)e^{\mp ac},$

$$\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen} ax}{(c^2+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi a}{4c}\,e^{\mp ac},\ \int_0^\infty \frac{x^2\cos ax}{(c^2+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{c}\mp a\right)e^{\mp ac},$$

$\int_0^\infty \frac{x^3\operatorname{sen} ax}{(c^2+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4}(\pm 2 - ac)e^{\mp ac}$, nelle quali formole si deve prendere il segno superiore se $a > 0$, l' inferiore se $a < 0$.

3. $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{a+bx^n} = \frac{1}{nb^{\frac{p}{n}}\,a^{1-\frac{p}{n}}}\,\frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{p}{n}\pi},\ n > p > 0,\ a > 0,\ b > 0$

Ad es: $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},\ \int_0^\infty \frac{x^2dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}},\ \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3}.$

4. $\int_0^1 \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\int_0^\infty \frac{x^p\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2p},\ p > 0.$

$\int_0^1 \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt{1-x^{2m}}}\cdot\int_0^1 \frac{x^p\,dx}{\sqrt{1-x^{2m}}} = \frac{\pi}{2mp},\ m > 0,\ p > 0.$ (Eulero).

5. $$\int_0^1 \frac{x^{mn+r}\,dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} =$$

$$\frac{(r+1)(r+1+n)(r+1+2n)\ldots[r+1+(m-1)n]}{r(r+n)(r+2n)\ldots(r+mn)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{n}\right)},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{mn}\,dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \frac{(1+n)(1+2n)\ldots[1+(m-1)n]}{n\,.\,2n\,.\,3n\,.\,\ldots\,mn}\,\frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}$$

$$\int_0^1 \frac{x^{mn-1}\,dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \frac{n\,.\,2n\,.\,3n\ldots(m-1)n}{(n-1)(2n-1)\ldots(mn-1)},$$

nelle quali m è intero positivo, $n>0$, $r>0$.

6. Si dimostrino le formole $\left(\frac{p+n}{q}\right) = \frac{p}{p+q}\left(\frac{p}{q}\right)$ cioè

$$\int_0^1 x^{p+n-1}(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}\,dx = \frac{p}{p+q}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}\,dx,$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right) = \left(\frac{q}{r}\right)\left(\frac{q+r}{p}\right) = \left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right),$$

$$\left(\frac{n-p}{r}\right)\left(\frac{n+r-p}{p}\right) = \left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{n-p}\right) = \frac{\pi}{nr\,\mathrm{sen}\,\frac{p}{n}\pi},\ n>p>0.\ n>q>0,\ r>0.$$

Se i numeri p, q, n sono interi positivi, la formola $\left(\frac{p+n}{q}\right) = \frac{p}{p+q}\left(\frac{p}{q}\right)$ permette di esprimere l'integrale $\left(\frac{p}{q}\right)$, relativo al numero n, mediante integrali $\left(\frac{p}{q}\right)$ nei quali p, q sono minori di n, cioè per mezzo di

$$\left(\frac{n}{1}\right) = 1,\ \left(\frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2},\ \left(\frac{n}{3}\right) = \frac{1}{3},\ldots\left(\frac{n}{n-1}\right) = \frac{1}{n-1},\ \left(\frac{n}{n}\right) = \frac{1}{n},$$

$$\left(\frac{n-1}{1}\right),\ \left(\frac{n-1}{2}\right),\ \left(\frac{n-1}{3}\right),\ldots\left(\frac{n-1}{n-1}\right),$$

. . . . . .

$$\left(\frac{2}{1}\right),\ \left(\frac{2}{2}\right),$$

$$\left(\ \ \right),$$

ch si possono esprimere tutti mediante alcuni di essi. Ad es.: per

$n = 4$, posto

$$\left(\frac{2}{1}\right) = A = \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)},$$ tutti gli integrali $\left(\frac{p}{q}\right)$,

relativi ad $n = 4$, si esprimono mediante A, avendosi

$$\left(\frac{4}{1}\right) = 1,\ \left(\frac{4}{2}\right) = \frac{1}{2},\ \left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3},\ \left(\frac{4}{4}\right) = \frac{1}{4},\ \left(\frac{3}{1}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

$$\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{4A},\ \left(\frac{3}{3}\right) = \frac{\pi}{4A\sqrt{2}},\ \left(\frac{2}{1}\right) = A,\ \left(\frac{2}{2}\right) = \frac{\pi}{4},$$

$$\left(\frac{1}{1}\right) = \sqrt{2}A.$$ (Eulero).

7. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{p-1} x \cos^{q-1} x\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)},\ p > 0,\ q > 0.$$

8. $$\int_0^{\sqrt[n]{m}} \left(1 - \frac{x^n}{m}\right)^m dx = \frac{\sqrt[n]{m}}{n}\,\frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(m+1+\frac{1}{n}\right)},\ m > 0,\ n > 0;$$

se m è intero positivo

$$\int_0^{\sqrt[n]{m}} \left(1 - \frac{x^n}{m}\right)^m dx = \sqrt[n]{m}\,\frac{n}{n+1}\,\frac{2n}{2n+1}\,\frac{3n}{3n+1}\cdots\frac{mn}{mn+1}$$ (Stirl.)

9. $$\int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right) dx = (b-a)\sqrt{\pi}.$$

(Si ponga $I_1 = \int_0^{\gamma} e^{-\frac{a^2}{x^2}} dx$, $I_2 = \int_0^{\gamma} e^{-\frac{b^2}{x^2}} dx$, e si calcoli il $\lim_{\gamma=\infty}(I_1 - I_2)$,

dopo avere convenientemente trasformato I_1 e I_2).

10. $$\int_0^\infty \log(1 - 2a\cos bx + a^2)\,\frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \pi \log(1 - ae^{-b}) & \text{se } |a| < 1 \\ \pi \log(a - e^{-b}) & \text{se } |a| > 1. \end{cases}$$

(Si sviluppi in serie il logaritmo (esercizio 13 a pag. 205).

11. $$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1-2a\cos bx+a^2)} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2(1-a^2)}\,\dfrac{1+ae^{-b}}{1-ae^{-b}} & \text{se } |a| < 1 \\ \dfrac{\pi}{2(a^2-1)}\,\dfrac{a+e^{-b}}{a-e^{-b}} & \text{se } |a| > 1; \end{cases}$$

$$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} bx\, dx}{(1+x^2)(1-2a\cos bx+a^2)} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2(e^b - a)} & \text{se } |a| < 1 \\ \dfrac{\pi}{2a(ae^b - 1)} & \text{se } |a| > 1. \end{cases}$$

12. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2nx \log\cos x\, dx = (-1)^{n-1}\,\frac{\pi}{4n}$, n intero positivo (si potrà usare la formola $\dfrac{\cos mx}{\cos x} = 2\cos(m-1)x - \dfrac{\cos(m-2)x}{\cos x}$ dopo avere trasformato convenientemente l' integrale).

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2nx \log \operatorname{sen} x\, dx = -\frac{\pi}{4n}$, n intero positivo.

13. $\displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}\log(a + \sqrt{1+a^2})$ (si derivi rapporto ad a etc.).

14. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-m-1}}{1+x^n}\,dx = \frac{\pi}{n \operatorname{sen}\frac{m\pi}{n}}$, $n > m > 0$.

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} - x^{n-m-1}}{1+x^n}\,\frac{dx}{\log x} = \log \operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n},\ n > m > 0.$$

Ad es. $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^3}\frac{dx}{\log x} = -\frac{1}{2}\log 3, \int_0^1 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+x^2}\frac{dx}{\log x} = \frac{1}{2}\log 3.$

15. $\int_0^\pi x \log \operatorname{sen} x\, dx = -\frac{\pi^2}{2}\log 2$

(Si cambi x in $\pi - y$ nell' integrale $\int_0^\pi x^2 \log \operatorname{sen} x\, dx$ etc.).

16. $\mathrm{I} = \int_0^\infty \frac{e^{-\beta x} - e^{-\alpha x} + (\beta-\alpha)xe^{-\alpha x}}{x^2}\, dx = \alpha - \beta + \beta \log \frac{\beta}{\alpha}, \quad \alpha > 0, \ \beta > 0$

(Si osservi che $\mathrm{I} = \lim_{\varepsilon=0}\left[\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-\beta x} - e^{-\alpha x}}{x^2}\, dx + \int_\varepsilon^\infty \frac{(\beta-\alpha)\, e^{-\alpha x}}{x}\, dx\right]$ etc.)

Rettificazione delle curve.

101. La teoria degli integrali definiti trova semplice e naturale applicazione pel calcolo degli archi di curva, e per quello delle aree delle curve piane.

Indicando con s l' arco della curva piana $y = y(x)$ le cui ascisse estreme sono x_0, x, $x_0 < x$, abbiamo (n. 19)

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx.$$

Se $x = x(y)$ è la equazione data della curva, o quella che si ricava da $y = y(x)$, e la funzione univalente $x(y)$ ammette derivata finita tale che $\sqrt{1 + x'(y)^2}$ sia integrabile nell'intervallo (y_0, y), $y_0 < y$, dove y_0, y indicano le ordinate degli estremi dell' arco s, avremo

parimenti

$$s = \int_{y_0}^{y} \sqrt{1 + x'(y)^2}\, dx.$$

Se le coordinate dei punti della curva sono date dalle formole

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

dove le φ, ψ sono funzioni univalenti e che ammettono derivate finite e tali che $\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}$ sia integrabile nell'intervallo t_0, t, $(t_0 < t)$, si vedrebbe facilmente che

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt,$$

essendo s l'arco di curva i cui punti si ottengono facendo variare la variabile t da t_0 a t.

E poichè l'elemento ds di curva in coordinate polari ρ, θ è $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$, si vede che l'arco s compreso tra due punti di coordinate (ρ_0, θ_0), (ρ, θ) è

$$s = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2}, \quad \text{oppure } s = \int_{\rho_0}^{\rho} d\rho \sqrt{1 + \rho^2 \left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2},$$

oppure, se si suppongono le coordinate ρ, θ espresse per un parametro t,

$$s = \int_{t_0}^{t} dt \sqrt{\rho'(t)^2 + \rho(t)^2\, \theta'(t)}.$$

Esempi

1) Si voglia determinare la lunghezza dell'arco s compreso tra il punto in cui la curva $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (*astroide*) incontra l'asse positivo delle y e il punto di coordinate (x, y), essendo x, y positivi. Dalla equazione della curva ricaviamo $y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$,

$y' = -\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{3}}$, $1 + y'^2 = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$, e quindi, osservando che la funzione $\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$ quantunque infinita nel punto *zero* è integrabile nell'intervallo $(0, x)$. si ha

$$s = a^{\frac{1}{3}} \int_0^x \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{2} a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}}.$$

Facendo $x = a$ si ottiene tutto l'arco compreso tra i punti in cui la curva incontra le parti positive degli assi, che è $\frac{3}{2} a$; la lunghezza di tutta la curva, che è simmetrica rispetto agli assi, è perciò uguale a $6a$.

2) *Parabola* — La lunghezza d'arco s di parabola $y^2 = 2px$ compreso tra il vertice e un punto di coordinate (x, y) è

$$s = \frac{1}{p} \int_0^y \sqrt{y^2 + p^2}\, dy = \frac{y\sqrt{y^2 + p^2}}{2p} + \frac{p}{2} \log \frac{y + \sqrt{y^2 + p^2}}{p}.$$

3) *Ellise.* Per la ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(a > b)$, abbiamo

$ds = dx \sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}}$, ossia, osservando che dall'equazione della curva si ricava $a^4 y^2 = a^2 b^2 (a^2 - x^2)$ e posto $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, è $ds = dx \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}}$; l'arco s compreso tra i punti $(0, b)$, (x, y) è perciò

$$s = \int_0^x dx \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}}.$$

L'integrazione non si può effettuare in termini finiti, e l'integrale del secondo membro è un integrale ellittico di 2ª specie (Vedi n. 221 vol. I); gli integrali ellittici furono appunto così chiamati perchè uno di essi serve alla rettificazione dell'arco di ellisse.

Posto $x = a \operatorname{sen} \varphi$ abbiamo

$$s = \int_0^\varphi d\varphi \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}.$$

Studiando la rettificazione delle curve, si giunse a trovare delle relazioni semplici tra archi di curva, che presi isolatamenre non sono rettificabili in termini finiti. Le prime ricerche di questo genere sono dovute a *Fagnano* (n. a Sinigaglia nel 1682, m. nel 1766) e sono molto importanti per loro stesse e perchè furono il punto di partenza di ulteriori studi dovuti ad *Eulero*. Egli osserva che dalla relazione

$$hfx^2\zeta^2 + fl(x^2+\zeta^2) + gl = 0$$

da cui

$$\zeta = \sqrt{\frac{-l(g+fx^2)}{f(l+hx^2)}}, \qquad x = \sqrt{\frac{-l(g+f\zeta^2)}{f(l+h\zeta^2)}},$$

si ricava, differenziando e dividendo per $2f\zeta x$,

$$h(\zeta dx + x d\zeta) + l\left(\frac{dx}{\zeta} + \frac{d\zeta}{x}\right) = 0$$

ossia

$$-\frac{h}{l}\, d(x\zeta) = dx\sqrt{-\frac{f}{l}}\sqrt{\frac{l+hx^2}{g+fx^2}} + d\zeta\sqrt{-\frac{f}{l}}\sqrt{\frac{l+h\zeta^2}{g+f\zeta^2}},$$

da cui

$$\int dx\sqrt{\frac{l+hx^2}{g+fx^2}} + \int d\zeta\sqrt{\frac{l+h\zeta^2}{g+f\zeta^2}} = -\frac{h}{\sqrt{-fl}}\, x\zeta + C_1,$$

che possiamo anche scrivere così:

$$\int_0^x dx\sqrt{\frac{l+hx^2}{g+fx^2}} + \int_0^z d\zeta\sqrt{\frac{l+h\zeta^2}{g+f\zeta^2}} = -\frac{h}{\sqrt{-fl}}\, x\zeta + C;$$

ponendo $x=0$, ed osservando che allora è $\zeta = \sqrt{-\frac{g}{f}}$, si trova

$$C = \int_0^{\sqrt{-\frac{g}{f}}} d\zeta\sqrt{\frac{l+h\zeta^2}{g+f\zeta^2}} \text{ e quindi}$$

$$\int_0^x dx\sqrt{\frac{l+hx^2}{g+fx^2}} + \int_{\sqrt{-\frac{g}{f}}}^z d\zeta\sqrt{\frac{l+h\zeta^2}{g+f\zeta^2}} = -\frac{h}{\sqrt{-fl}}\, x\zeta.$$

Ponendo ora $g = l = a^2$, $h = -e^2$, $f = -1$, abbiamo

$$\int_0^x dx \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}} + \int_a^z d\zeta \sqrt{\frac{a^2 - e^2 \zeta^2}{a^2 - \zeta^2}} = \frac{e^2}{a} x\zeta,$$

dove $\zeta = a \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 - e^2 x^2}}$.

Indicando con M il punto della ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, situato sul quadrante determinato dalle parti positive degli assi, la cui ascissa è x, con N il punto dello stesso quadrante la cui ascissa è ζ, con A, B i punti in cui le parti positive degli assi delle y e delle x incontrano l'ellisse, la formola precedente ci dice che

$$\text{arco AM} - \text{arco NB} = \frac{e^2}{a} x\zeta = e^2 x \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 - e^2 x^2}}.$$

4) *Cicloide*. Dalle equazioni $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ricaviamo $dx^2 + dy^2 = 2a^2(1 - \cos t)dt^2$ e quindi, indicando con s l'arco di cicloide tra il punto $t = 0$, ove essa incontra la base, e il punto $t = t$, è

$$s = a\sqrt{2} \int_0^t dt \sqrt{1 - \cos t} = 2a \int_0^t \operatorname{sen} \frac{t}{2} dt = 4a \left(1 - \cos \frac{t}{2}\right).$$

Per $t = 2\pi$ questa formola ci dà la lunghezza di un intero ramo di cicloide, che è uguale a $8a$, cioè otto volte il raggio del circolo generatore.

5) *Lemniscata*. Dalla equazione della lemniscata in coordinate polari

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\theta$$

ricaviamo

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 = 2a^2 \frac{d\theta^2}{\cos 2\theta}, \quad s = a\sqrt{2} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}},$$

essendo s l'arco di curva compreso tra i punti A, M di coordinate $(a\sqrt{2}, 0)$, (ρ, θ), che chiameremo *arco* AM.

Il quarto del perimetro della intera curva è quindi

$a\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$, ossia, posto $2\theta = x$. $\frac{a\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}}$ od anche (Vedi Es. 7 a pag. 268)

$$\frac{a\sqrt{2}}{4}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{a\sqrt{2}}{4}\,\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{4}\,\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\pi}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{a}{4}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\sqrt{\pi}},$$

e l'intero perimetro è $a\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\sqrt{\pi}}$; cosichè il perimetro della lemniscata può servire a rappresentare la trascendente numerica $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$.

Fagnano ha fatto relativamente alla lemniscata delle ricerche analoghe a quelle per la ellisse, giungendo ad importantissimi risultati, tra i quali il seguente.

Posto

(2) $$\cos 2\theta = \frac{1-\cos 2\varphi}{1+\cos 2\varphi} \quad \text{da cui} \quad \cos 2\varphi = \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$$

si ha

$$a\sqrt{2}\int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} = a\sqrt{2}\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}};$$

ma i secondo membro esprime l'arco di lemniscata compreso tra il centro O della curva, che corrisponde a $\theta = \frac{\pi}{4}$, e il punto M_1 il cui

angolo polare è $\varphi = \text{arc}\cos \frac{1}{2} \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$, arco che chiameremo *arco* 0M.

Quindi *arco* $0M_1 =$ *arco* AM quando tra gli angoli polari θ, φ dei punti M, M_1 passa la relazione (2) cioè la relazione $\cos 2\theta = \text{tg}^2\varphi$ ossia $\cos\theta \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Se poniamo $\theta = \varphi = \theta_1$ abbiamo $\cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ e perciò il punto N che corrisponde all'angolo polare $\theta_1 = \text{arc}\cos\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ divide per metà il quadrante 0MA di lemniscata, e tale punto N può costruirsi colla riga e col compasso.

102. Sia la curva gobba le cui equazioni sono

$$f(x, y, z) = 0, \qquad \varphi(x, y, z) = 0,$$

oppure le coordinate dei punti della quale sono

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t);$$

indicato con s la lunghezza dell'arco di questa curva, le cui estremità hanno per coordinate (x_0, y_0, z_0), (x, y, z), o che corrispondono ai valori t_0 e t del parametro t, abbiamo (n. 32)

$$s = \int_{x_0}^{x} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \int_{y_0}^{y} dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

$$= \int_{z_0}^{z} dz \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2},$$

oppure

$$s = \int_{t_0}^{t} dt \sqrt{\overline{x'(t)}^2 + \overline{y'(t)}^2 + \overline{z'(t)}^2}.$$

Se si usassero le coordinate polari ρ. θ, φ, ricordando

$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta \, d\varphi^2$, si avrebbe

$$s = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta \left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2} = \ldots$$

dove $(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$, (ρ, θ, φ) indicano le coordinate degli estremi dell'arco s.

Esempi

1) L'arco s di curva, le cui equazioni sono $y = \frac{x^2}{2a}$, $z = \frac{x^3}{6a^2}$, contato a partire dall'origine delle coordinate, e che termina al punto (x, y, z), è

$$s = \int_0^x dx \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{4a^4}} = \int_0^x dx \left(1 + \frac{x^2}{2a^2}\right) = x + \frac{x^3}{6a^2} = x + z.$$

2) Si voglia l'arco s compreso tra l'origine delle coordinate e il punto (x, y, z) della curva intersezione del cilindro parabolico $(y + z)^2 = 4ax$ col cono ellittico $\frac{4}{3}x^2 + y^2 = z^2$. Osservando che l'ultima equazione può scriversi $(z - y)(z + y) = \frac{4}{3}x^2$, ricaviamo dalle equazioni della curva:

$$z = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{x^3}{a}} + \sqrt{ax}, \qquad y = \sqrt{ax} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{x^3}{a}}$$

e da queste $1 + y'^2 + z'^2 = \frac{(a + x)^2}{2ax}$, cosichè

$$s = \frac{1}{\sqrt{2a}} \int_0^x \frac{(a + x)\, dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \left(2a\sqrt{x} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right) = z\sqrt{2}.$$

3) *Elica conica.* — Le coordinate dei punti della curva siano

(1) $$x = ct \operatorname{tg}\gamma \cos t, \; y = ct \operatorname{tg}\gamma \operatorname{sen} t, \; z = ct.$$

L'arco s compreso tra l'origine delle coordinate $(t=0)$, e il punto $t=t$ è

$$s=\frac{c}{\cos\gamma}\int_0^t dt\sqrt{1+t^2\operatorname{sen}^2\gamma}$$

$$=\frac{c}{2\cos\gamma}\left[t\sqrt{1+t^2\operatorname{sen}^2\gamma}+\frac{1}{\operatorname{sen}\gamma}\log\left(t\operatorname{sen}\gamma+\sqrt{1+t^2\operatorname{sen}^2\gamma}\right)\right]$$

che, espresso per z e posto $\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}=k$, diviene

$$s=\frac{1}{2\cos\gamma}\left[\frac{z\sqrt{k^2+z^2}}{k}+k\log\frac{z+\sqrt{k^2+z^2}}{k}\right].$$

La nostra curva è, come si vede eliminando t dalle (1), l'intersezione del cono $x^2+y^2=z^2\operatorname{tg}^2\gamma$ coll'elicoide gobbo a piano direttore $\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\frac{z}{c}$ e chiamasi elica conica.

4) *Lossodromica.* — È la curva situata sulla sfera

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

e sul cilindro

$$\sqrt{x^2+y^2}\left(e^{k\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}+e^{-k\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}\right)=2a$$

[essa fa un angolo costante $\alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{k}$ coi circoli massimi della sfera, che passano pei punti $(0,0,a)$ $(0,0,-a)$].

Usando le coordinate polari

$$x=\rho\operatorname{sen}\theta\cos\varphi,\ y=\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi,\ z=\rho\cos\theta,$$

le sue equazioni divengono

$$\rho^2=a^2,\qquad \operatorname{sen}\theta(e^{k\varphi}+e^{-k\varphi})=2,$$

e quindi $d\rho=0$, $ds^2=a^2d\theta^2\left[1+\operatorname{sen}^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2\right]$. Ma

$$\frac{d\varphi}{d\theta}=-\frac{\cos\theta(e^{k\varphi}+e^{-k\varphi})}{k\operatorname{sen}\theta\,(e^{k\varphi}-e^{-k\varphi})},$$

ossia, osservando che

$$\cos^2\theta = 1 - \frac{4}{(e^{k\varphi}+e^{-k\varphi})^2} = \frac{(e^{k\varphi}-e^{-k\varphi})^2}{(e^{k\varphi}+e^{-k\varphi})^2}, \text{ è } \frac{d\varphi}{d\theta} = -\frac{1}{k \operatorname{sen}\theta}.$$

Quindi abbiamo

$$s = a\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = a\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\,(\theta-\theta_0),$$

e, posto $k = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, è $s = \frac{a(\theta-\theta_0)}{\cos\alpha}$.

Quadratura delle curve piane.

103. Consideriamo una curva rappresentata in coordinate cartesiane ortogonali dalla equazione $y = f(x)$. dove $f(x)$ è funzione univalente continua. Sia $y \geqq 0$ pei valori di un certo intervallo cui appartengano i punti x_0, x, $x_0 < x$. Dividiamo comunque l'intervallo (x_0, x) in parti h_s e consideriamo la somma $\Sigma h_s y_s$, dove y_s indica il valore dell'ordinata corrispondente ad un punto qualunque dell'intervallo h_s; cioè consideriamo la somma delle aree dei rettangoli che hanno h_s per base e per altezza y_s. Il limite della somma di queste aree quando le h_s impiccoliscono indefinitamente, definiamo come l'area A compresa tra la curva, l'asse delle x e le ordinate corrispondenti alle ascisse x_0, x, ed abbiamo così

$$A = \int_{x_0}^{x} f(x)dx.$$

Se la y fosse sempre negativa, basterebbe nella definizione precedente prendere per y_s il valore assoluto dell'ordinata, cosichè A risulterebbe uguale al valore assoluto del precedente integrale.

Si intende senz'altro come si definisca in modo analogo l'area compresa tra la curva data, l'asse delle y e due ascisse corrispondenti a due ordinate y_0, y.

Calcolare l'area A dicesi anche *quadrare* la curva corrispondente, e ciò si ottiene mediante una integrazione. Perciò quando un problema è ridotto al calcolo di integrali suole dirsi che è ridotto alle *quadrature.*

L'area della parte del piano compresa tra due curve $y = f(x$, $y_1 = f_1(x)$ e le due rette $x = x_0$, $x = x$, se $y \geqq y_1 \geqq 0$ nell'intervallo (x_0, x), si definisce come la differenza tra l'area A della prima e l'area A_1 della seconda curva, cioè è $\int_{x_0}^{x} [f(x) - f_1(x)]\, dx$. Se fosse $y \geqq 0$. $y_1 \leqq 0$ nell'intervallo (x_0, x), tale area sarebbe la somma delle due aree $\int_{x_0}^{x} \{ f(x) + |f_1(x)| \}\, dx$, cioè ancora $\int_{x_0}^{x} [f(x) - f_1(x)]\, dx$. Si procede in modo analogo negli altri casi.

La parte del piano limitata da curve o porzioni di curve qualunque definite analiticamente può decomporsi in parti comprese ciascuna tra due curve $y = f(x)$, $y_1 = f_1(x)$, dove le $f(x)$, $f_1(x)$ sono univalenti, e le due ordinate corrispondenti a certe ascisse x_0, x_1; chiamiamo area limitata dalle curve, o porzioni delle curve date, la somma delle aree di queste parti.

104. Sia la curva $\rho = f(\theta)$ in cordinate polari ρ, θ e sia $f(\theta)$ funzione univalente continua in un certo intervallo di ampiezza minore o uguale a 2π per θ, cui appartengono i valori θ_0, θ.

Diviso l'intervallo (θ_0, θ) in parti h_s, consideriamo la somma $\frac{1}{2} \Sigma h_s \rho_s^2$, essendo ρ_s il valore di $f(\theta)$ corrispondente ad un qualunque valore di θ dell'intervallo h_s; $\frac{1}{2} h_s \rho_s^2$ è l'area del settore del circolo di raggio ρ_s il cui angolo al centro è misurato da h_s. Il limite della somma $\frac{1}{2} \Sigma h_s \rho_s^2$, quando le h_s impiccoliscono indefinitamente, definiamo come l'area del settore compreso tra la nostra curva e i due raggi vettori corrispondenti ai valori θ_0, θ dell'angolo polare. Tale area è quindi

$$\frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta} \overline{f(\theta)}^2\, d\theta.$$

105. Della quadratura delle curve diamo ora alcuni

ESEMPI

1) *Ellisse.* — L'area A, compresa tra l'asse delle y, la ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. e la ordinata y corrispondente all'ascissa x, è

$$A=\frac{b}{a}\int_0^x dx\sqrt{a^2-x^2}=\frac{b}{2a}\left[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2 \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}\right];$$

l'area di un quarto dell'ellisse si ottiene da questa formola ponendovi $x=a$, ed è quindi $\frac{ab}{4}\pi$, e perciò l'area racchiusa da tutta la curva è πab. Se $a=b$ abbiamo gli stessi elementi relativi al circolo di raggio a, $x^2+y^2=a^2$.

2) *Iperbole.* — L'area A compresa tra l'asse delle x, la iperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ e la ordinata y corrispondente all'ascissa x, è

$$A=\frac{b}{a}\int_a^x dx\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{2a}\left[x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right].$$

3) *Parabola.* — L'area A compresa tra l'asse delle y, la parabola $y^2=2px$ e la ascissa corrispondente all'ordinata y è

$$A=\frac{1}{2p}\int_0^y y^2dy=\frac{y^3}{6p}=\frac{xy}{3},$$

cioè è uguale al terzo del rettangolo costruito colle coordinate del punto che si considera sulla parabola.

4) *Cicloide.* Le sue coordinate sono $x=a(t-\operatorname{sen} t)$, $y=a(1-\operatorname{sen} t)$, quindi l'area A compresa tra l'asse delle x, base della cicloide, la curva e la ordinata y, corrispondente a $t=t$, è

$$A=\int_0^x ydx=a^2\int_0^t(1-\cos t)^2\,dt=a^2\left[\frac{3}{2}t-2\operatorname{sen} t+\frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right].$$

Facendo $t = 2\pi$ si ottiene l'area compresa fra tutto un ramo di cicloide e la base, cioè $3\pi a^2$; ossia è tre volte l'area del circolo generatore della cicloide, come per primo trovò GALILEO.

5) Sia la curva $x = t + t^2$, $y = t^2 + t^3$, (vedi esem. 6 a pag. 22). Ricordando le proprietà della curva stessa, si vede che l'area A del cappio della curva è

$$A = \int_{-\frac{1}{2}}^{-1} (t^2 + t^3)(1 + 2t)dt - \int_{-\frac{1}{2}}^{0} (t^2 + t^3)(1 + 2t)dt$$

$$= \int_{0}^{-1} (t^2 + t^3)\ (1 + 2t)dt = \frac{1}{60}.$$

6) *Lemniscata.* — L'area A del settore di lemniscata $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ compreso tra l'asse polare, la curva ed il punto di coordinate (ρ, θ) è $A = a^2 \int_0^\theta \cos 2\theta\, d\theta = \frac{a^2}{2} \operatorname{sen} 2\theta$; facendo $\theta = \frac{\pi}{4}$ abbiamo l'area della metà di una delle ovali di cui si compone la curva, cioè $\frac{a^2}{2}$, e l'area dell'intera ovale è a^2, ossia è il quadrato formato sopra la semidistanza dei due fuochi della curva.

7) *Folium di Descartes.* — Si voglia determinare l'area del cappio della curva

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

(vedi esempio 3 pag. 34, ed eserc. 7 pag. 43).

Passando dalle coordinate cartesiane alle polari nel solito modo, la equazione della curva diviene

$$\rho = \frac{3a \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{\operatorname{sen}^3 \theta + \cos^3 \theta},$$

e quindi

$$A = \frac{9a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta}{(\operatorname{sen}^3 \theta + \cos^3 \theta)^2}\, d\theta = \frac{3a^2}{2}$$

(vedi eserc. 4 a pag. 519 vol. I).

Questa curva ha l'assintoto $x+y+a=0$, ossia, in coordinate polari, $\rho=\frac{-a}{\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}$. L'area A_1, compresa tra i due raggi vettori corrispondenti a $\theta=\theta_0$, $\theta=\theta_1$, il relativo ramo di curva e l'assintoto, si ottiene sottraendo l'area compresa tra i due raggi vettori ed il ramo di curva dall'area compresa tra i due raggi vettori e l'assintoto, cioè

$$A_1=\frac{a^2}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\frac{d\theta}{(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)^2}-\frac{9a^2}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta}{(\operatorname{sen}^3\theta+\cos^3\theta)^2}\,d\theta,$$

ossia, poichè

$$\int\frac{d\theta}{(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)^2}=\int\frac{\frac{d\theta}{\cos^2\theta}}{(1+\operatorname{tg}\theta)^2}=-\frac{1}{1+\operatorname{tg}\theta},$$

è $$A_1=\frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{1+\operatorname{tg}\theta_0}-\frac{1}{1+\operatorname{tg}\theta_1}-\frac{3}{1+\operatorname{tg}^3\theta_0}+\frac{3}{1+\operatorname{tg}^3\theta_1}\right]$$

od anche, osservando che

$$1+\operatorname{tg}^3\theta=(1+\operatorname{tg}\theta)(1-\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}^2\theta),$$

$$A_1=\frac{a^2}{2}\left[\frac{2-\operatorname{tg}\theta_1}{1-\operatorname{tg}\theta_1+\operatorname{tg}^2\theta_1}-\frac{2-\operatorname{tg}\theta_0}{1-\operatorname{tg}\theta_0+\operatorname{tg}^2\theta_0}\right].$$

L'area della parte indefinita di piano compresa tra la parte negativa dell'asse delle x, l'assintoto e la curva, si ottiene da questa espressione facendovi $\theta_0=3\frac{\pi}{4}$, $\theta_1=\pi$, cioè è $\frac{a^2}{2}$, e l'area della parte indefinita di piano compresa tra la parte negativa dell'asse delle y l'assintoto e la curva si ottiene facendo $\theta_0=3\frac{\pi}{2}$, $\theta_1=7\frac{\pi}{4}$, cioè è ancora $\frac{a^2}{2}$, come potevasi asserire senz'altro per la forma della curva. L'area del triangolo compreso tra gli assi e l'assintoto essendo ancora $\frac{a^2}{2}$, si vede che l'area compresa tra la curva e l'assintoto è $\frac{3a^2}{2}$, cioè è uguale all'area del cappio.

Esercizi

1. *Cissoide* — $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$ (es. 13 pag. 45 ed es. 3 pag. 67). Abbiamo [1])

$$s(0\,,x) = 2a\sqrt{\frac{3x-8a}{x-2a}} - 4a + a\sqrt{3}\log\frac{3x-7a+\sqrt{3}\sqrt{(x-2a)(3x-8a)}}{(4\sqrt{3}-7)a}$$

$$= 2a\sqrt{\frac{3x-8a}{x-2a}} - 4a + 2a\sqrt{3}\log\frac{\sqrt{8a-3x}-\sqrt{6a-3x}}{\sqrt{8a}-\sqrt{6a}}\,;$$

$$A(0\,,x) = \frac{1}{2}(3a-x)\sqrt{x(2a-x)} + \frac{3a^2}{2}\left(\text{arc sen}\,\frac{x-a}{a} + \frac{\pi}{2}\right).$$

L'area tra la curva a l'assintoto è $3\pi a^2$.

2. *Trattrice.* $x = \dfrac{h}{2}\log\dfrac{h+\sqrt{h^2-y^2}}{h-\sqrt{h^2-y^2}} - \sqrt{h^2-y^2}$.

(es. 8 pag. 68).

$$s(y\,,h) = h\log\frac{h}{y}\,;\quad A(h\,,x) = \frac{h^2\pi}{4} - \frac{1}{2}y\sqrt{h^2-y^2} - \frac{h^2}{2}\,\text{arc sen}\,\frac{y}{h}.$$

Area tra curva e asse delle x è $\dfrac{h^2\pi}{2}$. (Si osservi che $y\,dx = -\sqrt{h^2-y^2}\,dy$).

3. *Versiera* (es. 13 pag. 45), $xy^2 - a^2(a-x) = 0$.

$$A(x\,,a) = a^2\,\text{arc tg}\sqrt{\frac{a-x}{x}} - a\sqrt{x(a-x)}\,;$$

area tra curva ed asse delle y è πa^2.

---

[1]) Indichiamo con $s(a\,,b)$ l'arco di curva compreso tra i punti le cui coordinate dello stesso nome sono a e b; con $A(a\,,b)$ l'area compresa tra la curva, l'asse della x (o delle y) e le ordinate (o ascisse) corrispondenti alle ascisse (o ordinate) $a\,,b$: con sett$(a\,,b)$ il settore compreso tra la curva e i due raggi vettori corrispondenti ai due angoli polari $a\,,b$ o tra i raggi vettori di lunghezza $a\,,b$.

4. *Lumaca di Pascal* (es. 1 pag. 31) $\rho = b\cos\theta + a$.

Se $b < a$ l'area racchiusa dalla intera curva è uguale a $\frac{\pi}{2}(2a^2+b^2)$, se $b = a$ (*cardioide*) è $\frac{3\pi a^2}{2}$. Se $b > a$ l'area racchiusa dalla parte esterna della curva è uguale a $\frac{1}{2}(2a^2+b^2)\alpha + \frac{3a}{2}\sqrt{b^2-a^2}$, dove $\alpha = \arccos\left(-\frac{a}{b}\right)$, e l'area del cappio è

$$\frac{1}{2}(2a^2+b^2)(\pi-\alpha) - \frac{3a}{2}\sqrt{b^2-a^2}.$$

5. Curva $x^4+y^4-ax^2y=0$. È tutta al disopra dell'asse delle x e si compone di due cappi od ovali simmetricamente situati rispetto all'asse delle y. L'area di una delle ovali è uguale a $\frac{\pi a^2}{16\sqrt{2}}$. (Giova usare coord. polari).

6. Curva $x^4+y^4-a^2xy=0$. Area di una delle ovali è $\frac{\pi a^2}{8}$.

7. *Strofoide.* $y^2 = \frac{x^2(a+x)}{a-x}$. Area cappio è $2a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$. L'area tra la curva e l'assintoto è $2a^2\left(1+\frac{\pi}{4}\right)$, e quindi area totale $4a^2$.

8. L'area compresa tra le curve $y^2=2px$, $x^2=2py$ è uguale a $\frac{4}{3}p^2$.

9. Curva $y = \pm\left(\frac{a}{2}+x\right)\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$. Area cappio $= \frac{3\sqrt{3}}{8}a^2$, area tra curva ed assintoto $= \frac{3\sqrt{3}}{8}a^2$.

10. Curva $y^2 = x^2(1-x^2)$ (pag. 25). $A(0,x) = \frac{1}{3}\left(1-\frac{y^3}{x^3}\right)$. Area racchiusa da tutta la curva $= \frac{4}{3}$.

.. Curva: $x=t^2$, $y=t-\frac{1}{3}t^3$. La curva ha un cappio, le coordate dei punti del cui contorno si ottengono facendo variare x da 0 3. Area del cappio $= \frac{8}{5}\sqrt{3}$. Perimetro del cappio $= 4\sqrt{3}$.

12. *Sviluppante di circolo.* $x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t), y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t)$. Passando alle coordinate polari si trova $\rho^2 = a^2(1 + t^2)$, $\theta = t - \operatorname{arc\,tg} t$.

$$\operatorname{Sett}(0, \theta) = \operatorname{Sett}(0, t) = \frac{a^2 t^3}{6}.$$

13. *Spirale d'Archimede* $\rho = a\theta$;

$$\operatorname{sett}(0, \rho) = \operatorname{sett}(0, \theta) = \frac{\rho^3}{6a},$$

$$s(0, \theta) = \frac{a}{2}\left[\theta\sqrt{1+\theta^2} + \log(\theta + \sqrt{1+\theta^2})\right].$$

Spirale iperbolica $\rho\theta = a$;

$$\operatorname{sett}(1, \theta) = \operatorname{sett}(a, \rho) = \frac{a(a-\rho)}{2},$$

$$\operatorname{sett}(1, \infty) = \operatorname{sett}(a, 0) = \frac{a^2}{2},$$

$$s(a, \rho) = a\sqrt{2} - \sqrt{a^2+\rho^2} + a \log \frac{a + \sqrt{a^2+\rho^2}}{\rho(1+\sqrt{2})}$$

$$= s(1, \theta) = a\left[\sqrt{2} - \frac{\sqrt{1+\theta^2}}{\theta} + \log \frac{\theta + \sqrt{1+\theta^2}}{1+\sqrt{2}}\right].$$

Spirale logaritmica $\rho = ae^{m\theta}$;

$$\operatorname{sett}(0, \theta) = \frac{a^2(e^{2m\theta} - 1)}{4m} = \operatorname{sett}(a, \rho) = \frac{\rho^2 - a^2}{4m},$$

$$s(0, \theta) = \frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}(e^{m\theta} - 1) = s(a, \rho) = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}(\rho - a),$$

$$s(0, -\infty) = \frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}.$$

Lituus $\rho^2\theta = a^2$;

$$\operatorname{sett}(1, \theta) = \operatorname{sett}(a, \rho) = \frac{a^2}{2}\log\theta = a^2 \log\frac{a}{\rho}.$$

Spirale parabolica $\rho^2 = a^2\theta$;

$$\text{sett}\,(0\,,\theta) = \text{sett}\,(0\,,\rho) = \frac{a^2\theta^2}{4} = \frac{\rho^4}{4a^2}\,.$$

14. Curva $x^4 = (x^2 - y^2)y$. Area di un cappio $= \frac{4}{105}$. (Si ponga $y = tx$, da cui $x = t - t^3$, $y = t^2 - t^4$; vedi es: 15 a pag. 505).

15. Curva $(9x^2 - 12y + 1)^2 = (1 + 4y)^3$.

$$s(0\,,y) = \frac{1}{8}\sqrt[4]{1+4y}\sqrt{(1+4y)^{\frac{3}{2}} + 12y - 1}\,\frac{3 + 2\sqrt{1+4y}}{2 + \sqrt{1+4y}}$$

$$+ \frac{3}{8}\log\left[\sqrt[4]{1+4y} + \frac{\sqrt{(1+4y)^{\frac{3}{2}} + 12y - 1}}{2 + \sqrt{1+4y}}\right].$$

(Si ponga $4y = t^2(2 + t^3)$ etc.).

16. Curva gobba $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x = \frac{a}{2}(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}})$.

$$s(a\,,x) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

17. Curva $x^3 = a^2(y + z)$, $z^2 = \frac{1}{3}x^2 + y^2$, (intersezione cilindro di terzo ordine con cono ellittico); $s(0\,,y) = y\sqrt{2}$.

(Si noti che la retta $x = 0$, $y + z = 0$ fa parte della curva).

18. Curva $x^2 + y^2 = cz$, $y = x\,\text{tg}\,\frac{z}{c}$ (intersezione paraboloide di rotazione con elicoide gobbo a piano direttore; la curva chiamasi *elica paraboloidica*); $s(0\,.\,z) = \sqrt{cz} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{z^3}{c}}$.

(Giova porre $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\,\text{sen}\,\theta$, $z = z$, coord. cilindriche).

19 Curva $cx = z(b + z)$, $c^2(x^2 + y^2) = b^2 z$ (intersezione di un cilindro parabolico con cono di rotazione). La curva si proietta sul piano delle x, y sulla cardiode $\left(x^2 + y^2 - \frac{b^2}{c}x\right)^2 = \frac{b^4}{c^2}(x^2 + y^2)$.

Usando coordinate cilindriche si trova

$$s(0,\theta)=\frac{2b}{c}\left\{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\sqrt{b^2+c^2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}+\frac{b^2}{c}\log\frac{c\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}+\sqrt{b^2+c^2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}}{b}\right\}.$$

Il perimetro di tutta la curva è

$$=\frac{4b}{c}\left\{\sqrt{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c}\log\frac{c+\sqrt{b^2+c^2}}{b}\right\}.$$

Integrali doppi definiti estesi ai punti di un campo.

106. Sia $z=f(x,y)$ funzione univalente finita dei punti (x,y) di un campo finito C, limitato da una o più curve che ammettano generalmente tangente determinata ed i cui archi siano di lunghezza finita. Decomponiamo C in n parti od elementi, le cui aree, diverse da zero, indicheremo con $h_1, h_2, \ldots h_n$, notando che chiameremo, per brevità, questi elementi, gli elementi $h_1, h_2, \ldots h_n$. Questi elementi siano racchiusi da curve di lunghezza determinata finita.

Formiamo la somma $S=\Sigma z_s h_s$, ove z_s indica un valore qualunque compreso tra il limite inferiore e il superiore (questi inclusi) dei valori che $f(x,y)$ prende nell'elemento h_s; questa somma S è l'analoga a quella per le funzioni ad una variabile di cui si tratta nel n. 186, vol. I.

Noi diremo che, col diminuire indefinitamente di tutti gli elementi h_s, S ha un limite L, quando, ad ogni numero, anche arbitrariamente piccolo e positivo, σ corrisponde un numero positivo δ tale che, per qualunque scomposizione del campo C, per la quale gli elementi h_s siano ciascuno rinchiudibile in un circolo di raggio δ e qualunque sia la scelta delle quantità z_s, risulti $|S-L|<\sigma$, e scriviamo $\lim S=L$.

Indicata con A l'area del campo C, con m, M il limite inferiore e superiore dei valori di $f(x,y)$ in C, si ha, qualunque siano gli elementi h_s, $Am \leq S \leq AM$, e si vede così che, se il limite di S esiste, esso è finito.

Questo limite si indica coi simboli $\iint\limits_C f(x,y)dC$, $\iint f(x,y)dC$, $\int f(x,y)dC$, $\int\limits_C f(x,y)\,dC$ e si legge, *integrale doppio*, o *integrale*, *di* f(x, y) *esteso al campo* C; e la funzione $f(x,y)$ dicesi integrabile superficialmente o atta alla integrazione nel campo C o integrabile in C, quando tal limite esiste.

Ora si leggano i paragrafi 188, 189 del vol. I a cominciare dalle parole « Vediamo ora quale sia la condizione necessaria e sufficiente ecc. », avendo l'avvertenza di sostituire alle parole « y_s, $f(x)$, intervallo (a, b), intervallo o tratto h_s, intervalli o tratti le cui ampiezze sono minori di un dato numero δ » le altre « ζ_s, $f(x,y)$, campo C, elemento h_s, elementi rinchiudibili entro un cerchio di raggio δ ». Si faccia inoltre questa semplice modificazione a pag. 424, vol. I; in luogo delle parole « la somma del secondo membro intendendosi estesa etc. » si dica: la somma del secondo membro intendendosi estesa a questi elementi h_β che, non essendo completamente contenuti in qualche elemento h'_γ, contengono una o più delle linee che formano il contorno degli elementi della prima decomposizione; ovvero, poichè $|L_\beta - L'_\gamma| \leq M - m$, sarà

$$L - L' \leq (M - m)\Sigma' k_\alpha .$$

Ma, se indichiamo con T la somma delle lunghezze di tutti questi contorni, essendo così T quantità finita determinata, la somma delle aree h_β è certamente minore di $4\delta T$, perchè se si immagina un cerchio di raggio 4δ, che scorra col centro lungo tutti questi contorni, tutti questi h_β cadono dentro all'area generata dal circolo, e questa non supera $4T\delta$, e quindi certamente $\Sigma' k_\alpha < 4T\delta$, e perciò ancora, avendo preso $\delta = \frac{\sigma}{4T(M-m)}$, sarà $L' - L < \frac{\sigma}{2}$.

In questo modo si provano i seguenti teoremi:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè la f(x, y) *sia integrabile nel campo* C *è che sia* $\Lambda = \lambda$; *ed allora il valore comune di queste quantità è il limite di* S, *quando tutti gli* h_s *impiccoliscono indefinitamente, cioè è* $\iint\limits_C f(x,y)dC$; od anche è

che, dato σ, *possa decomporsi* C *in due sistemi speciali di elementi (che potranno anche coincidere) tali che sia* $L_1 - l_1 < \sigma$, *essendo* l_1 *il valore di* l *corrispondente ad uno,* L_1 *il valore di* L *corrispondente all' altro di tali sistemi. Il valore dell' integrale è compreso tra* l_1 *e* L_1;

od anche è

che, per ogni numero positivo σ, *esista un sistema speciale di elementi* $h_1, h_2 \ldots h_n$ *tali che per essi sia* $D = \Sigma h_s D_s < \sigma$, *od in altre parole, che il limite inferiore dei valori di* D *sia zero;*

od infine è

che sia $\lim D = 0$, *al diminuire indefinitamente di tutti gli* h_s.

Così pure si proverebbe facilmente che: *la condizione necessaria e sufficiente affinchè* f(x, y) *sia integrabile in un campo* C *è che, assegnati due numeri positivi* δ, ε, *anche comunque piccoli, esista una speciale decomposizione di* C *in elementi, tali che risulti minore di* ε *la somma delle aree di quelli elementi, nei quali l' oscillazione di* f(x, y) *supera* δ.

Si vedrà inoltre senza difficoltà che: *se una funzione è integrabile in un campo* C *lo è pure in qualunque campo appartenente a* C; come pure si proverebbero i teoremi analoghi a quelli dimostrati ai n. 52, 53, 54 per le funzioni di una variabile.

107. *Ogni funzione continua in un campo è ivi integrabile.*

Invero, pel teorema al n. 83 pag. 212, dato σ, possiamo decomporre il campo C in elementi h_s relativi, nel modo indicato, ad un corrispondente numero δ, tali che sia $|f(x', y') - f(x'', y'')| < \frac{\sigma}{3A}$, essendo A l' area di C e $(x', y'), (x'', y'')$ due punti qualunque di h_s; ossia, poichè vi saranno sempre in h_s dei punti $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ pei quali è $L_s - f(x_1, y_1) < \frac{\sigma}{3A}$, $f(x_2, y_2) - l_s < \frac{\sigma}{3A}$, in modo che sia $L_s - l_s < \frac{\sigma}{A}$, ed allora è

$$D = \Sigma h_s (L_s - l_s) < \frac{\sigma}{A} \Sigma h_s = \sigma,$$

ossia $\lim D = 0$, e la funzione è integrabile.

108. *Ogni funzione finita e discontinua in punti e lungo linee, in numero finito, di un campo è integrabile nel campo stesso* [1]).

Sia la $f(x,y)$ discontinua nei punti $c_1, c_2 \ldots c_n$ e in tutti i punti delle linee $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_r$ di C, e siano M, m i suoi limiti superiore ed inferiore in C. Assegnato il numero σ, togliamo dal campo C i punti c e le line γ mediante intorni le cui aree ε, α siano tali che risulti

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r < \frac{\sigma}{2(M-m)}.$$

Nel rimanente campo C_1 la $f(x,y)$ è continua e potremo scomporre C_1 in elementi h_s tali che risulti $D_1 = \Sigma h_s(L_s - l_s) < \frac{\sigma}{2}$; cosichè se consideriamo la quantità D relativa alla scomposizione di C negli elementi h_s, ε, α, è

$$D < \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2(M-m)}(M-m) = \sigma;$$

e perciò, giacchè dato σ possiamo scomporre C in elementi tali che risulti $D < \sigma$, la funzione è integrabile in C.

Si intende anche come la funzione sia integrabile se è discontinua in un numero infinito di punti riunibili tra loro mediante un numero finito di linee di lunghezza finita.

109. *Se* f(x, y) *è integrabile nel campo* C, *cambiando il suo valore in punti e linee di* C, *in numero finito, indicata con* $f_1(x, y)$ *la funzione che così si ottiene, è* $f_1(x, y)$ *integrabile in* C *e si ha* $\int_C f(x,y)\,dC = \int_C f_1(x,y)\,dC$, *o, più generalmente,* $\int_{C_1} f(x,y)\,dC_1 = \int_{C_1} f_1(x,y)\,dC_1$, *essendo* C_1 *una parte qualunque di* C.

Siano $c_1, c_2 \ldots c_n$ i punti, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_r$ le linee ove si cambia il valore di $f(x,y)$, e sia B il limite superiore della differenza numerica tra $f(x,y)$ e $f_1(x,y)$ nel campo C, T la lunghezza di tutte le linee γ.

Si decomponga il campo in elementi h_s, e nella somma $\Sigma h_s \zeta'_s$ indichi ζ'_s un valore arbitrario di $f_1(x,y)$ compreso tra il limite inferiore e superiore (questi inclusi) dei valori di f_1 in h_s, e si prenda $\zeta_s = \zeta'_s$ se l'elemento h_s non contiene alcun punto c o alcuna parte

[1] Si intende linee di lunghezza finita determinata.

di alcuna linea γ, e ove ciò avvenga sia ζ_s un valore qualunque tra il limite inferiore e superiore (questi inclusi) dei valori di $f(x,y)$ in h_s.

Assegnato σ prendiamo $\delta < \frac{\sigma}{2(n+4T)B}$ e tale che per gli h_s rinchiudibili in circoli di raggio δ sia

$$|\Sigma h_s \zeta_s - \int_C f(x,y)dC| < \frac{\sigma}{2},$$

ciò che ha luogo per la ipotesi sulla integrabilità di $f(x,y)$. Inoltre

$$|\Sigma h_s \zeta'_s - \Sigma h_s \zeta_s| = |\Sigma h_s(\zeta'_s - \zeta_s)| < (n\delta + 4\delta T)\,B < \frac{\sigma}{2},$$

e quindi

$$|\Sigma h_s \zeta'_s - \int_C f(x,y)dC| < \sigma$$

per qualunque decomposizione di C in elementi h_s soddisfacenti alla precedente condizione e qualunque sia la scelta di ζ'_s, e questa formola dice perciò che $f_1(x,y)$ è integrabile in C ed è

$$\int_C f_1(x,y)dC = \int_C f(x,y)\,dC.$$

110. Vediamo ora come possa ottenersi il valore dell' integrale, esteso ad un campo, mediante due successive integrazioni semplici, ciascuna rispetto ad una variabile.

Si supponga x, y siano coordinate cartesiane ortogonali, a, b le ascisse estreme, α, β le ordinate estreme del campo C, ove si suppone integrabile la $f(x,y)$. Si divida l' intervallo (a, b), sull' asse dell' ascisse, in parti $k_1, k_2 \ldots k_n$ mediante i punti $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$, dai quali si condurranno delle parallele all'asse delle ordinate, e l'intervallo (α, β), sull' asse delle ordinate, in parti $p_1, p_2 \ldots p_m$ mediante i punti $y_1, y_2 \ldots y_{m-1}$, dai quali si condurranno delle parallele all' asse delle ascisse. Il campo C sarà così decomposto in elementi rettangolari h_{sr} di area $k_s p_r$, o che sono parte di elementi rettangolari, e per questi ultimi l' area h_{sr} non sarà uguale a $k_s p_r$. Le due somme $\Sigma h_{sr}\zeta_{sr}$, $\Sigma k_s p_r \zeta_{sr}$, ove ζ_{sr} indica il solito valore di $f(x,y)$ relativo

all'elemento h_{sr}, differiranno tra loro solamente pei termini che corrispondono ad elementi h attraversati dal contorno di C, ed il valore assoluto della somma di tali termini è minore di $8\delta TM$, se gli elementi h sono rinchiudibili in circoli di raggio δ e T indica la lunghezza del contorno C ed M il limite superiore dei valori assoluti di $f(x, y)$ in C; quindi le due somme precedenti differiscono per una quantità che può rendersi numericamente minore di qualunque numero prefissato, cosichè la seconda somma avrà lo stesso limite della prima, cioè avremo

$$(1) \qquad \int_C f(x, y) dC = \lim \Sigma k_s p_r \zeta_{sr}.$$

Sia y_0 un valore dell'intervallo (α, β); consideriamo la somma $\Sigma' k_s L_s(y_0)$, dove la somma Σ' è estesa a tutte le k_s cui corrispondono le parti della retta $y = y_0$ appartenenti a C e $L_s(y_0)$ è il limite superiore di valori di $f(y_0, x)$ nell'intervallo k_s, sulla retta $y = y_0$, o nella parte di esso intervallo che appartiene al campo C. Al diminuire dei k_s tal somma ha un limite $\lambda(y_0)$, che è il limite inferiore dei suoi valori, cosichè $\lambda(y_0) = \lim \Sigma' k_s L_s(y_0)$.

Analogamente $\Lambda(y_0) = \lim \Sigma' k_s l_s(y_0)$ dove $l_s(y_0)$ è il limite inferiore etc.

Ciò posto, poichè gli elementi $k_s p_r$ possono farsi impiccolire comunque, e poichè è arbitraria la scelta dei ζ_{rs}, potremo scrivere la formola (1) così:

$$\int_C f(x, y) dC = \lim \sum_1^m p_r \left\{ \lim \Sigma' k_s L_s(y) \right\} = \lim \sum_1^m p_r \left\{ \lim \Sigma' k_s l_s(y) \right\}$$

dove y indica un valore qualunque dell'intervallo (y_{r-1}, y_r), ovvero

$$(2) \qquad \int_C f(x, y) dC = \lim \sum_1^m p_r \lambda(y) = \lim \sum_1^m p_r \Lambda(y).$$

Questa ultima formola dice che le funzioni $\lambda(y)$, $\Lambda(y)$ di y sono integrabili nell'intervallo (α, β) e che la differenza $\lambda(y) - \Lambda(y)$ è pure integrabile ed il valore dell'integrale è zero. Ciò avviene non solo nell'intervallo (α, β) ma in qualunque porzione comunque piccola di esso, giacchè varrà una formola analoga alla (2) in qualunque parte C' del campo C, essendo anche in C' integrabile la $f(x, y)$.

Ora, poichè l' integrale di $\lambda(y) - \Lambda(y)$ esteso a qualunque parte di (α, β) è zero, si vede che (Teor. al n. 60) in qualunque tratto di (α, β) vi devono essere punti y' pei quali $\lambda(y') = \Lambda(y')$.

Ma $\lambda(y') = \Lambda(y')$ è la condizione necessaria e sufficiente affinchè esista l' integrale $\int f(x, y')dx$ esteso a tutte le parti di retta $y = y'$ contenute nel campo C, parti di retta che indicheremo col simbolo $\varphi(y')$, e tale integrale, che indicheremo con $\int_{\varphi(y')} f(x, y')dx$, è uguale a $\lambda(y') = \Lambda(y')$.

In consegnenza, in ogni intervallo p_r, esisterà almeno un punto y' ove sarà

$$\lambda(y') = \Lambda(y') = \int_{\varphi(y')} f(x, y')dx,$$

cosichè, supponendo di predere $y = y'$ nella formola (2), avremo

$$\int_C f(x, y)dC = \lim \sum_1^m p_r \int_{\varphi(y')} f(x, y')dx.$$

Questo limite possiamo indicarlo con $\int_\alpha^\beta dy \int_{\varphi(y)} f(x, y)dx$ intendendo con questo simbolo che, nel calcolare il limite di $\Sigma p_r \lambda(y) = \Sigma p_r \Lambda(y)$, si prenda in ogni p_r il valore di $\lambda(y)$, $\Lambda(y)$ in uno di quei punti y di p_r nei quali è $\lambda(y') = \Lambda(y') = \int_{\varphi(y')} f(x, y')dx$. In questo modo si perviene alla formola

$$\int_C f(x, y)dC = \int_\alpha^\beta dy \int_{\varphi(y)} f(x, y)dx.$$

In modo completamente analogo si troverebbe

$$\int_C f(x, y)\, dC = \int_a^b dx \int_{\psi(x)} f(x, y)dy$$

dove $\varphi(x)$ indica il tratto o i tratti di retta, la cui ascissa è x, appartenenti al campo C. [1]).

Relativamente a questo teorema, che permette di ridurre a due integrazioni successive il calcolo di un integrale doppio, sarà bene notare che, *teoricamente*, basta per stabilirlo, come abbiamo ora visto, che la funzione integranda sia solo finita e integrabile nel campo C. Ma se si vuole usarlo *praticamente* dovremo effettivamente eseguire le due integrazioni successive, e perciò occorrerà conoscere in ogni p_r quel valore y' pel quale $\lambda(y') = \Lambda(y') = \int_{\varphi(y')} f(x, y')\,dx$, ciò che generalmente non sappiamo fare. Bisognerà, dunque, che l'integrale $\int_{\varphi(y')} f(x, y')\,dx$ esista per ogni y' di p_r, cioè dovremo ammettere di più l'integrabilità di $f(x, y)$ rispetto ad x, per ogni y' dell'intervallo (α, β), in ogni parte di retta $y = y'$ appartenente al campo C; ciò succede, ad esempio, se supponiamo in C la $f(x, y)$ continua rispetto ad x.

Esempi

1) Il campo C sia il rettangolo formato dalle rette $x = a$, $x = b$, $y = \alpha$, $y = \beta$; allora abbiamo

$$\int_C f(x, y)\,dC = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy = \int_\alpha^\beta dy \int_b^b f(x, y)\,dx.$$

In virtù di questa formola viene tolta la condizione della continuità imposta alla funzione $f(x, y)$ nel n. 93, per dimostrare la invertibilità delle integrazioni con limiti costanti; basta, come si vede, che la funzione sia finita e integrabile nel campo rettangolare C.

2) Il campo C sia costituito dai punti le cui coordinate x, y soddisfanno alla relazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, cioè dalla parte del piano limitata

---

[1] Le considerazioni del presente numero sono tolte dalla pregevole nota del prof. C. Arzelà *Sugli integrali doppi* letta all'accademia delle Scienze di Bologna il 13 dicembre 1891.

dalla ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, che costituisce il contorno del campo. Allora abbiamo

$$\int_C f(x,y)dC=\int_{-a}^{a}dx\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}f(x,y\,dy=\int_{-b}^{b}dy\int_{-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}f(x,y)dx.$$

Sia ad es.: $f(x,y)=x^2$. Se si osserva che la nostra funzione ha lo stesso valore in punti situati simmetricamente rispetto all'origine delle coordinate, si potrà scrivere

$$\int_C x^2dC=4\int_{C_1}x^2dC_1=4\int_0^a x^2dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{b^2-x^2}}dy=4\int_0^b dy\int_0^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}x^2dx$$

$$=4\frac{b}{a}\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{4a^3}{3b^3}\int_0^b(b^2-y^2)^{\frac{3}{2}}dy,$$

dove C_1 indica il quadrante dell'ellisse compreso tra le parti positive degli assi delle coordinate. Eseguite le integrazioni (Vedi esercizi 28, 29 a pag. 460, vol. I), si trova $\int_C x^2dC=\frac{a^3b\pi}{4}$.

3) Il campo C sia la mezza corona circolare determinata dei circoli $x^2+y^2=a^2$, $x^2+y^2=b^2$ $(a>b)$, e dall'asse delle x.

Allora abbiamo

$$\int_C f(x,y)\,dC=\int_{-a}^{-b}dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}f(x,y)dy+\int_{-b}^{b}dx\int_{\sqrt{b^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}f(x,y)dy+\int_b^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}f(x,y)dy$$

od anche

$$\int_C f(x,y)dC=\int_0^b dy\left[\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{-\sqrt{b^2-y^2}}f(x,y)dx+\int_{\sqrt{b^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)dx\right]+\int_b^a dy\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)dx$$

Sia ad es.: $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}$. funzione finita continua e perciò integrabile nel nostro campo C. Se indichiamo con C_1 la parte di esso compresa tra le parti positive degli assi coordinati, abbiamo

$$\int_C \frac{x^2y}{x^2+y^2}\,dC = 2\int_{C_1} \frac{x^2y}{x^2+y^2}\,dC_1 = 2\int_0^b x^2dx \int_{\sqrt{b^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{ydy}{x^2+y^2} + 2\int_b^a x^2\,dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{ydy}{x^2+y^2}$$

$$= 2\int_0^b ydy \int_{\sqrt{b^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \frac{x^2dx}{x^2+y^2} + 2\int_b^a ydy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \frac{x^2dx}{x^2+y^2} = \frac{2}{9}(a^3-b^3).$$

Si troverà che eseguendo le integrazioni del terzo membro si arriva più facilmente al risultato che non eseguendo quelle del quarto, per eseguire le quali ci possiamo servire della formola $\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-m^2}}{m} = \arccos m$. In casi analoghi gioverà cercare di intuire prima quali delle due vie sia la migliore per arrivare, o per arrivare più presto, al risultato, quando quest'ultimo possa conseguirsi in termini finiti.

4) Il campo C sia il triangolo rettangolo isoscele limitato dalle rette $y=x$, $y=a$, $x=b$. Allora abbiamo

$$\int_C f(x,y)dC = \int_a^b dx \int_a^x f(x,y)dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x,y)dx. \tag{3}$$

Ad es.: se $f(x,y)=x^2y$ è

$$\int_C x^2ydC = \frac{a^5}{15} + \frac{b^5}{10} - \frac{a^2b^3}{6}.$$

Questa formola permette di stabilirne un'altra relativa agli integrali semplici definiti, e che contiene come caso particolare quella della integrazione per parti.

Siano $f(x)$, $\varphi(x)$ funzioni finite e integrabili nell'intervallo (a,b)

e per la $\varphi(x)$ valga la formola

$$\int_c^x \varphi'(y)dy = \varphi(x) - \varphi(c)$$

qualunque siano i punti c, x di (a, b). Allora possiamo scrivere

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \int_a^b f(x)\left[\int_c^x \varphi'(y)dy + \varphi(c)\right]dx$$

$$= \varphi(c)\int_a^b f(x)dx + \int_a^b f(x)dx \int_c^x \varphi'(y)dy$$

e da questa, facendovi $c = a$ e poi $c = b$,

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)dx = \varphi(a)\int_a^b f(x)dx + \int_a^b f(x)dx \int_a^x \varphi'(y)dy$$

$$= \varphi(b)\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x)dx \int_x^b \varphi'(y)dy,$$

ossia, in virtù della (3), che può qui venire applicata,

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(a)\int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi'(y)dy \int_y^b f(x)dx$$

$$= \varphi(b)\int_a^b f(x)dx - \int_a^b \varphi'(y)dy \int_a^y f(x)dx,$$

la quale, ove si conosca $\int f(x)dx$ essere $\psi(x)$, si riduce alla solita formola di integrazione per parti, come può senz' altro verificarsi.

111. Si dimostra facilmente che ha luogo per gli integrali doppi estesi ad un campo C il primo teorema della media. Invero, se

$f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ sono integrabili in C e la $\varphi(x,y)$, ove è diversa da zero, ha sempre lo stesso segno, e m, M sono il limite inferiore e superiore dei valori di $f(x,y)$ in C, il prodotto $f(x,y)\varphi(x,y)$ sarà, per tutti i punti del campo, compreso tra le quantità $m\varphi(x,y)$, $M\varphi(x,y)$ e l'integrale $\int_C f(x,y)\varphi(x,y)dC$ tra le quantità $m\int_C \varphi(x,y)dC$, $M\int_C \varphi(x,y)\,dC$ o sarà uguale ad una di esse, cosichè

$$\int_C f(x,y)\varphi(x,y)dC = k\int_C \varphi(x,y)dC, \quad m \leq k \leq M.$$

Se la $f(x,y)$ è continua in C, sarà

$$\int_C f(x,y)\ \varphi(x,y)dC = f(x_1,y_1)\int_C \varphi(x,y)dC,$$

dove x_1, y_1 indica un certo punto di C, che potrà anche essere sul contorno di C. [1]).

112. Come abbiamo visto, l'integrale $\int_C f(x,y)dC$, o, come anche suole scriversi, $\int_C f(x,y)dx\,dy$, riferendoci alla decomposizione del campo in rettangoli di area $\Delta x\,\Delta y$ mediante rette parallele agli assi, si può ridurre ad uno o più integrali della forma $I = \int_a^b dx \int_{y_0}^{y_1} f(x,y)dy$, dove $b > a$, $y_1 > y_0$. Introduciamo ora in luogo delle variabili x, y, le variabili u, v legate alle prime dalle equazioni

$$x = \varphi(u), \qquad y = \psi(v),$$

dove le φ, ψ sono funzioni che ammettono derivata integrabile e sono tali che mentre x varia crescendo da a a b, u varia crescendo o decrescendo da u_0 a u_1, e mentre y varia crescendo da y_0 a y_1, v varia crescendo o decrescendo da v_0 a v_1. Avremo allora

$$(1) \qquad I = \int_a^b dx \int_{v_0}^{v_1} f(x,\psi)\frac{d\psi}{dv}dv = \int_{u_0}^{u_1} \frac{d\varphi}{du}du \int_{v_0}^{v_1} f(\varphi,\psi)\frac{d\psi}{dv}dv.$$

[1]) Il secondo teorema della media è stato esteso dal prof. Arzelà, nella citat memoria, agli integrali doppi.

Se $u_0 < u_1, v_0 < v_1$, l'ultimo membro è l' $\int\int f(\varphi, \psi) \frac{d\varphi}{du} \frac{d\psi}{dv} du\, dv$ esteso a quella parte del campo C, cui è esteso l' integrale I, calcolato mediante le nuove variabili u, v [1]). Se invece supponiamo sia $v_0 > v_1$, allora il dv nell'integrale interno del secondo e terzo membro della (1) è negativo, la $\frac{d\psi}{dv}$ è pure negativa sempre, quando v varia da v_0 a v_1, perchè la $y = \psi(v)$ è funzione crescente quando v varia decrescendo da v_0 a v_1; ma possiamo scrivere

$$I = \int_{u_0}^{u_1} \frac{d\varphi}{du} du \int_{v_1}^{v_0} f(\varphi, \psi) \left(-\frac{d\psi}{dv}\right) dv = \int_{u_0}^{u_1} \frac{d\varphi}{du} du \int_{v_1}^{v_0} f(\varphi, \psi) \left|\frac{d\psi}{dv}\right| dv,$$

dove $u_0 < u_1$, $v_1 < v_0$ e du, dv sono positivi, e questo è allora $\int\int f(\varphi, \psi) \frac{d\varphi}{du} \left|\frac{d\psi}{dv}\right| du\, dv$ esteso a quella parte di C cui è esteso I.

Si ragionerebbe in modo analogo se fosse $u_0 > u_1, v_0 < v_1$ oppure $u_0 > u_1, v_0 > v_1$ e si troverebbe così che è, in ogni caso,

$$I = \int\int f(\varphi, \psi) \left|\frac{d\varphi}{du} \frac{d\psi}{dv}\right| du\, dv,$$

l' integrale doppio, colle variabili correnti di integrazione u, v, essendo esteso a quella parte del campo C cui è esteso I.

Cosichè se le funzioni φ, ψ soddisfanno alle condizioni, già poste, relativamente a tutti gli integrali analoghi ad I nei quali si decompone il nostro integrale, avremo

$$\int_C f(x, y)\, dx\, dy = \int_C f[\varphi(u), \psi(u)] \left|\frac{d\varphi}{du} \frac{d\psi}{du}\right| du\, dv.$$

Supponiamo ora che le nuove variabili u', v siano legate alle x, y dalle relazioni $x = \Phi(u')$, $y = \Psi(u', v)$, cosichè eliminando u' sia $y = F(x, v)$, e queste funzioni siano tali che, mentre x varia cre-

---

[1] Ossia, se si considerano u, v come coordinate cartesiane ortogonali dei punti di un piano, a questa parte di C corrisponderà in questo piano un campo C_1; il terzo membro della (1) è l' integrale della funzione $f(\varphi, \psi) \frac{d\varphi}{du}$ esteso a C_1.

scendo da a a b, u vari crescendo o decrescendo da u'_0 a u'_1 e che la $F(x, v)$, per ogni valore di x che si fissa tra a e b, mentre v varia da v_0 a v_1 sempre crescendo o decrescendo, dia per y valori che variano sempre crescendo da y_0 a y_1.

Abbiamo allora

$$I = \int_a^b dx \int_{v_0}^{v_1} f[x, F(x, v)] \frac{\partial F}{\partial v} dv,$$

e passando quindi dalla variabile x alla u' ed osservando che $F(x, v)$ diviene $\Psi(u', v)$ e che $\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial \Psi}{\partial v}$, otteniamo

$$I = \int_{u'_0}^{u'_1} \frac{d\Phi}{du'} du' \int_{v_0}^{v_1} f[\Phi, \Psi] \frac{\partial \Psi}{\partial v} dv,$$

da cui, ragionando come nel caso precedente, si vede che

$$I = \int\int f[\Phi(u'), \Psi(u', v)] \left| \frac{d\Phi}{du'} \frac{\partial \Psi}{\partial v} \right| du' dv,$$

l'integrale doppio essendo esteso a quella parte di C, cui è esteso I; e quindi ancora. se si suppongono ferme le condizioni per le funzioni trasformatrici relativamente agli altri integrali estesi alle altre parti di C, è

$$\int_C f(x, y) dx dy = \int_C f[\Phi(u'), \Psi(u', v)] \left| \frac{d\Phi}{du'} \frac{\partial \Psi}{\partial v} \right| du' dv.$$

Sia in ultimo il caso generale

$$(2) \qquad x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v),$$

dove le φ, ψ ammettono derivate parziali finite integrabili.

Potremo sempre scegliere delle funzioni $F(u, v)$, Φ, Ψ in guisa che risulti

$$x = \varphi(u, v) = \Phi[F(u, v)], \quad y = \psi(u, v) = \Psi[F(u, v), v],$$

cos hè sarà lo stesso passare dalle variabili x, y alle u, v mediante le (2), oppure passare prima dalle variabili x, y alle u', v mediante

le formole

$$x = \Phi(u'), \qquad y = \Psi(u', v)$$

e poi dalle u', v alle u, v mediante le formole

$$u' = F(u, v), \qquad v = v.$$

In seguito alle precedenti considerazioni, il primo passaggio dalle variabili x, y alle u', v ci dà

$$\int_C f(x, y) dx\, dy = \int_C f[\Phi(u'), \Psi(u', v)] \left| \frac{d\Phi}{du'} \frac{\partial \Psi}{\partial v} \right| du'\, dv.$$

Per eseguire il secondo passaggio dalle variabili u', v alle u, v, dovremo sostituire, nell' integrale del secondo membro, $\left| \frac{\partial F}{\partial u} \right| du\, dv$ in luogo di $du'\, dv$ ed introdurre nella funzione integranda le nuove variabili u, v in luogo delle u', v. Ma si osservi che allora le $\Phi(u')$, $\Psi(u', v)$ diventano $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, e che

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{d\Phi}{du'} \frac{\partial F}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{\partial \Psi}{\partial u'} \frac{\partial F}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{d\Phi}{du'} \frac{\partial F}{\partial v}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial v} = \frac{\partial \Psi}{\partial u'} \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial \Psi}{\partial v},$$

dalle quali

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{d\Phi}{du'} \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v},$$

cosichè avremo

$$\int_C f(x, y)\, dx\, dy = \int_C f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right| du\, dv.$$

Abbiamo così la regola: *per trasformare l'integrale* $\int_C f(x, y)\, dx\, dy$ *quando alle variabili* x, y *si sostituiscono le* u, v *mediante le formole* $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, *si trasformi la funzione integranda nelle nuove variabili e in luogo di* $dx\, dy$ *si sostituisca* $du\, dv$ *moltiplicato pel valore assoluto del determinante Jacobiano delle* x, y *rispetto alle* u, v, *e si estenda l' integrale al campo* C.

ESEMPI

1) Il campo C sia costituito da tutti i punti le cui coordinate x, y soddisfanno alla relazione $x^2+y^2 \leq a^2$, cioè sia la parte del piano limitata dal circolo $x^2+y^2=a^2$, e si voglia calcolare l'integrale $\int_C e^{x^2+y^2} dx\, dy$.

Colle coordinate cartesiane x, y non si riesce ad eseguire la integrazione in termini finiti, che riesce invece subito colle coordinate polari ponendo $x=\rho \cos\theta$, $y=\rho \operatorname{sen}\theta$.

Si trova così

$$\int_C e^{x^2+y^2} dx\, dy = \int_C e^{\rho^2} \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho e^{\rho^2} d\rho = \pi(e^{a^2}-1).$$

2) Le due ellissi omofocali

$$\frac{x^2}{\lambda_1^2} + \frac{y^2}{\lambda_1^2 - b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{\lambda_2^2} + \frac{y^2}{\lambda_2^2 - b^2} = 1, \quad \lambda_2 > \lambda_1 > b,$$

e le due iperboli omofocali tra loro, e colle ellissi,

$$\frac{x^2}{\mu_1^2} - \frac{y^2}{b^2 - \mu_1^2} = 1, \quad \frac{x^2}{\mu_2^2} - \frac{y^2}{b^2 - \mu_2^2} = 1, \quad b > \mu_2 > \mu_1,$$

determinano quattro campi, dei quali prenderemo a considerare quello, C, che è nella parte del piano limitata dalle parti positive degli assi.

Vogliamo calcolare $\int_C y dC$.

Qui, e in casi simili, sarà conveniente passare dal sistema di coordinate cartesiane ad un sistema di coordinate curvilinee u, v tali che, ove ciò sia possibile, le linee che limitano il campo C corrispondano a certi valori di u e v; nel nostro caso ai valori di u, v, $u=\lambda_1$, $u=\lambda_2$, $v=\mu_1$, $v=\mu_2$. Il nostro integrale verrà così a ridursi alla integrazione di due integrali con limiti costanti. Questo può farsi, nel nostro caso, prendendo per u, v il sistema di *coordinate ellittiche*, le cui linee coordinate sono le ellissi omofocali che si ottengono da

$$\frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{u^2 - b^2} = 1$$

facendo variare u^2 da b^2 a ∞, e le iperboli omofocali che si ottengono da

$$\frac{x^2}{v^2} - \frac{y^2}{b^2 - v^2} = 1$$

facendo variare v da 0 a b^2.

Per avere le formole che servono al passaggio dalle coordinate x, y alle u, v, si risolvono le precedenti equazioni rapporto ad x, y ottenendo così $x = \frac{uv}{b}$, $y = \frac{1}{b}\sqrt{(u^2 - b^2)(b^2 - v^2)}$.

Il valore assoluto del determinante Jacobiano delle x, y rispetto alle u, v è $\frac{u^2 - v^2}{\sqrt{(u^2 - b^2)(b^2 - v^2)}}$ e quindi avremo

$$\int_C y\,dC = \frac{1}{b}\int_C (u^2 - v^2)\,du\,dv = \frac{1}{b}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} du \int_{\mu_1}^{\mu_2} (u^2 - v^2)\,dv$$

$$= \frac{1}{b}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} u^2 du \int_{\mu_1}^{\mu_2} dv - \frac{1}{b}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} du \int_{\mu_1}^{\mu_2} v^2 dv$$

$$= \frac{1}{3b}\left\{(\mu_2 - \mu_1)(\lambda_2^3 - \lambda_1^3) - (\lambda_2 - \lambda_1)(\mu_2^3 - \mu_1^3)\right\}.$$

3) Il campo C sia il parallelogrammo determinato dalle rette

$$ax + by - c = 0, \qquad a'x + b'y - c' = 0,$$

$$ax + by - c_1 = 0, \qquad a'x + b'y - c'_1 = 0,$$

e si voglia calcolare

$$I = \int_C (ax + by)\,\mathrm{sen}\,[(ax + by)(a'x + b'y)]\,dC.$$

Poniamo $ax + by = u$, $a'x + b'y = v$, da cui $x = \frac{b'u - v}{ab' - a'b}$.

$y = \frac{-a'u + av}{ab' - a'b}$; avremo, supposto $c_1 > c$, $c'_1 > c'$.

$$I = \left|\frac{1}{ab' - a'b}\right| \int_c^{c_1} u du \int_{c'}^{c_1'} \operatorname{sen}(uv) dv = \left|\frac{1}{ab' - a'b}\right| \int_c^{c_1} [\cos(c'u) - \cos(c'_1 u)] du$$

$$= \frac{1}{ab' - a'b}\left| \left\{ \frac{\operatorname{sen}(c'c_1) - \operatorname{sen}(c'c)}{c'} - \frac{\operatorname{sen}(c_1'c_1) - \operatorname{sen}(c_1'c)}{c_1'} \right\} \right|.$$

4). Il campo C sia racchiuso dal circolo $x^2 + y^2 = r^2$, e si voglia calcolare $I = \int_C f(ax + by) dx dy$.

Passando alle coordinate polari ρ, θ e posto $a = k\cos\theta_1$, $b = k \operatorname{sen}\theta_1$ e perciò $k = \sqrt{a^2 + b^2}$, è

$$I = \int_C f[k\rho \cos(\theta - \theta_1)] \rho d\rho \, d\theta.$$

Passando ora dalle coordinate ρ, θ alle x_1, y_1 mediante le formole $\rho \cos(\theta - \theta_1) = x_1$, $\rho \operatorname{sen}(\theta - \theta_1) = y_1$, che danno $\rho = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, $\theta = \theta_1 + \operatorname{arc\,tg} \frac{y_1}{x_1}$, avremo

$$I = \int_C f(kx_1) dx_1 \, dy_1;$$

cosichè, se si osserva che la condizione $x^2 + y^2 \leq r^2$ diventa prima $\rho^2 \leq r^2$ e poi $x_1^2 + y_1^2 \leq r^2$, si ha

$$I = \int_{-r}^{r} f(kx_1) dx_1 \int_{-\sqrt{r^2 - x_1^2}}^{\sqrt{r^2 - x_1^2}} dy_1 = 2 \int_{-r}^{r} f(kx_1) \sqrt{r^2 - x_1^2} \, dx_1,$$

ed il problema è ridotto al calcolo di un solo integrale definito.

113. Sia AMB un ramo di curva, $a, b (a < b)$ le ascisse dei suoi estremi, e sia tale che ogni retta parallela all'asse delle y e la cui ascissa appartenga all'intervallo (a, b) lo incontri in un solo punto,

cosichè, se $y = y(x)$ è l'equazione della curva, sia $y(x)$ funzione finita univalente di x e che ammetta generalmente derivata nell'intervallo (a, b). Per $\int_a^b f(x, y)dx$ o $\int_{AMB} f(x, y)dx$ esteso al ramo di curva AMB nel verso AMB intendiamo il limite della somma $\Sigma h_s f_s(x, y)$, quando gli intervalli h_s nei quali supponiamo aver scomposto l'intervallo (a, b) convergono a zero e dove $f_s(x, y)$ indica un qualunque valore compreso tra il limite inferiore e il superiore (questi inclusi) dei valori che la $f(x, y)$ prende, quando per le x, y si pongano le coordinate dei punti del tratto di curva determinato dalle parallele all'asse delle y condotte dagli estremi del tratto h_s. Detto integrale è quindi $\int_a^b f[x, y(x)]\,dx$, cosichè la nostra funzione $f(x, y)$ sarà certamente integrabile lungo la curva AMB se pei punti di essa è finita e assolutamente continua rispetto alle due variabili x, y.

Se $a < b$ gli h_s sono positivi, o come suol dirsi è positivo il dx nell'integrale $\int_{AMB} f(x, y)dx$. Se fosse $a > b$, sarebbero negativi gli h_s e si avrebbe, come subito si riconosce,

$$\int_{AMB} f(x, y)\,dx = -\int_{BMA} f(x, y)\,dx.$$

Se la linea di integrazione è una parallela all'asse delle y si deve considerare come nullo l'integrale di $f(x, y)dx$ esteso ad essa.

Analoghe definizioni valgono per $\int_{AMB} f(x, y)dy$, ove si suppone che ogni parallela all'asse delle x incontri la AMB al più in un punto.

Sia una linea s che cominci e termini in uno stesso punto. Potremo sempre supporre la linea decomposta in parti AMB, BNC, ... KLA che soddisfacciano alle precedenti condizioni. Allora per $\int_s f(x, y)\,dx$ nel verso AMBNC ... KLA intendiamo la somma degli integrali $\int_{AMB} + \int_{BNC} + \ldots$; e per $\int_s f(x, y)\,dx$ nel verso ALK ... LMA

intendiamo la somma degli integrali $\int_{BMA} + \int_{CNB} + \ldots$. I due integrali estesi ad s nei due versi opposti sono uguali e di segno contrario. Quando una linea chiusa appartiene al contorno di un campo, si suole chiamare verso positivo di integrazione quello nel quale dovrebbe muoversi una persona sul contorno per avere il campo a sinistra.

Sia ora s_1 una curva chiusa, a, b le sue ascisse estreme e sia $a < b$, e ogni parallela all'asse delle y condotta per un punto dell'intervallo (a, b) incontri la linea s_1 in due punti (esclusi gli estremi). Indichiamo con y_m l'ordinata minore, con $y_{m'}$ l'ordinata maggiore corrispondente all'ascissa x.

Sia C il campo limitato da s_1 e sia $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ continua in C, e $f(x, y)$ integrabile rispetto ad x sul contorno. Avremo

$$\int_C \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dC = \int_a^b dx \int_{y_m}^{y_{m'}} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy = \int_a^b [f(x, y_{m'}) - f(x, y_m)] dx$$

$$= -\int_a^b f(x, y_m) dx - \int_b^a f(x, y_{m'}) dx = -\int_{s_1} f(x, y) dx,$$

l'integrale lungo s_1 essendo preso nel verso positivo.

In modo analogo, se si suppone che le parallele all'asse delle x condotte dai punti dell'intervallo (α, β) sull'asse delle y, ove α, β indicano le ordinate estreme di s_2, incontrino s_2 in due punti (esclusi gli estremi α, β), essendo s_2 una curva chiusa che racchiude un campo C_1, si avrà

$$\int_{C_1} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dC_1 = \int_{s_2} f(x, y) dy,$$

l'integrazione lungo s_2 essendo condotta nel verso positivo.

Cosideriamo ora un campo C il cui contorno sia formato anche da più linee. Si supponga $\frac{\partial f(x, y)}{dy}$ continua in C e $f(x, y)$ integrabile rispetto ad x lungo il contorno s di C. Possiamo sempre decomporre il campo C, mediante parallele all'asse delle y, in campi

parziali, i cui contorni siano formati da linee chiuse come la s_1. Allora, poichè l' integrale esteso a C si compone della somma degli integrali estesi a questi campi, e poichè gli integrali estesi a rette parallele all' asse delle y sono zero, avremo

$$\int_C \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\, dC = -\int_s (x,y)\, dx;$$

e sotto analoghe condizioni

$$\int_C \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\, dC = \int_s f(x,y)\, dy.$$

l' integrazione lungo il contorno s essendo condotta nel verso positivo, ed intendendo che i secondi membri sono la somma degli integrali estesi alle varie parti del contorno di C nel verso positivo.

Le due ultime formole, dovute a *Gauss*, sono le corrispondenti alla formola $\int_a^b \frac{df(x)}{dx}\, dx = f(b) - f(a)$, perchè, come questa esprime l'integrale di $\frac{df(x)}{dx}$, esteso ad un intervallo, mediante i valori di $f(x)$ negli estremi, così quelle esprimono gli integrali di $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ mediante i valori di $f(x,y)$ sul contorno del campo.

Integrali doppi definiti pei quali la funzione integranda non si mantiene finita nel campo di integrazione e integrali doppi estesi ad un campo infinito.

114. Supponiamo che la funzione $f(x,y)$ diventi infinita in un punto (a,b) del campo C, intendendo con questo che, assegnato un numero positivo comunque grande B, esiste un intorno di (a,b) per tutti i punti del quale è $|f(x,y)| > B$; oppure che, comunque piccolo si prenda un intorno di (a,b), vi è sempre in esso qualche punto ove risulti $|f(x,y)| > B$.

Circondiamo il punto (a, b) con una linea priva di nodi s, appartenente a C, e chiusa se il punto è nell'interno di C, ed indichiamo con C_1 il campo C da cui venga tolta la parte di campo limitata da s, o da s e da una certa parte del contorno di C se (a, b) è sul contorno di C. In C_1 la $f(x, y)$ è integrabile qualunque sia la linea s e comunque essa venga a serrarsi al punto (a, b).

Diremo che $\int_{C_1} f(x, y)\, dC_1$ ha un limite L quando la linea s si serra comunque indefinitamente al punto (a, b) o per C_1 convergente comunque a C, se, dato σ, esiste un corrispondente numero positivo δ tale che, qualunque sia la linea s appartenente al circolo di raggio δ col centro in (a, b), o a quella parte di questo circolo che appartiene a C, è $\left| \int_{C_1} f(x, y) dC_1 - L \right| < \sigma$, ed allora scriveremo $\lim_{C_1 = C} \int_{C_1} f(x, y) dC_1 = L$.

Ora, se esiste L, poniamo la definizione

$$\int_C f(x, y) dC = \lim_{C_1 = C} \int_{C_1} f(x, y) dC_1$$

e diciamo che $f(x, y)$ è integrabile in C.

Indicate con C', C'' le parti di C che rimangono togliendone le parti limitate, nel modo detto, dalle linee s'. s'' e con τ la parte di C limitata da s', s'' (con qualche parte del contorno di C se il punto (a, b) è sul contorno), si vede che la condizione necessaria e sufficiente alla esistenza del limite L è che, per ogni numero positivo σ, esista un numero positivo δ tale che, qualunque siano le solite linee s', s'' appartenenti al circolo di raggio δ col centro in (a, b) o a quella parte di esso che appartiene C, sia

$$\left| \int_{C'} f(x, y) dC' - \int_{C''} f(x, y) dC'' \right| = \left| \int_{\tau} f(x, y) d\tau \right| < \sigma.$$

Questi ultimi integrali sono analoghi agli integrali singolari per le funzioni di una variabile.

Si intende ora, senz'altro, come si procederebbe se la $f(x, y)$ divenisse infinita in altri punti di C, in numero finito.

Passiamo dalle coordinate cartesiane x, y alle polari ρ, θ col polo

nel punto (a, b) mediante le formole

$$x = a + \rho \cos\theta, \; y = b + \rho \operatorname{sen}\theta,$$

cosichè sia

$$\int_{C_1} f(x, y) dC_1 = \int_{C_1} f(a + \rho\cos\theta, \; b + \rho \operatorname{sen}\theta) \rho d\rho \, d\theta.$$

Se la $f(x, y)$ è tale che per tutti [1]) i punti di un certo circolo di raggio r col centro in (a, b), escluso (a, b), cioè per $0 < \rho \leq r$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, sia

$$|f(a + \rho\cos\theta, \; b + \rho \operatorname{sen}\theta)| \rho^{\mu} < A,$$

dove A è un certo numero positivo e μ è positivo e < 2, la funzione $f(x, y)$ è integrabile in C.

Invero, se indichiamo con τ_1 la corona circolare di raggi δ', δ, col centro in (a, b) e dove $\delta' < \delta \leq r$, abbiamo

$$\left| \int_{\tau_1} f(x, y) \, d\tau_1 \right| \leq \int_{\tau_1} |f(a + \rho\cos\theta, b + \rho \operatorname{sen}\theta)| \rho d\rho \, d\theta < A \int_{\tau_1} \rho^{1-\mu} d\rho d\theta,$$

$$= A \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\delta'}^{\delta} \rho^{1-\mu} d\rho = \frac{2\pi A}{2-\mu} (\delta^{2-\mu} - \delta'^{2-\mu}),$$

quantità che può rendersi minore di qualunque quantità prefissata prendendo δ sufficientemente piccolo, e qualunque sia δ', ove $0 < \delta' < \delta$. Ma qualunque siano le linee s', s'' nel circolo di raggio δ, potremo sempre prendere δ' così piccolo che sia $\tau < \tau_1$ e quindi

$$\left| \int_{\tau} f(x, y) d\tau \right| \leq \int_{\tau} |f(a + \rho\cos\theta, \; b + \rho \operatorname{sen}\theta)| \rho d\rho d\theta$$

$$< A \int_{\tau} \rho^{1-\mu} d\rho d\theta < A \int_{\tau_1} \rho^{1-\mu} d\rho d\theta.$$

Se invece per tutti i punti del circolo di raggio r la funzione

---

[1]) Per semplicità supponiamo il punto (a, b) interno al campo. Sono semplici le modificazioni da introdursi se (a, b) fosse sul contorno di C.

$f(x, y)$ non cambia segno ed è

$$|f(a + \rho \cos\theta,\ b + \rho \operatorname{sen}\theta)|\ \rho^{\mu} > A,$$

dove $\mu \geqq 2$, la $f(x, y)$ non è integrabile in C.

Invero nel campo τ_1 avremo

$$\left| \int_{\tau_1} f(x, y)\, d\tau_1 \right| > \frac{2\pi A}{2-\mu} (\delta^{2-\mu} - \delta'^{2-\mu}) \text{ se } \mu > 2 \text{ e}$$

$$\left| \int_{\tau_1} f(x, y)\, d\tau_1 \right| > 2\pi A (\log \delta - \log \delta') \text{ se } \mu = 2,$$

quantità che crescono indefinitamente al diminuire di δ', comunque si fissi δ.

Esempi

1) Per valori positivi o nulli di y la funzione $\frac{1}{x^2+y}$ diventa infinita solo per $x = 0$, $y = 0$. Essa è, ciò non ostante, integrabile in qualunque campo situato al disopra dell'asse delle x, e di cui faccia pur parte il punto $(0, 0)$. Invero, presi a, b positivi e $a < b$, abbiamo

$$\int_{-b}^{-a} dx \int_0^b \frac{dy}{x^2+y} + \int_{-a}^{a} dx \int_a^b \frac{dy}{x^2+y} + \int_a^b dx \int_0^b \frac{dy}{x^2+y} = 2b \log(b+1)$$

$$- 2b \log b - 2a \log(a+1) + 2a \log a + 4\sqrt{b} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{b} - \sqrt{a} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{a},$$

e si vede come si possa fissare b in guisa che, qualunque sia a diverso da zero e $< b$, questa espressione risulti minore di qualunque numero prefissato. Se poi si osserva che $\frac{1}{x^2+y}$ è sempre positiva pei valori di x, y che consideriamo, si vedrà facilmente come l'integrale singolare relativo al punto $(0, 0)$ abbia per limite zero, e quindi la funzione è integrabile.

2) Non è integrabile la funzione $\frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2}$ in qualunque campo cui appartenga il punto $(0, 0)$. Invero, sia questo punto interno al campo C; indichiamo con C_2 il campo rettangolare determinato dalle

rette $x = a'$, $x = -a'$, $y = b'$, $y = -b'$, avendo preso a', b' in modo che questo rettangolo appartenga a C, e C_3 il campo C da cui si tolga C_2; avremo $\int_C = \int_{C_2} + \int_{C_3}$. Affinchè esista $\int_{C_2}$ occorre che esista il $\lim_{C_1 = C_2} \int_{C_1} \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2} dC_1$, essendo C_1 il campo che si ottiene da C_2 togliendone la parte racchiusa da una linea s qualunque che gli appartiene e che racchiuda il punto $(0, 0)$. Per linea s prendiamo il contorno del rettangolo determinato dalle rette $x = a$, $x = -a$, $y = b$, $y = -b$, dove $a < a'$, $b < b'$.

Abbiamo

$$\int_{C_1} \frac{y^2 - x^2}{(y^2+x^2)^2} dC_1 = 4 \int_0^a dx \int_b^{b'} \frac{y^2 - x^2}{(y^2+x^2)^2} dy + 4 \int_a^{a'} dx \int_0^{b'} \frac{y^2 - x^2}{(y^2+x^2)^2} dy$$

$$= 4 \int_0^a dx \left[\frac{-y}{y^2 + x^2}\right]_b^{b'} + 4 \int_a^{a'} dx \left[\frac{-y}{y^2+x^2}\right]_0^{b'} = 4 \int_0^a dx \left(\frac{b}{b + x^2} - \frac{b'}{b^2 + x^2}\right)$$

$$+ 4 \int_{a'}^{a'} dx \frac{-b'}{b^2 + x^2} = 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b} - 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{a'}{b'},$$

quantità che non ha limite determinato quando a, b convergono comunque a zero. Non esiste quindi il limite dell' integrale esteso a C, quando la linea qualunque s si serra comunque al punto $(0, 0)$.

Questo esempio ci fa vedere come possa esistere il limite per speciali linee s serrantesi al punto di infinito; se supponiamo qui $a = b$, il limite esiste ed è $\pi - 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{a'}{b'}$.

Notiamo ancora che, la funzione non essendo integrabile in un campo, possono però esistere gli integrali $\int dx \int f(x, y) dy$, $\int dy \int f(x, y) dx$ estesi al campo stesso. Nel nostro caso non ha significato $\int_C \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2} dC$, essendo C il rettangolo delle rette $x =$ [illegible]

$y=0$, $x=1$, $y=1$, ma abbiamo

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}\,dy = -\frac{\pi}{4}, \quad \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4},$$

(Vedi esercizio 12 a pag. 252).

3) Si riconosce subito la integrabilità della funzione $f(x,y) = \dfrac{1}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^n}$ in un campo cui appartenga il punto $x=a$, $y=b$, se $n<1$, perchè, posto $x=a+\rho\cos\theta$, $y=b+\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$, è sempre

$$\rho^{2n} f(a+\rho\cos\theta\,,\, b+\rho\,\mathrm{sen}\,\theta) = 1 \quad \text{e} \quad 2n<2\,;$$

e la non integrabilità se $n \geqq 1$.

Così pure si riconosce la integrabilità della funzione $[\log(x^2+y^2]^n, n>0$, in qualunque campo cui appartenga il punto $(0\,,0)$.

115. Supponiamo ora che la $f(x,y)$ divenga infinita in tutti i punti d'una linea s appartenente a C. Circondiamo la linea s con un linea s_1 ed indichiamo con C_1 il campo C da cui venga tolta la parte limitata da s_1 sola, o insieme a pezzi di contorno di C se la s ha qualche punto in comune col contorno o forma parte od è tutto il contorno di C. La $f(x,y)$ è integrabile in C_1: e diremo che $\int_{C_1} f(x,y)\,dC_1$ ha un limite L quando la linea s_1 si serra comunque alla s, se, dato σ, esiste un numero δ tale che, qualunque sia la linea s_1 appartenente a quella parte T del piano determinata da un circolo di raggio δ che scorre col centro sulla s, o a quella parte di T che appartiene a C, risulti $\left|\int_{C_1} f(x,y)\,dC_1 - L\right| < \sigma$, e scriviamo

$$L = \lim_{C_1=C} \int_{C_1} f(x,y)\,dC_1.$$

Quando esiste L diciamo che la $f(x,y)$ è integrabile in C, e poniamo la definizione

$$\int_C f(x,y)\,dC = \lim_{C_1=C} \int_{C_1} f(x,y)\,dC_1.$$

Anche qui si vede che la condizione necessaria e sufficiente alla esistenza del limite L. e quindi alla integrabilità di $f(x, y)$ in C. è che, dato σ, esista un δ tale che per due linee qualunque s_1, s_2 appartenenti alla corrispondente parte del piano T, o a quella parte di T che appartiene a C, sia

$$\left| \int_{C_1} f(x, y)\, dC_1 - \int_{C_2} f(x, y)\, dC_2 \right| = \left| \int_{\tau} f(x, y)\, d\tau \right| < \sigma,$$

indicando con τ la parte di C limitata da s_1, s_2 sole o con qualche pezzo di contorno di C.

Passiamo dal sistema di coordinate x, y ad un sistema di coordinate curvilinee u, v tale che la linea s_1 sia una linea $u = u_0$ del sistema, e così, se le formole di trasformazione sono $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, avremo

$$\int_{C_1} f(x, y) dC_1 = \int_{C_1} F(u, v) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right| du\, dv.$$

Allora se esiste un intorno della linea s, cioè della linea $u = u_0$, tale che per tutti i punti di esso, esclusa la linea s, sia

$$\left| F(u, v) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) (u - u_0)^{\mu} \right| < A,$$

dove $0 < \mu < 1$, la funzione è integrabile in C.

Invero se indichiamo con τ_1 la parte di C limitata dalle curve $u = u_1$, $u = u_2$, tali che comprendano tra loro la curva $u = u_0$, avremo

$$\left| \int_{\tau_1} f(x, y) d\tau_1 \right| \leq \int_{\tau_1} \left| F(u, v) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) \right| du\, dv < A \int_{v_1}^{v_2} dv \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{(u - u_0)^{\mu}}$$

$$= \frac{(v_2 - v_1) A}{1 - \mu} \left[(u_2 - u_0)^{1-\mu} - (u_1 - u_0)^{1-\mu} \right],$$

quantità che può rendersi minore di qualunque quantità positiva ε fissata fissando u_2 sufficientemente vicino a u_0 e per tutti i valori di u_1 compresi tra u_0 e u_2. Da ciò si riconoscerà, in modo analogo a quello tenuto nel numero precedente, la integrabilità di $f(x, y)$ in C.

Se poi $F(u, v)$ non cambia segno in un intorno della linea s, e risulta in esso

$$\left| F(u, v)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)(u - u_0)^{\mu} \right| > A,$$

dove $\mu \geqq 1$, si vedrà in modo analogo, che la $f(x, y)$ non è integrabile in C.

Esempi

1) La funzione $\dfrac{1}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$ è integrabile nel circolo col centro nell' origine delle coordinate e di raggio r, quantunque diventi infinita sul contorno del campo di integrazione. Invero, passando dalle coordinate cartesiane alle polari ρ, θ la linea s nella quale diviene infinita la funzione integranda è la linea $\rho = r$, ed abbiamo, per $\rho \leqq r$,

$$\rho\sqrt{r - \rho}\,\frac{1}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho + r}} < \sqrt{r}.$$

Si vede poi subito che

$$\int_C \frac{dC}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = 2\pi r.$$

La funzione $\dfrac{1}{r^2 - x^2 - y^2}$ non è integrabile in qualunque campo cui appartenga totalmente o in parte il circolo $x^2 + y^2 = r^2$, perchè se $x^2 + y^2 \leqq r^2$ la nostra funzione è sempre positiva, e sempre negativa se $x^2 + y^2 > r^2$, e

$$\rho(r - \rho)\frac{1}{r^2 - \rho^2} = \frac{\rho}{\rho + r} > \begin{cases} \dfrac{\rho_0}{2r} & \text{se} \quad \rho_0 < \rho < r \\[2ex] \dfrac{\rho_0}{2\rho_1} & \text{»} \quad \rho_0 < r < \rho < \rho_1. \end{cases}$$

2) La funzione $\dfrac{1}{(y^2 - 2px)^{\mu}}$ è o non è integrabile in un campo cui appartenga una parte della parabola $y^2 = 2px$, secondochè $\mu < 1$, o $\mu > 1$.

Ponendo $x = v$, $y^2 = 2uv$, si passa dal sistema cartesiano al sistema u, v, pel quale le linee $v =$ cost sono rette parallele all'asse delle x, e le linee $u =$ cost sono parabole di cui fa parte la parabola $y^2 = 2px$, corrispondendo questa a $u = p$. Osservando che ora è

$$\left|F(u,v)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)(u-p)^{\mu}\right| = \left|\frac{1}{(2uv-2pv)^{\mu}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{v}{u}}\right)(u-p)^{\mu}\right|$$

$$= \frac{1}{2^{\mu}\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{u}\,v^{\mu-\frac{1}{2}}}$$

si riconoscerà facilmente quanto abbiamo asserito.

Così ad esempio se il campo C è la parte di piano al disopra dell'asse delle x compresa tra la parabola $y^2 = 2px$, l'asse delle x e la retta $x = a$, dove supponiamo $p > 0$, $a > 0$, è

$$\int_C \frac{dC}{\sqrt{2px - y^2}} = \frac{a\pi}{2}.$$

116. Relativamente agli integrali doppi in un campo che si estende all'infinito, o campo infinito, faremo queste poche considerazioni.

Ricordiamo che (vol. I n.° 73 pag. 109) intendiamo per campo infinito un campo tale che descritto col centro in un suo punto un circolo di raggio comunque grande, vi è sempre qualche punto del campo fuori del circolo.

Il campo infinito C lo assumeremo come limite di un campo finito C_1 che secondo una certa legge varia in guisa da tendere a divenire il campo C, ciò che potrà realizzarsi, supposte le linee del contorno di C_1 determinate da uno o più parametri, facendo crescere indefinitamente alcuni o tutti i parametri, o facendoli avvicinare a certi determinati valori. Così ad es.: tutto il piano potremo concepirlo come limite di un rettangolo i cui lati crescono indefinitamente comunque oppure con una certa legge, od anche come il limite di un circolo di raggio indefinitamente crescente e di centro fisso, e ciò a seconda del problema che si tratta.

Allora, supposto che esista l'integrale $\int_{C_1} f(x,y)\,dC_1$, per C_1 tanto grande diventi C_1 secondo la legge stabilita e che esista il limite di questo integrale, quando i parametri che fissano il contorno di C_1 va-

ıo nel modo sopra indicato, poniamo per definizione

$$\int_C f(x, y)\, dC = \lim \int_{C_1} f(x, y)\, dC_1.$$

Se poi, per la natura del problema, il campo C dovesse consi-
ırsi come limite di un campo finito qualunque C_1 comunque ten-
ıte a divenire C, ed esistesse $\int_{C_1} f(x, y)\, dC_1$ qualunque sia C_1 e co-
ınque grande, ed esistesse un unico limite di questo integrale per
ılunque C_1 comunque tendente a C, questo limite lo assumeremo
me $\int_C f(x, y)\, dC$. Notiamo che propriamente questa sarebbe la defi-
ıione di integrale doppio esteso ad un campo infinito, che corri-
onderebbe a quella data per gli integrali di una funzione ad una
riabile estesi ad un intervallo infinito.

ESEMPI

.) Il campo infinito C sia la parte del piano limitata dalle parti
ısitive degli assi delle ascisse e delle ordinate considerato come li-
ite del rettangolo formato dalle rette $x = 0$, $y = 0$, $x = a$, $y = b$.
ıando a, b crescono comunque. Avremo allora

$$\int_C \frac{dC}{(1 + x^2 + y^2)^3} = \lim_{\substack{a=\infty \\ b=\infty}} \int_0^a dx \int_0^b \frac{dy}{\sqrt{(1 + x^2 + y^2)^3}} = \lim \int_0^a \frac{b\, dx}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2 + b^2}}$$

$$= \lim \operatorname{arc\,tg} \frac{ab}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} = \lim \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2 b^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}}} = \frac{\pi}{2}.$$

La stessa parte del piano possiamo considerarla come limite di
n quarto di circolo di raggio r col centro nell'origine delle coor-
linate, quando r cresce indefinitamente. Chiamandola allora C' avremo,
ısando le coordinate polari,

$$\int_{C'} \frac{dC'}{(1 + x^2 + y^2)^3} = \lim_{r=\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^r \frac{\rho\, d\rho}{(1 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{r=\infty} \frac{\pi}{2} \frac{r}{\sqrt{1 + r^2}} = \frac{\pi}{2}$$

2) Consideriamo ancora il campo precedente C. Avremo

$$\int_C \operatorname{sen}(x^2+y^2)\,dC = \lim_{\substack{a=\infty\\ b=\infty}} \int_0^a dx \int_0^b \operatorname{sen}(x^2+y^2)\,dy$$

$$= \lim \left[\int_0^a \operatorname{sen}(x^2)dx \int_0^b \cos(y^2)dy + \int_0^a \cos(x^2)\,dx \int_0^b \operatorname{sen}(y^2)dy \right] = \frac{\pi}{4}$$

(vedi n. 98).

Si consideri invece la stessa parte del piano come limite di un quarto C_1 di circolo di raggio r col centro nell' origine, quando r cresce indefinitamente, cioè sia il precedente campo infinito C'. Allora la stessa funzione $\operatorname{sen}(x^2+y^2)$ non è integrabile in C', perchè, usando le coordinate polari, è

$$\int_{C_1} \operatorname{sen}(x^2+y^2)\,dC_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^r \rho \operatorname{sen}(\rho^2)\,d\rho = \frac{\pi}{2}\int_0^r \rho \operatorname{sen}(\rho^2)\,d\rho$$

$$= \frac{\pi}{4}\,[1-\cos(r^2)],$$

che non ha limite determinato per r crescente indefinitamente.

3) Il campo infinito C sia la parte del piano al disopra dell' asse delle x limitata dall'asse delle x e dalla parabola $y^2 = 2px$. considerato come limite del campo C_1 compreso tra il ramo superiore della parabola l' asse delle x e la retta $x = a$, quando a cresce indefinitamente.

Avremo

$$\int_C \frac{y\,dC}{(1+x^2+y^2)^2} = \lim_{a=\infty} \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{2px}} \frac{y\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$= \lim_{a=\infty} \left[\frac{1}{2}\int_0^a \frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{2}\int_0^a \frac{dx}{x^2+2px+1} \right] = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\lim_{a=\infty}\int_0^a \frac{\quad}{x^2+2px+1}$$

e perciò (Vedi es.: 2 a pag. 455, vol. I)

$$\int \frac{y\,dC}{(1+x^2+y^2)^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{1-p^2}}\left[\dfrac{\pi}{2}(\sqrt{1-p^2}-1)+\operatorname{arc\,sen} p\right] & \text{se } p<1 \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right) & \text{» } p=1 \\ \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{p^2-1}}\log(p-\sqrt{p^2-1})\right] & \text{» } p>1. \end{cases}$$

ESERCIZI

1. Il campo C sia costituito dai valori di x, y pei quali è $x^2+y^2 \leq r^2$; allora è

$$\int_C \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,dC = \pi r^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

2. Campo C: valori positivi o nulli di x, y pei quali $x^2+y^2 \leq b^2$, $x^2+y^2 \geq a^2$, $a<b$. Se n è intero positivo abbiamo

$$\int x^n \log(x^2+y^2)\,dC = \begin{cases} \dfrac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots(n+2)}\pi\left(\dfrac{a^{n+2}-b^{n+2}}{n+2}+b^{n+2}\log b-a^{n+2}\log a\right) & \text{per } n \text{ pari} \\ 2\dfrac{2.4.6\ldots(n-1)}{3.5\ldots(n+2)}\left(\dfrac{a^{n+2}-b^{n+2}}{n+2}+b^{n+2}\log b-a^{n+2}\log a\right) & \text{per } n \text{ dispari.} \end{cases}$$

3. Il campo C sia la parte del piano compresa tra le due parabole $y^2=2px$, $x^2=2py$;

$$\int_C xy\,dC = \frac{5}{16}p^4.$$

4. Campo C sia la parte del piano limitata dalle curve $y^2=2px$, $x^2+y^2-4px=0$, $x^2+y^2-4px-3p^2=0$;

$$\int_C x\,dC = 2p^3\left(\frac{88}{15}+\pi\right).$$

5. Campo C parte del piano tra rette $x=0, y=x, x+y=1$:

$$\int_C y\sqrt{(x+y)^4+y^2}\,dC=\frac{1}{6720}(225\sqrt{5}-319)$$

(si ponga $x+y=u$, $y=uv$).

6. Si provi che

$$\int_0^a dx\int_0^b f(x,y)dy=\int_0^{\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}} d\theta\int_0^{\frac{a}{\cos\theta}} f(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta)\rho d\rho+\int_{\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{b}{\operatorname{sen}\theta}} f(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta)\rho d\rho.$$

7. Il campo C sia il rettangolo formato dagli assi e dalle rette $x=a$, $y=b$, da cui si tolga il rettangolo formato dagli assi e dalle rette $x=\frac{a}{m}$, $y=\frac{b}{m}$ $(m>1)$;

$$\int_C \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dC=\frac{m^2-1}{m^2}\left(a^2\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}-b^2\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}\right).$$

8. Campo C: valori positivi o nulli di x, y pei quali $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$.

$$\int_C xy\zeta\sqrt{1+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2}dC=\frac{ab}{15c(a^2-b^2)}\left[\frac{a^3(c^5-b^5)}{c^2-b^2}-\frac{b^3(c^5-a^5)}{c^2-a^2}\right],$$

essendo ζ data dalla equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1$$

(si ponga $x=a\operatorname{sen}\theta\cos\varphi$, $y=b\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$ e si prendano θ, φ per nuove variabili).

9. Campo C: valori positivi o nulli di x, y pei quali $x+y\leq k$, $k>0$.

$$\int_C f(x+y)x^{m-1}y^{n-1}dC=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\int_0^k f(\zeta)\zeta^{m+n-1}d\zeta,\ m>0,\ n>0.$$

Ad es.:

$$\int_C x^{m-1}y^{n-1}dC=k^{m+n}\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n+1)}.$$

10. Campo C: valori positivi o nulli di x, y pei quali è $\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q \leq k$, $p > 0$, $q > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $k > 0$.

$$\int_C f\left[\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q\right] x^{m-1} y^{n-1}\, dC$$

$$= \frac{a^m b^n}{pq} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{p}\right)\Gamma\left(\frac{n}{q}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{p}+\frac{n}{p}\right)} \int_0^k f(z) z^{\frac{m}{p}+\frac{n}{q}-1}\, dz, \quad m > 0, n > 0.$$

Ad es.: se il campo C è la parte del piano limitata dalla ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ed m, n sono interi positivi, è

$$\int_C x^{2m-1} y^{2n-1}\, dC = \frac{a^{2n} b^{2n}}{4} \frac{1.2..(m-1)\, 1.2..(n-1)}{1.2..(m+n)}.$$

11. Campo C limitato dal circolo $x^2 + y^2 - r^2$.

$$\int_C f(ax+by)\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, dC = \frac{\pi}{2} \int_{-r}^{r} f(x_1\sqrt{a^2+b^2})(r^2 - x_1^2) dx_1.$$

12. Campo C: valori positivi o nulli di x, y pei quali $x^2 + y^2 \leq 1$.

$$\int_C \text{arc sen} \frac{x+y}{\sqrt{2}}\, dC = \frac{\pi}{8}\left(\frac{3}{4}\pi - 1\right).$$

13. Sia la $f(x, y)$ finita e integrabile in un campo C. Il rettangolo determinato dalle rette $x = a$, $x = b$, $y = \alpha$, $y = \beta$ sia interno al campo. Si dimostri che l'integrale

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy,$$

considerato come una funzione $\varphi(b, \beta)$ dei limiti superiori b, β, è fun-

zione continua delle variabili b, β. Inoltre, se $f(x, y)$ è continua in C è

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial b\, \partial \beta} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta\, \partial b} = f(b, \beta).$$

14. Se la funzione $f(x)$ è integrabile nell'intervallo (a, b), la $\varphi(x)$ nell'intervallo (α, β), il prodotto dei due integrali $\int_a^b f(x)dx$, $\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx$ si può trasformare nell'integrale doppio della funzione $f(x) \cdot \varphi(y)$ esteso al campo rettangolare C, determinato dalle rette $x = a$, $x = b$, $y = \alpha$, $y = \beta$ cioè

$$\left(\int_a^b f(x)\, dx\right)\left(\int_\alpha^\beta \varphi(x)\, dx\right) = \int_C f(x)\, \varphi(y)\, dC.$$

15. Il campo C sia costituito dai valori di x, y, pei quali $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x^2 + y^2 \leqq 1$. Si consideri $\int_C \frac{dC}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$.

Si ponga

$$x = \operatorname{sen} \varphi \sqrt{1 - m^2 \operatorname{sen}^2 \theta},\ y = \cos \varphi \cos \theta,$$

e si provi così che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m^2 \cos^2 \theta + n^2 \cos^2 \varphi}{\sqrt{1 - m^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\, \sqrt{1 - n^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}\, d\theta\, d\varphi = \frac{\pi}{2},$$

dove $m^2 + n^2 = 1$.

16. Posto

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}},\quad E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta,$$

dove $k^2 \leqq 1$, si provi che

$$F(k)\, E(k') + F(k')\, E(k) - F(k)\, F(k') = \frac{\pi}{2},$$

dove $k^2 + k'^2 = 1$. (Legendre).

17. Sia il campo infinito C limitato dal ramo superiore della iperbole $xy = k$, (k positivo), considerato come limite del campo compreso tra il detto ramo di iperbole e le rette $x = a$, $y = b$, quando a, b crescono indefinitamente comunque. Allora

$$\int_C \frac{dC}{y^2(1+x^2)} = \frac{1}{2k}.$$

Applicazione degli integrali doppi allo spianamento delle superficie, ed alla cubatura dei solidi.

117. Indicato con C il campo limitato da una o più linee, si intende subito che l'area A del campo C è $\iint_C dx\,dy$; da questa formola ricaviamo subito la espressione, già trovata, per l'area compresa tra una curva $y = f(x)$, l'asse delle x, e due ordinate corrispondenti a due ascisse a, b, giacchè per questo campo C abbiamo

$$\iint_C dx\,dy = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Gioverà qualche volta servirsi della formola $\iint_C dx\,dy$ per calcolare l'area A. Ad esempio, si voglia l'area A della parte di piano al disopra dell'asse delle x, compresa tra i circoli $x^2 + y^2 = bx$, $x^2 + y^2 = ax$, e la retta $y = c$, dove $a < b$, $0 < c < \frac{a}{2}$.

Avrêmo $A = \iint_C dx\,dy$; passando dalle coordinate cartesiane alle polari colle formole $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\,\text{sen}\,\theta$, avremo, come facilmente si riconosce,

$$A = \int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta \int_{\frac{c}{\text{sen}\,\theta}}^{b\cos\theta} \rho\,d\rho + \int_{\theta_1}^{\theta_3} d\theta \int_{a\cos\theta}^{b\cos\theta} \rho\,d\rho + \int_{\theta_3}^{\theta_2} d\theta \int_{\frac{c}{\text{sen}\,\theta}}^{b\cos\theta} \rho\,d\rho,$$

dove θ_0, θ_2 indicano gli angoli polari dei punti in cui la retta $y = c$ incontra il circolo di raggio $\frac{b}{2}$; θ_1, θ_3 gli angoli polari dei punti in cui incontra il circolo di raggio $\frac{a}{2}$, essendo così

$$\operatorname{sen} 2\theta_0 = \operatorname{sen} 2\theta_2 = \frac{2c}{b}, \quad \theta_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{2c}{b}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_0,$$

$$\operatorname{sen} 2\theta_1 = \operatorname{sen} 2\theta_3 = \frac{2c}{a}, \quad \theta_1 = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{2c}{a}, \quad \theta_3 = \frac{\pi}{2} - \theta_1;$$

cosichè

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left(b^2 \cos^2 \theta - \frac{c^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} \right) d\theta + \frac{b^2 - a^2}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_1} \cos^2 \theta d\theta$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\theta_3}^{\theta_2} \left(b^2 \cos^2 \theta - \frac{c^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} \right) d\theta$$

$$= \frac{b^2}{4} (\theta_1 - \theta_0 + \theta_2 - \theta_3) + \frac{b^2 - a^2}{4} (\theta_3 - \theta_1) + \frac{c^2}{2} (\cot \theta_1 - \cot \theta_0 + \cot \theta_2 - \cot \theta_3)$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{8} \pi - \frac{b^2}{4} \operatorname{arc\,sen} \frac{2c}{b} + \frac{a^2}{4} \operatorname{arc\,sen} \frac{2c}{a} + \frac{c}{2} \left(\sqrt{a^2 - 4c^2} - \sqrt{b^2 - 4c^2} \right).$$

118. Sia una superficie rappresentata in coordinate cartesiane ortogonali dalla equazione $z = z(x, y)$, dove $z(x, y)$ è funzione univalente con derivate parziali continue $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ per tutti i punti di un campo C_1 sul piano delle (x, y). Consideriamo sulla superficie una parte S limitata da una o più linee senza nodi tracciate sulla superficie stessa. Questa parte S si proietti sul piano delle x, y sopra un campo C appartenente a C_1. Scomponiamo comunque C in parti h_s e prendiamo in h_s un punto qualunque m_s, cui corrisponderanno per z, p, q valori che indicheremo con z_s, p_s, q_s. La perpendicolare al piano delle x, y innalzata da m_s incontrerà la superficie in un punto n_s, nel quale condurremo il piano tangente alla superficie. Il cilindro che ha per base il contorno di h_s e per generatrici rette parallele all'asse delle z, taglia da questo piano tangente una parte k_s che si

proietta su h_s. Fatta questa operazione per tutti gli elementi h_s del campo C consideriamo la somma Σk_s. Ora, se una quantità A finita gode della proprietà che, dato σ, esista un numero δ tale che, per qualunque scomposizione del campo C in parti h_s rinchiudibili in un circolo di raggio δ, e qualunque sia la scelta del punto m_s in h_s, risulti $|A - \Sigma k_s| < \sigma$, diremo che A è il limite di Σk_s, quando le h_s, e quindi le k_s, impiccoliscono indefinitamente; e poniamo per definizione che si intende per *area* della parte S di superficie questo limite A. Calcolare il limite di Σk_s dicesi *spianare* o *quadrare* la parte S di superficie.

Ma questo limite effettivamente esiste. Invero è $h_s = k_s \cos \gamma_s$, indicando con γ_s l'angolo che la normale alla superficie nel punto n_s fa coll'asse delle z, cioè è $k_s = h_s \sqrt{1 + p_s^2 + q_s^2}$, cosichè $\Sigma k_s = \Sigma h_s \sqrt{1 + p_s^2 + q_s^2}$ ed il limite del secondo membro è l'$\int_C dC \sqrt{1 + p^2 + q^2}$, e quindi

$$A = \int_C dC \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

la quale formola ci insegna così a calcolare l'area A della parte S di superficie, che si proietta sul campo C. Se si volesse spianare una parte S di superficie per la quale la z non fosse funzione univalente di x, y, si spezzerebbe questa parte in porzioni S_1, S_2.... per le quali si avesse $z = z_1(x, y)$, $z = z_2(x, y)$,... dove le $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$,.. fossero funzioni univalenti, ed allora, indicate con A_1, A_2... le aree di S_1, S_2,.., si avrebbe $A = A_1 + A_2 + \ldots$

119. Usando, per integrare, le coordinate cartesiane ortogonali x, y, abbiamo

$$A = \iint_C dx\, dy \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Passando dalle variabili x, y ad un altro sistema di variabili u, v colle formole $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, avremo

$$A = \iint du\, dv \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right| \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

dove i valori di p, q si ricavano dalle formole

$$\frac{\partial z}{\partial u} = p\frac{\partial x}{\partial u} + q\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = p\frac{\partial x}{\partial v} + q\frac{\partial y}{\partial v},$$

dalle quali

$$p\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right),$$

$$q\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

ed in conseguenza

$$(1)\quad A = \iint du\,dv\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2}.$$

Ad esempio se u, v sono le coordinate polari ρ, θ nel piano delle x, y, cosichè sia $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$, avremo

$$(2)\qquad A = \iint d\rho\,d\theta\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2},$$

dove i valori $\frac{\partial z}{\partial \theta}$, $\frac{\partial z}{\partial \rho}$ sono ricavati dalla $z = z(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)$.

Supponiamo che si prendano per variabili u, v le θ, φ del sistema di coordinate polari ρ, θ, φ nello spazio, tali cioè che (Vedi n.° 32)

$$x = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi, \quad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi, \quad z = \rho\cos\theta:$$

allora nel calcolare le derivate di x, y, z rapporto a θ, φ da sostituirsi nella (1) dovremo considerare ρ come funzione di θ, φ definita dalla equazione della superficie in coordinate polari, cosiche

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi\frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \rho\cos\theta\cos\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \cos\theta\frac{\partial \rho}{\partial \theta} - \rho\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} - \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi,\quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + \rho\operatorname{sen}\theta\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \cos\theta\,\frac{\partial \rho}{\partial \varphi},$$

e da queste

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \rho\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta\right),$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial z}{\partial \varphi} - \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial z}{\partial \theta} = -\rho\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta\right) + \rho\operatorname{sen}\varphi\,\frac{\partial \rho}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \varphi} - \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \theta} = -\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta\right) - \rho\cos\varphi\,\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}$$

ed in conseguenza

$$(3)\qquad A = \iint \rho\, d\theta\, d\varphi \sqrt{\left[\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2\right]\operatorname{sen}^2\theta + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}\right)^2},$$

l'integrazione essendo estesa in modo da esaurire la parte S di superficie che si vuole spianare.

In modo analogo si procederebbe se si scegliessero per variabili ρ, θ, oppure ρ, φ.

120. Affinchè la definizione di area di una parte di superficie data al n. 118, e dovuta ad Hermite, riesca completamente soddisfacente bisogna far vedere che il valore di A si mantiene sempre lo stesso qualunque sia la posizione del piano delle x, y, sul quale si proietta la parte di superficie che si vuole spianare. Ora questo si vede facilmente nel modo seguente.

Riferiamo la nostra superficie ad un nuovo sistema di assi ortogonali colla stessa origine dei primitivi; indicate con x', y', z' le nuove coordinate abbiamo

$$x = ax' + a'y' + a''z',$$
$$y = bx' + b'y' + b''z',$$
$$z = cx' + c'y' + c''z',$$

dove a, b, c sono i coseni degli angoli che l'asse $0x'$ fa cogli assi

$0x$, $0y$, $0z$; a', b', c' e a'', b'', c'' sono le quantità analoghe relative agli assi $0y'$, $0z'$.

Siano S_1, S_2,... le parti di S che si proiettano sopra i campi C'_1, C'_2.... sul piano delle x', y', e sui campi C_1, C_2.... sul piano delle x, y, in modo che la corrispondente ordinata riesca funzione univalente delle x', y' o delle x, y.

Abbiamo (n. 119)

$$\iint_{C_1} dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2} =$$

$$\iint_{C'_1} dx'\,dy'\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial y}{\partial y'}-\frac{\partial x}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x'}\frac{\partial z}{\partial y'}-\frac{\partial y}{\partial y'}\frac{\partial z}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x'}\frac{\partial x}{\partial y'}-\frac{\partial z}{\partial y'}\frac{\partial x}{\partial x'}\right)^2}.$$

Osservando che nel calcolare le derivate di x, y, z rapporto ad x', y' dobbiamo considerare z' come funzione di x', y' data dall'equazione della superficie nel nuovo sistema di assi, abbiamo

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = a + a''p',\ \frac{\partial y}{\partial x'} = b + b''p',\ \frac{\partial z}{\partial x'} = c + c''p',$$

$$\frac{\partial x}{\partial y'} = a' + a''q',\ \frac{\partial y}{\partial y'} = b' + b''q,\ \frac{\partial z}{\partial y'} = c' + c''q',$$

dove p', q' indicano le derivate di z' rapporto ad x' e ad y'.

Perciò

$$\frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial y}{\partial y'}-\frac{\partial x}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial x'} = (ab'-a'b)+(a''b'-a'b'')p'+(ab''-a''b)q',$$

ovvero, avuto riguardo alle relazioni note tra le quantità a, b, c, a', b',

$$\frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial y}{\partial y'}-\frac{\partial x}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial x'} = c''-cp'-c'q';$$

ed analogamente

$$\frac{\partial y}{\partial x'}\frac{\partial z}{\partial y'}-\frac{\partial y}{\partial y'}\frac{\partial z}{\partial x'} = a''-ap'-a'q',\ \frac{\partial z}{\partial x'}\frac{\partial x}{\partial y'}-\frac{\partial z}{\partial y'}\frac{\partial x}{\partial x'} = b''-bp'-b'q'.$$

ed in conseguenza, avuto riguardo alle menzionate relazioni,

$$\iint_{C_1} dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2} = \iint_{C'_1} dx'\,dy'\sqrt{1+p'^2+q'^2}.$$

In modo analogo si prova che

$$\iint_{C_2} dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2} = \iint_{C'_2} dx'\,dy'\sqrt{1+p'^2+q'^2},\ldots,$$

cosichè

$$A = \iint_{C'_1} dx'\,dy'\sqrt{1+p'^2+q'^2} + \iint_{C'_2} dy'\,dy'\sqrt{1+p'^2+q'^2} + \ldots,$$

come volevasi dimostrare.

Si intende poi, senz'altro, come uno spostamento del piano delle x', y' parallelamente a se stesso, non alteri la formola precedente.

121. Applichiamo ad alcuni

ESEMPI

1) Si voglia l'area A della parte di sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

staccata dal cilindro

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2y^2}{a^2} = 1, \qquad b > 1.$$

Abbiamo $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, dove prenderemo pel radicale il segno $+$, $p = \dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, $q = \dfrac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$,

$\sqrt{1+p^2+q^2} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, e quindi, come si vede facilmente,

$$A = 8a\int_0^a dx \int_0^{\frac{1}{b}\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = 8a \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{b}\int_0^a dx = 8a^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{b}.$$

2) Si voglia calcolare l'area A della parte di cilindro

$$z^2 + (x\cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha)^2 - a^2 = 0\,,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\,,$$

compresa nel primo ottante dei piani coordinati.

L'asse del cilindro è la retta $x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha = 0$, $z = 0$, ed il cilindro taglia il piano $z = 0$ lungo le due rette

$$x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha = \pm a;$$

cosichè nel calcolo dell'integrale doppio, che esprime l'area richiesta, i limiti rispetto ad x saranno 0 e $\frac{a}{\cos \alpha}$ e rispetto ad y, 0 e $\frac{a - x \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$; e perciò, osservando che

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - (x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha)^2}},$$

abbiamo

$$A = a \int_0^{\frac{a}{\cos \alpha}} dx \int_0^{\frac{a - x \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - (x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha)^2}}$$

$$= \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} \int_0^{\frac{a}{\cos \alpha}} dx \left[\operatorname{arc\,sen} \frac{x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha}{a} \right]_0^{\frac{a - x \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}}$$

$$= \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} \int_0^{\frac{a}{\cos \alpha}} dx \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sen} \frac{x \cos \alpha}{a} \right]$$

$$= \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} \left[\frac{\pi x}{2} - x \operatorname{arc\,sen} \frac{x \cos \alpha}{a} - \frac{1}{\cos \alpha} \sqrt{a^2 - x^2 \cos^2 \alpha} \right]_0^{\frac{a}{\cos \alpha}}$$

$$= \frac{a^2}{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}.$$

3) *Problema del* Viviani. — Si voglia spianare la parte di superficie della sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

staccata dal cilindro $x^2+y^2=ax$. Usando le coordinate polari $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$ e servendoci della formola (2) al n. 119, osservando che $z=\sqrt{a^2-\rho^2}$, abbiamo

$$A=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} d\theta \sqrt{\rho^2+\rho^2\frac{\rho^2}{a^2-\rho^2}}=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}=4a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

Considerando l'emisfera penetrata dal cilindro, l'area della parte che rimane è $2\pi a^2-4a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=4a^2$.

Questa formola risolve il problema, proposto dal Viviani nel 1692, di aprire quattro finestre uguali in una volta emisferica in guisa che la parte rimanente della volta fosse perfettamente quadrabile.

4) Si voglia spianare la parte, contenuta al disopra del piano $z=0$ e a destra del piano $x=0$, della superficie

$$(x^2+y^2+z^2)^2=2a^2(x^2-y^2).$$

Questa superficie è tagliata dal piano $z=0$ lungo la lemniscata $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$. Unito un punto M della lemniscata coll'origine 0 e fatto passare per 0M e per l'asse delle z un piano, su questo si descriva un circolo sul diametro 0M; la nostra superficie è il luogo geometrico di questi circoli.

Per spianare la nostra parte di superficie giova usare le coordinate polari nello spazio

$$x=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi,\ y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ z=\rho\cos\theta,$$

cosichè l'equazione della superficie diviene

$$\rho=a\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\sqrt{\cos 2\varphi},$$

per cui

$$\sqrt{\left[\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2\right]\mathrm{sen}^2\theta+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}a\,\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{\cos 2\varphi}},$$

ed in conseguenza (Formola (3) n. 119)

$$A = 2a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \theta d\theta = \frac{a^2 \pi^2}{4}.$$

5) *Superficie di rotazione.* Si voglia spianare la zona compresa tra due piani $x = a$, $x = b$ della superficie di rotazione generata dalla curva $Y = f(X)$ ruotante intorno all'asse delle x. Osservando che l'equazione della superficie è $z^2 = f(x)^2 - y^2$, e quindi

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{f(x)^2 - y^2}},$$

abbiamo subito

$$A = 4 \int_a^b dx\, f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} \int_0^{f(x)} \frac{dx}{\sqrt{f(x)^2 - y^2}} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

ed il problema generale è ridotto ad una sola quadratura. Si può osservare che $dx\sqrt{1 + f'(x)^2}$ è il differenziale ds di arco di curva meridiana $y = f(x)$, cosichè la formola precedente può anche compendiarsi nella $A = 2\pi \int_a^b y ds$.

Ad esempio, consideriamo l'ellissoide di rotazione generato, nel modo predetto, dalla ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a > b.$$

Posto $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = e$, abbiamo $ds = \frac{b\sqrt{a^2 - e^2x^2}}{ay} dx$ e quindi per l'area A della zona compresa tra i due piani $x = 0$, $x = x$, si trova

$$A = \frac{2\pi b}{a} \int_0^x dx \sqrt{a^2 - e^2x^2} = \frac{\pi b}{a} \left[x\sqrt{a^2 - e^2x^2} + \frac{a^2}{e} \operatorname{arc\,sen} \frac{e}{\ }\right.$$

Facendo $x = a$ abbiamo l'area della mezza ellissoide, cioè $\pi ab\left(\sqrt{1-e^2} + \frac{1}{e} \text{ arc sen } e\right)$.

Se $a < b$, posto $\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} = e$, è $ds = dx \frac{b}{a^2 y} \sqrt{a^4 + b^2 e^2 x^2}$, e quindi

$$A = \frac{2\pi b}{a^2} \int_0^x dx \sqrt{a^4 + b^2 e^2 x^2}$$

$$= \frac{2\pi b}{a^2} \frac{1}{2} \left[x\sqrt{a^4 + b^2 e^2 x^2} + \frac{a^4}{be} \log(b^2 e^2 x + be\sqrt{a^4 + b^2 e^2 x^2} \right]_0^x$$

$$= \frac{\pi b}{a^2} \left[x\sqrt{a^4 + b^2 e^2 x^2} + \frac{a^4}{be} \log \frac{bex + \sqrt{a^4 + b^2 e^2 x^2}}{a^2} \right].$$

Per $x = a$, si ha l'area della semiellissoide, cioè

$$\pi \left[b^2 + \frac{a^2}{e} \log \frac{b(1+e)}{a} \right].$$

122. Sia $z = z(x, y)$ l'equazione di una superficie, dove $z(x, y)$ è funzione univalente continua di x, y pei punti d'un campo C_1. Sia C un campo appartenente a C_1; scomponiamo C in parti h_s e, preso in h_s un punto qualunque m_s, sia z_s il valore di z nel punto m_s. Consideriamo la somma $\Sigma z_s h_s$; il limite di questa somma, all'impiccolire indefinitamente delle h_s, cioè l'$\int_C z dC$, definiamo come il volume del solido o corpo compreso tra la superficie $z = z(x, y)$, il piano $z = 0$ ed il cilindro colle generatrici parallele all'asse delle z avente per base il contorno del campo C; calcolare tale integrale dicesi *cubare* il solido.

È evidente l'analogia tra questa definizione di volume e quella di area compresa tra una curva piana, l'asse delle x e due ordinate corrispondenti a due ascisse.

Si vede subito, ragionando in modo analogo, come debbasi definire il volume del solido determinato da una o più superficie.

Integrali tripli — Cubatura dei solidi.

123. Sia $u = f(x, y, z)$ funzione univalente finita dei punti (x, y, z) di un campo finito T, a tre dimensioni. Decomponiamo T in n parti od elementi, i cui volumi, diversi da zero, indicheremo con $h_1, h_2, \ldots h_n$, notando che chiameremo questi elementi, gli elementi $h_1, h_2, \ldots h_n$. Formiamo la somma $S = \Sigma u_s h_s$, ove u_s indica un valore qualunque compreso tra il limite inferiore e il superiore (questi inclusi) dei valori che $f(x, y, z)$ prende nell'elemento h_s.

Noi diremo che, col diminuire indefinitamente di tutti gli elementi h_s, S ha un limite L, quando, ad ogni numero positivo σ, anche comunque piccolo, corrisponde un numero positivo ε tale che, per qualunque scomposizione del campo T, per la quale gli elementi h_s siano ciascuno rinchiudibile entro una sfera di raggio ε, e qualunque sia la scelta dalle quantità u_s, risulti $|S - L| < \sigma$, e scriviamo allora $\lim S = L$.

Questo limite si chiama l'*integrale triplo definito*, o *integrale triplo*, o *integrale*, esteso al campo, o spazio T, e si indica coi simboli

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dT, \qquad \int_T f(x, y, z)\, dT.$$

La funzione dicesi integrabile nel campo T quando tal limite esiste.

S'intende, senz'altro, come qui valgano considerazioni perfettamente analoghe a quelle fatte per gli integrali doppi.

Si vedrebbe così come il calcolo di un integrale triplo, che si indica anche usualmente col simbolo

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

possa ridursi a tre successive integrazioni semplici.

Si vedrebbe pure come, pel cambiamento delle variabili di integrazione, valga la regola:

Per trasformare l'integrale

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

quando alle variabili x, y, z *si sostituiscano le* u, v, w *mediante le formole*

$$x = \varphi(u, v, w), \qquad y = \psi(u, v, w), \qquad z = \chi(u, v, w),$$

si trasformi la funzione integranda nelle nuove variabili, ed in luogo di dx dy dz *si sostituisca* du dv dw *moltiplicato pel valore assoluto del determinante Iacobiano*

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\varphi}{\partial w} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial w} \\ \frac{\partial\chi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial v} & \frac{\partial\chi}{\partial w} \end{vmatrix}$$

delle x, y, z *rispetto alle* u, v, w, *e si estenda l'integrale al campo* T, *avendosi così*

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_T f(\varphi, \psi, \chi)|\Delta|\, du\, dv\, dw.$$

ESEMPI

1) Essendo x, y, z coordinate cartesiane ortogonali, il campo T sia il parallelepipedo determinato dai piani $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = a$, $y = b$, $z = c$.

Allora abbiamo

$$\int_T f(x, y, z)\, dT = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c f(x, y, z)\, dz = \int_0^a dx \int_0^c dz \int_0^b f(x, y, z)\, dy$$

$$= \int_0^b dy \int_0^a dx \int_0^c f(x, y, z)\, dz = \dots$$

2) Il campo T sia costituito dai punti le cui coordinate x, y, z soddisfano alla relazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Allora

$$\int_T f(x,y,z)\,dT = \int_{-a}^{a} dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} f(x,y,z)\,dz$$

$$= \int_{-c}^{c} dz \int_{-\frac{a}{c}\sqrt{c^2-z^2}}^{\frac{a}{c}\sqrt{c^2-z^2}} dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}}} f(x,y,z)\,dy = \ldots.$$

Ad es.: se $f(x,y,z) = x^2$, è

$$\int_T x^2 dT = 8\int_0^a x^2 dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz$$

$$= 8c\int_0^a x^2 dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy = \frac{8cb\pi}{4a^2}\int_0^a x^2(a^2-x^2)\,dx = \frac{4a^3bc\pi}{15}.$$

3) Il campo T sia la parte di spazio limitata dal piano $z = h$ e dalla parte di superficie conica $x^2 + y^2 = \frac{r^2}{h^2} z^2$, che è al disopra del piano delle x, y. Vogliamo calcolare $\int_T (x^2+y^2)\,dT$.

Passiamo dalle coordinate x, y, z alle ρ, θ, z colle formole

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta, \quad z = z$$

(coordinate cilindriche). Allora

$$\int_T (x^2+y^2)\,dT = \int_T \rho^3 d\rho\, d\theta\, dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz \int_0^{\frac{rz}{h}} \rho^3 d\rho = \frac{r^4 h\pi}{10}.$$

4) Si voglia calcolare $I = \iiint e^{x^2+y^2+z^2} \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ esteso al campo limitato dalla sfera $x^2+y^2+z^2=r^2$. La funzione integranda è integrabile, quantunque diventi infinita nel centro della sfera. Passiamo dalle coordinate cartesiane alle polari ρ, θ, φ mediante le formole

$$z = \rho \cos\theta,\ x = \rho \operatorname{sen}\theta \cos\varphi,\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi.$$

Osservando che $\Delta = \rho^2 \operatorname{sen}\theta$, abbiamo

$$I = \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r} e^{\rho^2} \rho d\rho = 2\pi (e^{r^2} - 1).$$

124. Gli integrali tripli trovano immediata applicazione per la cubatura dei solidi, alla quale già precedentemente accennammo, giacchè il volume V di un campo T è $\iiint_T dx\,dy\,dz$. Una integrazione si effettua subito, ed il calcolo è ridotto a due integrazioni. Usando coordinate polari nello spazio, avremo

$$V = \iiint_T \rho^2 \operatorname{sen}\theta d\rho\, d\theta\, d\varphi.$$

Esempi

1) Si voglia il volume V del solido, al di sopra del piano $z=0$ e a destra del piano $x=0$, compreso tra il piano $y=c$ e i due cilindri $y^2=ax$, $y^2+z^2=a^2$, dove $a \geqq c$. Avremo

$$V = \int_0^c dy \int_0^{\frac{y^2}{a}} dx \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} dz = \int_0^c dy \sqrt{a^2-y^2} \int_0^{\frac{y^2}{a}} dx = \frac{1}{a} \int_0^c dy\, y^2 \sqrt{a^2-y^2}$$

$$= \frac{1}{8a} \left[a^4 \operatorname{arc\,sen} \frac{y}{a} + y(2y^2 - a^2) \sqrt{a^2-y^2} \right]_0^c$$

$$V = \frac{1}{8a}\left(a^4 \operatorname{arc\,sen} \frac{c}{a} + c(2c^2 - a^2)\sqrt{a^2 - c^2}\right);$$

per $c = a$, $V = \frac{a^3\pi}{16}$.

2) *Volume del solido del* Viviani. — Determiniamo il volume del solido che il cilindro $x^2 + y^2 = ax$ stacca dalla solidità della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Usando le coordinate cilindriche $z = z, x = \rho\cos\theta, y = \rho \operatorname{sen}\theta$, abbiamo subito

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \rho d\rho \int_0^{\sqrt{a^2-\rho^2}} dz = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \rho\sqrt{a^2 - \rho^2}\, d\rho$$

$$= -\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left[(a^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{a\cos\theta} = \frac{2}{3}\pi a^3 - \frac{4}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3\theta d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\pi a^3 + \frac{4}{3}a^3\left[\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}\pi a^3 - \frac{8}{9}a^3.$$

Il volume della parte di emisfera che rimane dopo averne tolta la parte staccata dal cilindro è perciò $\frac{8}{9}a^3$.

3) *Volume dei solidi di rotazione.* — Si voglia calcolare il volume V del solido compreso tra i piani $x = a$, $x = b$ e tra la superficie generata dalla rotazione, intorno all'asse delle x, della curva $y = f(x)$.

Osservando che l'equazione della superficie è $z^2 = \overline{f(x)}^2 - y^2$, abbiamo subito

$$V = 4\int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy \int_0^{\sqrt{\overline{f(x)}^2 - y^2}} dz = 4\int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy\sqrt{\overline{f(x)}^2 - y^2}$$

$$= 2\int_a^b dx \left[y\sqrt{\overline{f(x)}^2 - y^2} + \overline{f(x)}^2 \operatorname{arc\,sen}\frac{y}{f(x)}\right]_0^{f(x)} = \pi\int_a^b \overline{f(x)}^2 d$$

ed il problema è in ogni caso ridotto ad una quadratura.

Ad esempio, si voglia il volume generato dalla rotazione intorno all'asse delle x dell'area compresa tra l'asse delle x, la cicloide

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t),$$

e la ordinata y che corrisponde all'ascissa x e quindi al valore $t = t$; avremo

$$V = \pi \int_0^x y^2\, dx = \pi a^3 \int_0^t (1 - \cos t)^3\, dt = \pi a^3 \int_0^t (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\, dt$$

$$= \pi a^3 \left[t - 3 \operatorname{sen} t + \frac{3}{2} t + \frac{3}{4} \operatorname{sen} 2t - \operatorname{sen} t + \frac{\operatorname{sen}^3 t}{3} \right]_0^t$$

$$= \pi a^3 \left(\frac{5}{2} t - 4 \operatorname{sen} t + \frac{3}{4} \operatorname{sen} 2t + \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 t \right);$$

il volume totale del solido generato da un intero ramo di cicloide corrisponde a $t = 2\pi$, ed è $V = 5\pi^2 a^3$.

4) Si voglia il volume V del solido limitato dalla superficie

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Osservando che la superficie è incontrata dal piano $z = 0$ lungo la curva $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$, avremo $V = 8 \int\int_C z\, dx\, dy$ dove C indica il campo determinato dei valori positivi o nulli di x, y pei quali $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} \leq 1$.

Per integrare introduciamo le variabili u, v mediante le relazioni

$$x = a \operatorname{sen}^3 u \cos^3 v, \; y = b \operatorname{sen}^3 u \operatorname{sen}^3 v,$$

per cui $z = c \cos^3 u$. Osservando che

$$y = \frac{b}{a} x \operatorname{tg}^3 v, \; \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = \operatorname{sen}^2 u,$$

dalle quali risulta che le linee $v = costante$ sono rette uscenti dall' origine e le linee $u = costante$ sono linee analoghe alla

$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$, vediamo che i limiti delle integrazioni rispetto ad u e a v sono 0 e $\frac{\pi}{2}$; cosichè, essendo

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a\cos^3 v\,\mathrm{sen}^2 u\cos u & 3b\,\mathrm{sen}^3 v\,\mathrm{sen}^2 u\cos u \\ -3a\cos^2 v\,\mathrm{sen}\,v\,\mathrm{sen}^3 u & 3b\,\mathrm{sen}^2 v\cos v\,\mathrm{sen}^3 u \end{vmatrix}$$

$$=9ab\,\mathrm{sen}^2 v\cos^2 v\,\mathrm{sen}^5 u\cos u,$$

avremo

$$V=8.9\,abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sen}^2 v\cos^2 v\,dv\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sen}^5 u\cos^4 u\,du.$$

Ma (vedi eserc. 1 a pag. 182)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sen}^5 u\cos^4 u\,du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sen}^5 u(1-\mathrm{sen}^2 u)^2\,du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sen}^5 u\,(1-2\,\mathrm{sen}^2 u+\mathrm{sen}^4 u)\,du$$

$$=\frac{2.1}{3.5}-2.\frac{2.4.6}{3.5.7}+\frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}=\frac{8}{5.7.9},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sen}^2 v\cos^2 v\,dv=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sen}^2 v\,(1-\mathrm{sen}^2 v)\,dv=\frac{\pi}{4}-\frac{3}{2.4}\,\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{16},$$

e quindi $V=\frac{4}{35}\pi abc$.

Esercizi

1. $\iiint\frac{dx\,dy\,dz\cos\psi}{x^2+y^2+(z-a)^2}=\frac{4}{3}\,\frac{\pi r^2}{a^2}$, $a>r$, l' integrale essendo esteso ai punti (x, y, z) pei quali $x^2+y^2+z^2\leq r^2$, avendo indicato con ψ l'angolo che fa coll'asse delle z la retta che unisce i punti

$(0, 0, a)$, (x, y, z). (L'integrale rappresenta l'attrazione, secondo la legge di NEWTON, esercitata da una materia omogenea di densità *uno*, che riempia una sfera, sopra un punto materiale di massa *uno* esterno alla sfera).

2. Campo T costituito dai punti (x, y, z) pei quali $|z| \leq h$, $x^2+y^2 \leq r^2$:

$$\int_T \frac{(a-z)\,dT}{[x^2+y^2+(a-z)^2]^{\frac{3}{2}}} = 2\pi\left[\sqrt{r^2+(a-h)^2}-\sqrt{r^2+(a+h)^2}+2h\right], a > h,$$

(attrazione di un cilindro retto, a base circolare di raggio r omogeneo di densità *uno* e di altezza $2h$, sopra un punto materiale di massa *uno* esterno e situato sull'asse del cilindro).

3. Sia il cono che ha per vertice l'origine delle coordinate e per direttrice la ellisse, sul piano $z=c>0$, la cui proiezione sul piano $z=0$ ha per equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Il campo T sia la parte di spazio al disopra del piano $z=0$ compresa tra il cono e i piani $x=0$, $y=0$, $z=c$.

Abbiamo

$$\int_T \frac{xy}{\sqrt{z}}\,dT = \frac{a^2b^2\sqrt{c}}{36}.$$

4. $\int\int\int \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{4\pi a^2}{3}$, l'integrale essendo esteso ai punti (x, y, z) pei quali $x^2+y^2+(z-a)^2 \leq a^2$ (Giova usare le coordinate polari).

5. $$\int\int\int \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 4\pi \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

$$\int\int\int \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}-1\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right),$$

le integrazioni essendo estese al campo determinato dalle due relazioni

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq 1, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \geq \varepsilon^2, \ \varepsilon < 1.$$

6. Paraboloide di rotazione generato dalla parabola $y^2=2px$ ruotante intorno all'asse delle x. Volume compreso tra il paraboloide e i piani $x=0$, $x=x$ è πpx^2; area della zona tra gli stessi piani è

$$\frac{2}{3}\pi\sqrt{p}\,[(2x+p)^{\frac{3}{2}}-p^{\frac{3}{2}}]=\frac{2}{3}\pi[(2x+p)\sqrt{y^2+p^2}-p^2].$$

7. Sia la iperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Per l'iperboloide di rotazione a due falde, generato dalla iperbole, il volume V e l'area A della zona tra i piani $x=a$, $x=x$, sono

$$V=\frac{\pi b^2}{3a^2}(x^3-3a^2x+2a^3),$$

$$A=\pi\frac{b}{a}\left[x\sqrt{e^2x^2-a^2}-ab-\frac{a^2}{e}\log\frac{ex+\sqrt{e^2x^2-a^2}}{ae+b}\right],\ e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

Per l'iperboloide di rotazione ad una falda, generato dalla stessa iperbole, abbiamo, per gli stessi elementi tra i piani $y=0$, $y=y$,

$$V=\frac{\pi a^2y}{3b^2}(y^2+3b^2),$$

$$A=\pi\frac{a}{b}\left[y\sqrt{\varepsilon^2y^2+b^2}+\frac{b^2}{\varepsilon}\log\frac{\varepsilon y+\sqrt{\varepsilon^2y^2+b^2}}{b}\right],\ \varepsilon=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}.$$

8. La catenaria $y=\frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}}+e^{-\frac{x}{h}}\right)$ ruota intorno all' asse delle x. Abbiamo pel volume etc. e per la zona etc., tra i piani $x=0$, $x=x$,

$$V=\frac{\pi h^2}{8}\left[h\left(e^{\frac{2x}{h}}-e^{-\frac{2x}{h}}\right)+4x\right],\ A=\frac{\pi h}{4}\left[h\left(e^{\frac{2x}{h}}-e^{-\frac{2x}{h}}\right)+4x\right].$$

Se la catenaria ruota intorno all'asse delle y, abbiamo, per le stesse quantità tra i piani $y=h$, $y=y$,

$$V=h\pi\left[\left(\frac{x^2}{2}+h^2\right)\left(e^{\frac{x}{h}}-e^{-\frac{x}{h}}\right)-hx\left(e^{\frac{x}{h}}+e^{-\frac{x}{h}}\right)\right],$$

$$A=\pi h\left[x\left(e^{\frac{x}{h}}-e^{-\frac{x}{h}}\right)-h\left(e^{\frac{x}{h}}+e^{-\frac{x}{h}}\right)+2h\right].$$

9. Volume del solido limitato dalla superficie generata dalla lemniscata $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ ruotante intorno all'asse delle x è

$$\pi a^3\left[\log(1+\sqrt{2})-\frac{\sqrt{2}}{3}\right].$$

10. La curva $y^2=x^2-x^4$ ruota attorno all'asse delle x; l'area della superficie così generata è

$$\frac{\pi}{8}\left[3+5\sqrt{2}+\frac{7}{4}\log(5+4\sqrt{2})\right],$$

ed il volume del solido da essa limitato è uguale a $\frac{4}{15}\pi$.

11. Area A della parte di cilindro $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ staccata dal cilindro $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

$$A=4b\left[c+\frac{a}{e}\operatorname{arc\,sen} e\right],\ e=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a} \text{ se } a>c,$$

$$A=4b\left[c+\frac{a}{e}\log\left(e+\frac{c}{a}\right)\right],\ e=\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a} \text{ se } a<c,$$

$$A=8bc \text{ se } a=c,\ A=8a^2 \text{ se } a=b=c.$$

(In questo ultimo caso si ha il doppio dell'area di una volta a conca su base quadrata).

Il volume V del solido limitato dai due cilindri è

$$V=\frac{16}{3}abc.$$

12. Dai due cilindri $x^2+z^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$ togliamo la parte di un cilindro contenuta nell'altro, e consideriamo delle superficie che così rimangono la parte, al disopra del piano $z=0$, limitata dai piani $x=a$, $x=-a$, $y=a$, $y=-a$. L'area di questa parte, che forma una volta a crociera su base quadrata, è $4a^3(\pi-2)$.

13. Area A della parte di cilindro $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ limitata dai

piani $y=0$, $y=bx$;

$$A=a^2b\left[2+\frac{1-e^2}{e}\log\frac{1+e}{1-e}\right],\ e=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a},\ a>c,$$

$$A=2a^2b\left[1+\frac{1+e^2}{e}\operatorname{arc\,tg} e\right],\ e=\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a},\ a<c,$$

$$A=4a^2b\ ,\ a=c.$$

14. Volume V del solido, al disopra del piano $z=0$, compreso tra il piano $z=0$, il paraboloide $\frac{z}{c}=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ ed il cilindro $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=m^2$, $m^2\leq 1$.

$$V=\pi abcm^2\left(1-\frac{m^2}{2}\right)\ \text{se}\ m^2<1,\ V=\frac{\pi abc}{2}\ \text{se}\ m^2=1.$$

15. Volume V della parte di solidità della sfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ staccata dal cilindro $\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2y^2}{a^2}=1$, $b>1$.

$$V=\frac{8}{3}\left(\frac{\sqrt{b^2-1}}{b^2}+\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{b}\right)a^3.$$

16. Volume V del solido compreso tra il piano $z=0$, il paraboloide $\frac{2z}{c}=\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}$ ed il cilindro $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

$$V=\frac{\pi abc}{8p^2q^2}(a^2q^2+b^2p^2).$$

17. Volume V del solido compreso tra l'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ \text{e i piani}\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

$$V=\frac{abc\pi}{24}(5\sqrt{2}-4).$$

18. Volume della parte di solidità della sfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ staccata dal cilindro $x^2(x^2+y^2)-a^2(x^2-y^2)=0$.

$$V=\frac{2}{3}a^3(\pi-2+2\log 2)$$

(Giova usare coordinate cilindriche).

19. Essendo $0x$, $0y$, $0z$ tre assi ortogonali tra loro, consideriamo superficie rigata generata nel modo seguente: mentre il piano $z0A$ ta intorno all'asse $0z$, la generatrice della superficie situata su sto piano, facendo sempre un angolo costante con $0z$ la cui tante indichiamo con λ, intercetta su $0z$ un segmento $0C = \lambda a\theta$, e a indica una costante e θ l'angolo dei piani $z0x$, $z0A$. Si vuole olume V del solido limitato dalla superficie rigata così generata ai piani $x0y$, $z0x$, $z0A_1$, essendo $\theta_1 < 2\pi$ l'angolo di questi due ul- i piani; e l'area A della parte di superficie limitata dagli stessi ni.

$$V = \frac{\lambda^3 \theta^2_1 a^3}{24},$$

$$A = \frac{\lambda^3 a^2}{6}\left\{\frac{3\theta_1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\log\left[\theta_1\sqrt{1+\lambda^2}+\sqrt{1+(1+\lambda^2)\theta^2_1}\right]+\frac{2}{1+\lambda^2}\right.$$

$$\left.+\left(\theta^2_1-\frac{2}{1+\lambda^2}\right)\sqrt{1+(1+\lambda^2)\theta^2_1}\right\}.$$

sare coordinate cilindriche ρ, θ, z, osservando che l'equazione della perficie è allora $z = \lambda a\theta - \frac{\rho}{\lambda}$. Per calcolare A giova integrare ima rispetto a θ e poi rispetto a ρ, osservando che i limiti del- integrazione relativa a θ sono $\frac{\rho}{\lambda^2 a}$ e θ_1).

20. Sopra un paraboloide ellittico $2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$ si considerino curve definite dalla condizione che, per ciascuna, le normali alla perficie nei loro punti facciano un angolo costante θ coll'asse lle z. Si calcoli l'area A della callotta del paraboloide limitata da uella curva per la quale $\theta = \theta_1$.

$$A = \frac{2}{3}\pi ab\left(\frac{1}{\cos^3\theta_1} - 1\right)$$

Giova assumere per linee coordinate sul piano $z = 0$ le proiezioni, u questo piano, delle linee che si considerano sul paraboloide, e ette u-centi dall'origine delle coordinate).

21. Area A della parte di superficie $z = \text{arc sen}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)$

compresa tra i piani $x = x_0$, $x = x_1$ essendo x_0, x_1 dello stesso segno e $x_0 < x_1$.

$$A = \pi \log \frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{e^{x_0} - e^{-x_0}}.$$

(Giova prendere per variabili, nell'integrare, le u, v definite dalle $u = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $v = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$ dalle quali $\sqrt{1+u^2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, etc., osservando poi che pei punti della superficie è sempre $-1 \leq uv \leq 1$).

Integrali multipli

125. Sia $u(x_1, x_2, \ldots x_n)$ funzione univalente finita dei punti $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ di un campo finito T ad n dimensioni. Siano a, b i valori estremi di x_1; c, d i valori estremi di x_2; .... e, f i valori estremi di x_n in tutto il campo T. Decomponiamo l'intervallo (a, b) di x_1 in m_1 tratti di ampiezze $k_r = a_r - a_{r-1}$ mediante i valori $a_1, a_2, \ldots a_{r-1}, a_r, \ldots a_{m_1-1}$ compresi tra a e b; l'intervallo (c, d) di x_2 in m_2 tratti di ampiezze $l_s = b_s - b_{s-1}$ mediante i valori $b_1, b_2 \ldots b_{s-1}, b_s$ compresi tra c e d; ... l'intervallo (e, f) di x_n in m_n tratti di ampiezze $p_t = e_t - e_{t-1}$ mediante i valori $e_1, e_2, \ldots e_t$ .... compresi tra e ed f. I valori di $x_1, x_2, \ldots x_n$ tali che sia

$$a_{r-1} \leq x_1 \leq a_r, \quad b_{s-1} \leq x_2 \leq b_s, \ldots \quad e_{t-1} \leq x_n \leq b_t$$

determinano un elemento, di spazio ad n dimensioni, che indicheremo con $h_{rs\ldots t}$. Consideriamo tutti quegli elementi che appartengano completamente al campo T, tali cioè che, se $h_{rs\ldots t}$ è uno qualunque di essi, gli $x_1, x_2 \ldots x_n$ che soddisfanno alle precedenti disuguaglianze siano punti $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ appartenenti tutti a T, che rimane così, in certo modo, decomposto da questi elementi.

Ciò posto, indichiamo con $u_{rs\ldots t}$ un valore qualunque compreso tra il limite inferiore ed il superiore (questi inclusi) dei valori di $u(x_1, x_2, \ldots x_n)$ nell'elemento $h_{rs\ldots t}$, e formiamo la somma

$$S = \sum u_{rs\ldots t}\, k_r l_s \ldots p_t$$

stesa a tutti gli elementi $h_{rs\ldots t}$ che appartengono completamente al ampo T.

Noi diremo che, col diminuire indefinitamente degli elementi $_{rs\ldots t}$, S ha un limite L, quando, ad ogni numero positivo σ, corri- ponde un numero positivo δ tale che, per qualunque scomposizione el campo T in elementi $h_{rs\ldots t}$ pei quali sia $k_r \leq \delta$, $l_s \leq \delta$, ... $p_t \leq \delta$, qualunque sia la scelta delle quantità $u_{rs\ldots t}$, risulti $|L - S| < \sigma$, e riviamo $L = \lim S$.

Questo limite si chiama *l'integrale* n^plo *definito* o *integrale mul- iplo di ordine* n, o *integrale* n^plo, o *integrale* della $u(x_1, x_2, .. x_n)$ steso al campo T, e si indica col simbolo

$$\int\int\ldots\int u(x_1, x_2, .. x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

La funzione dicesi integrabile nel campo T quando tal limite siste.

Qui s'intende come valgano considerazioni analoghe a quelle volte per gli integrali doppi e tripli.

In particolare, ogni integrale multiplo si riduce a successive in- egrazioni semplici.

Se dalle variabili $x_1, x_2 .. x_n$ si passa alle variabili $y_1, y_2 .. y_n$ me- iante le formole

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(y_1, y_2, .. y_n) \\ x_2 &= \varphi_2(y_1, y_2, .. y_n) \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n &= \varphi_n(y_1, y_2, .. y_n), \end{aligned}$$

ndicato con Δ il determinante Jacobiano delle x rispetto alle y, ioè posto

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot, & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix},$$

avremo

$$\int\int..\int f(x_1, x_2...x_n)\,dx_1\,dx_2..dx_n = \int\int...\int f(\varphi_1, \varphi_2..\varphi_n)\,|\Delta|\,dy_1\,dy_2..dy_n$$

gli integrali dei due membri essendo estesi al campo T.

Esempi

1) Si voglia calcolare

$$I = \int\int\ldots\int e^{(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)^{\frac{n}{2}}}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$$

esteso ai valori di $x_1, x_2 \ldots x_n$ soddisfacenti la relazione

$$x^2_1 + x^2_2 + \ldots + x^2_n \leq r^2.$$

Passiamo dal sistema di variabili o coordinate $x_1, x_2 \ldots x_n$ ad un sistema analogo al polare (coordinate polari nello spazio ad n dimensioni) mediante le formole

$$x_1 = \rho \cos\theta_1,$$

$$x_2 = \rho \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2,$$

$$x_3 = \rho \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_3,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$x_{n-2} = \rho \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\theta_3 \ldots \operatorname{sen}\theta_{n-3} \cos\theta_{n-2},$$

$$x_{n-1} = \rho \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\theta_3 \ldots \operatorname{sen}\theta_{n-3} \operatorname{sen}\theta_{n-2} \cos\theta_{n-1},$$

$$x_n = \rho \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\theta_3 \ldots \operatorname{sen}\theta_{n-3} \operatorname{sen}\theta_{n-2} \operatorname{sen}\theta_{n-1};$$

si otterranno tutti, e ciascuno una sola volta, i punti dello spazio ad n dimensioni, cioè tutti i valori delle x, facendo variare ρ da 0 a ∞, $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{n-2}$ da 0 a π e θ_{n-1} da 0 a 2π.

Per calcolare il determinante Jacobiano Δ osserviamo che

$$x^2_1 + x^2_2 + \ldots + x^2_{n-1} + x^2_n = \rho^2,$$

da cui

$$x_n = \sqrt{\rho^2 - x^2_1 - x^2_2 - \ldots - x^2_{n-1}}.$$

ɔrmiamo Δ scrivendo nella prima linea le derivate di x_n rapporto $\rho, \theta_1, \theta_2 .. \theta_{n-1}$ che sono

$$\frac{1}{x_n}\left(\rho - x_1 \frac{\partial x_1}{\partial \rho} - .. - x_{n-1} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \rho}\right), \frac{-1}{x_n}\left(x_1 \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} + x_2 \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} + ..\right), ..;$$

altre linee seguenti sono

$$\frac{\partial x_1}{\partial \rho}, \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1}, 0, 0, .. 0,$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Moltiplicando gli elementi della seconda linea per $\frac{x_1}{x_n}$, quelli ɔlla terza per $\frac{x_2}{x_n}$,.. quelli dell'ultima per $\frac{x_{n-1}}{x_n}$ e sommando agli ementi della prima linea i corrispondenti delle altre linee, cosichè valore del determinante è rimasto inalterato, si ottiene un deter- inante in cui sono nulli tutti gli elementi da una stessa parte della agonale, ed abbiamo così:

$$= \frac{\rho}{x_n} \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} \frac{\partial x_2}{\partial \theta_2} \cdots \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \theta_{n-1}} = (-1)^{n-1} \rho^{n-1} \operatorname{sen}^{n-2}\theta_1 \operatorname{sen}^{n-3}\theta_2 \ldots \operatorname{sen}^2\theta_{n-3} \operatorname{sen}\theta_{n-2}.$$

osichè avremo

$$= \int \int \ldots \int e^{\rho^n} \rho^{n-1} \operatorname{sen}^{n-2}\theta_1 \operatorname{sen}^{n-3}\theta_2 .. \operatorname{sen}\theta_{n-2}\, d\rho\, d\theta_1\, d\theta_2 .. d\theta_{n-2}\, d\theta_{n-1}$$

teso al nostro campo di valori, ossia

$$= \int_0^{2\pi} d\theta_{n-1} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{n-2}\theta_1\, d\theta_1 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{n-3}\theta_2\, d\theta_2 \ldots \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta_{n-2}\, d\theta_{n-2} \int_0^{r} e^{\rho^n} \rho^{n-1}\, d\rho$$

quindi, osservando che $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^m \theta d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m \theta d\theta$, e che

$\frac{\pi}{2}$

$\operatorname{sen}^m \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{m+1} \theta d\theta = \frac{\pi}{2(m+1)}$ (m int. pos.), troviamo

$$I = \begin{cases} \dfrac{8(e^{r^n}-1)}{2.4.6..(n-2)n}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}} & \text{se} \quad n \text{ è pari} \\[2ex] \dfrac{8(e^{r^n}-1)}{3.5.7..(n-2)n}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} & \text{se} \quad n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

2) Si voglia calcolare l'integrale

$$I = \int\int \ldots \int f(x_1 + x_2 + .. + x_n) x_1^{m_1-1} x_2^{m_2-1} \ldots x_n^{m_n-1}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

dove $m_1, m_2 \ldots m_n$ sono numeri positivi, esteso ai valori positivi o nulli di $x_1, x_2, .. x_n$ soddisfacenti la relazione

$$x_1 + x_2 + .. + x_n \leq k, \ (k > 0).$$

È facile trovare i limiti degli integrali rispetto a ciascuna variabile, perchè, se supponiamo fissati $x_1, x_2 .. x_{n-1}$, allora x_n potrà variare da 0 a $k - x_1 - x_2 - .. - x_{n-1}$; se si suppongono fissati $x_1, x_2 .. x_{n-2}$ allora x_{n-1} potrà variare da 0 a $k - x_1 - x_2 - x_{n-2}$, e così via, cosichè avremo

$$I = \int_0^k x_1^{m_1-1} dx_1 \int_0^{k-x_1} x_2^{m_2-1} dx_2 \int_0^{k-x_1-x_2} x_3^{m_3-1} dx_3 \ldots \int_0^{k-x_1-x_2-\ldots-x_{n-1}} x_n^{m_n-1} f(x_1 + x_2 + .. + x_n) dx_n.$$

Se fosse $f(x_1 + x_2 + + x_n) = 1$, servendoci della formola

$$\int_0^a x^{l-1}(a-x)^{m-1} dx = a^{l+m-1} \int_0^1 y^{l-1}(1-y)^{m-1} dy = a^{l+m-1} \frac{\Gamma(l)\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)},$$

si arriverebbe facilmente ad esprimere l'integrale mediante le funzioni *gamma*.

Nel nostro caso giova fare il seguente cambiamento di variabili

$$\begin{aligned}
x_1 &= u_1 u_2 \\
x_2 &= u_1 u_3 (1 - u_2) \\
x_3 &= u_1 u_4 (1 - u_2)(1 - u_3)(1 - u_4) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{n-1} &= u_1 u_n (1 - u_2)(1 - u_3)(1 - u_4) \ldots (1 - u_{n-1}) \\
x_n &= u_1 (1 - u_2)(1 - u_3)(1 - u_4) \ldots (1 - u_{n-1})(1 - u_n)
\end{aligned}$$

la trasformazione $y = uv$, $x = u(1 - v)$, adoperata nell'esercizio 5° pag. 320, è caso particolare di questa), dalle quali formole ricaviamo

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = u_1,$$

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{x_{n-1} + x_n}, \; u_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{x_{n-2} + x_{n-1} + x_n}, \ldots u_2 = \frac{x_1}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n},$$

e vediamo così che esauriremo tutto il nostro campo di valori delle x attribuendo alla u_1 i valori da 0 a k e a ciascuna delle altre variabili u i valori da 0 ad *uno*.

Indicata con x_{rs} la derivata di x_r rapporto ad u_s, abbiamo

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & x_{n-1,n} \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & x_{nn} \end{vmatrix};$$

ma la relazione $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = u_1$ ci dà

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + \ldots + x_{n1} = 1,$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + \ldots + x_{n2} = 0,$$

$$x_{23} + x_{33} + \ldots + x_{n3} = 0,$$

$$x_{34} + \ldots + x_{n4} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{n-1,n} + x_{nn} = 0,$$

cosichè se agli elementi della prima linea nel determinante Δ sommiamo i corrispondenti delle altre linee, poi nel determinante così ottenuto agli elementi della seconda linea quelli delle linee terza, quarta etc. e nel nuovo determinante agli elementi della terza linea quelli della quarta etc. e così via, trasformeremo Δ in un determinante avente nulli gli elementi da una parte della diagonale, gli elementi della quale risultano

$$1, \; -x_{12}, \; -x_{23}, \ldots -x_{n-2,n-1}, \; x_{nn},$$

cosichè

$$|\Delta| = u_1^{n-1}(1-u_2)^{n-2}(1-u_3)^{n-3}\dots(1-u_{n-2})^2(1-u_{n-1})$$

Si troverà quindi facilmente

$$I = \int_0^k f(u_1)u_1^{m_1+m_2+\dots+m_n-1}\,du_1 \int_0^1 u_2^{m_1-1}(1-u_2)^{m_2+m_3+\dots+m_n-1}\,du_2$$

$$\int_0^1 u_3^{m_2-1}(1-u_3)^{m_3+\dots+m_n-1}\,du_3 \dots \int_0^1 u_n^{m_{n-1}-1}(1-u_n)^{m_n-1}\,du_n$$

e perciò

$$I = \frac{\Gamma(m_1)\,\Gamma(m_2)\dots\Gamma(m_n)}{\Gamma(m_1+m_2+\dots+m_n)} \int_0^k f(u_1)u_1^{m_1+m_2+\dots+m_n-1}\,du_1,$$

formola di *Liouville*, generalizzazione di un' altra ottenuta prima dal *Dirichlet*, corrispondente al caso $k=1$, $f(x_1+x_2+\dots+x_n)=1$, nel qual caso è

$$I = \frac{\Gamma(m_1)\,\Gamma(m_2)\dots\Gamma(m_n)}{\Gamma(m_1+m_2+\dots+m_n+1)}.$$

3) Si può ancora ridurre alle funzioni *gamma* e ad un integrale semplice l' integrale

$$I = \iiint \frac{x^{m-1}y^{p-1}z^{q-1}f(x+y+z)}{(1+ax+by+cz)^{m+p+q}}\,dx\,dy\,dz,$$

dove m, p, q, a, b, c sono quantità positive, esteso ai valori positivi o nulli di x, y, z pei quali $x+y+z \leq k$, k positivo.

Posto

$$F(\rho) = \int_0^\rho dx \int_0^{\rho-x} dy \int_0^{\rho-x-y} dz\, \frac{x^{m-1}y^{p-1}z^{q-1}f(x+y+z)}{(1+ax+by+cz)^{m+p+q}},$$

è $I = F(k)$.

Poniamo inoltre

$$\int_0^{\rho-x-y} f(x+y+z)\frac{x^{m-1}y^{p-1}z^{q-1}\,dz}{(1+ax+by+cz)^{m+p+q}} = \varphi(\rho-x-y), \int_0^{\rho-x}\varphi(\rho-x-y)\,dy = \quad (\rho-x)$$

ed avremo

$$F(\rho)=\int_0^\rho \psi(\rho-x)\,dx.$$

Derivando rapporto a ρ, ed osservando che possiamo derivare sotto il segno integrale, otteniamo

$$\frac{dF(\rho)}{d\rho}=\psi(0)+\int_0^\rho \frac{\partial\psi(\rho-x)}{\partial\rho}dx=\int_0^\rho \frac{\partial\psi(\rho-x)}{\partial\rho}dx;$$

ma

$$\frac{\partial\psi(\rho-x)}{d\rho}=\varphi(0)+\int_0^{\rho-x}\frac{\partial\varphi(\rho-x-y)}{\partial\rho}dy=\int_0^\rho\frac{\partial\varphi(\rho-x-y)}{\partial\rho}dy,$$

$$\frac{\partial\varphi(\rho-x-y)}{\partial\rho}=\frac{\partial\varphi(\rho-x-y)}{\partial(\rho-x-y)}=f(\rho)\frac{x^{m-1}y^{p-1}(\rho-x-y)^{q-1}}{[1+ax+by+c(\rho-x-y)]^{m+p+q}}$$

e perciò

$$\frac{dF(\rho)}{d\rho}=f(\rho)\int_0^\rho dx\int_0^{\rho-x}\frac{x^{m-1}y^{p-1}(\rho-x-y)^{q-1}dy}{[1+ax+by+c(\rho-x-y)]^{m+p+q}}.$$

Poniamo nell'integrale interno $y=(\rho-x)y_1$, e poi $x=\rho x_1$, o, ciò che è lo stesso, cambiamo nell'integrale doppio, che è esteso ai valori positivi o nulli di x, y pei quali $x+y\leqq\rho$, le variabili x, y nelle x_1, y_1 colle formole $x=\rho x_1, y=\rho(1-x_1)y_1$; otteniamo così

$$\frac{dF(\rho)}{d\rho}=f(\rho)\rho^{m+p+q-1}$$

$$\int_0^1 dx_1 x_1^{m-1}(1-x_1)^{p+q-1}\int_0^1 dy_1\frac{y_1^{p-1}(1-y_1)^{q-1}}{[1+\rho c+(a-c)\rho x_1+\rho(b-c)y_1(1-x_1)]^{m+p+q}}$$

$$=f(\rho)\rho^{m+p+q-1}$$

$$\int_0^1 dy_1 y_1^{p-1}(1-y_1)^{q-1}\int_0^1 dx_1\frac{x_1^{m-1}(1-x_1)^{p+q-1}}{[1+\rho c+(a-c)\rho x_1+\rho(b-c)y_1(1-x_1)]^{m+p+q}}.$$

Nella ultima formola del n. 100 pag. 265 ponendo $b=\lambda+\mu$, $c=\nu-\lambda$, abbiamo

$$(\alpha)\quad \int_0^1 \frac{(1-y)^{p-1}y^{q-1}\,dy}{[\mu+\nu y+\lambda(1-y)]^{p+q}}=\frac{1}{(\lambda+\mu)^p\,(\mu+\nu)^q}\,\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)};$$

usando queste formole si ottiene

$$\frac{dF(\rho)}{d\rho}=f(\rho)\,\rho^{m+p+q-1}\,\frac{\Gamma(m)\Gamma(p+q)}{\Gamma(m+p+q)}\,\frac{1}{(1+\rho a)^m}\int_0^1 dy_1\,\frac{y_1^{p-1}(1-y_1)^{q-1}}{[1+\rho c+\rho(b-c)y_1]^{p+q}}$$

$$=\frac{\Gamma(m)\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(m+p+q)}\,\frac{f(\rho)\,\rho^{m+p+q-1}}{(1+\rho a)^m(1+\rho b)^p\,(1+\rho c)^q},$$

dalla quale, integrando rispetto a ρ tra i limiti 0 e k ed osservando che $F(0)=0$, risulta

$$F(k)=1=\frac{\Gamma(m)\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(m+p+q)}\int_0^k \frac{f(\rho)\,\rho^{m+p+q-1}\,d\rho}{(1+\rho a)^m(1+\rho b)^p(1+\rho c)^q}.$$

In modo analogo si giungerebbe alla formola generale

$$\int\int\ldots\int f(x_1+x_2+\ldots+x_n)\,\frac{x_1^{m_1-1}x_2^{m_2-1}\ldots x_n^{m_n-1}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n}{(1+a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n)^{m_1+m_2+\ldots+m_n}}$$

$$=\frac{\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)\ldots\Gamma(m_n)}{\Gamma(m_1+m_2+\ldots+m_n)}\int_0^k \frac{f(\rho)\,\rho^{m_1+m_2+\ldots+m_n-1}\,d\rho}{(1+\rho a_1)^{m_1}(1+\rho a_2)^{m_2}\ldots(1+\rho a_n)^{m_n}}$$

dove $m_1, m_2, \ldots m_n, a_1, a_2, a_n$ sono positivi e il campo di integrazione è costituito dai valori positivi o nulli di $x_1, x_2, \ldots x_n$ pei quali $x_1+x_2+\ldots+x_n\leq k$, $k>0$ (Schlömilch).

Esercizi

$$1.\ \int\int\ldots\int f\left[\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{p_1}+\ldots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{p_n}\right]x_1^{m_1-1}x_2^{m_2-1}\ldots x_n^{m_n-1}dx_1dx_2\ldots dx_n$$

$$=\frac{a_1^{m_1}a_2^{m_2}\ldots a_n^{m_n}}{p_1p_2\ldots p_n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m_1}{p_1}\right)\Gamma\left(\frac{m_2}{p_2}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{m_n}{p_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_1}{p_1}+\frac{m_2}{p_2}+\ldots+\frac{m_n}{p_n}\right)}\int_0^k f(u)\,u^{\frac{m_1}{p_1}+\ldots+\frac{m_n}{p_n}-1}$$

l'integrazione essendo estesa ai valori positivi o nulli di $x_1, x_2 \ldots x_n$ pei quali

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{p_1} + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{p_2} + \ldots + \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{p_n} \leq k,$$

essendo $k, a_1 \ldots a_n, p_1, \ldots p_n, m_1, \ldots m_n$ numeri positivi (Liouville).

2. Campo di integrazione: valori positivi o nulli di $x_1, x_2 \ldots x_n$ pei quali $x_1^{p_1} + x_2^{p_2} + \ldots + x_n^{p_n} \leq 1$, $p_1, p_2, \ldots p_n$ positivi.

$$\int\int \ldots \int \sqrt[m]{1 - x_1^{p_1} - x_2^{p_2} - \ldots - x_n^{p_n}}\, x_1^{m_1-1} \ldots x_n^{m_n-1}\, dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}{m p_1 p_2 \ldots p_n} \frac{\Gamma\left(\frac{m_1}{p_1}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{m_n}{p_n}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{m_1}{p_1} + \ldots + \frac{m_n}{p_n}\right)},$$

$$\int\int \ldots \int \frac{x_1^{m_1-1} \ldots x_n^{m_n-1}}{\sqrt[m]{1 - x_1^{p_1} - \ldots - x_n^{p_n}}}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

$$= \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{m_1}{p_1}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{m_n}{p_n}\right)}{p_1 p_2 \ldots p_n\, \Gamma\left(1 - \frac{1}{m} + \frac{m_1}{p_1} + \ldots + \frac{m_n}{p_n}\right)},$$

$m_1, m_2, \ldots m_n$ positivi, e $m > 0$ nella prima, $m > 1$ nella seconda formola.

3. Campo di integrazione: valori positivi o nulli di $x_1, x_2 \ldots x_n$ pei quali $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1$.

$$\int\int \ldots \int \sqrt{\frac{1 - (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)}{1 + (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)}}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

$$= \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{n}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4} + \frac{1}{2}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{n}{4} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4} + 1\right)} \right\}.$$

i vede così che se n è della forma 4μ o $4\mu + 2$, l'integrale è

esprimibile mediante π, se n è della forma $4\mu+1$ o $4\mu+3$, mediante π e $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$.

4. Campo di integrazione: valori positivi o nulli di $x_1, x_2 \ldots x_n$ pei quali $x_1+x_2+\ldots+x_n \leq k$, $k>0$.

$$\int\int\cdots\int f(x_1+x_2+\ldots+x_n)\frac{x_1^{m_1-1}\ldots x_n^{m_n-1}\,dx_1\ldots dx_n}{(h+a_1x_1+\ldots+a_nx_n)^{m_1+\ldots+m_n+1}}$$

$$=\frac{\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)\ldots\Gamma(m_n)}{\Gamma(1+m_1+m_2+\ldots+m_n)}\int_0^k\frac{d\rho\, f(\rho)\rho^{m_1+\ldots+m_n-1}}{(h+\rho a_1)^{m_1}\ldots(h+\rho a_n)^{m_n}}\left[\frac{m_1}{h+\rho a_1}+\ldots+\frac{m_n}{h+\rho a_n}\right]$$

dove $m_1, m_2, \ldots a_1, a_2 \ldots, h$ sono quantità positive.

5. Campo di integrazione: valori positivi o nulli di x, y, z pei quali $x+y+z \leq k$, $k>0$.

$$\int\int\int f\left(\frac{k-x-y-z}{1+ax+by+cz}\right)x^{m-1}y^{p-1}z^{q-1}\,dx\,dy\,dz$$

$$=\frac{\Gamma(m)\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(m+p+q+1)}\int_0^k\frac{(k-u)^{m+p+q-1}f(u)\,du}{(1+au)^m(1+bu)^p(1+cu)^q}\left[m\frac{1+ak}{1+au}+p\frac{1+bk}{1+bu}+q\frac{1+ck}{1+cu}\right]$$

dove m, p, q, a, b, c sono positivi.

Vale pure la formola analoga pel caso di n variabili (Schlömilch).

(Si ponga l'integrale triplo, corrispondente a $k=\rho$, uguale a $\varphi(\rho)$ e si operi come nell'esempio 3) n. 125; ma si cominci poi coll'integrare rispetto a ρ tra 0 e k, ponendo a tale scopo $\frac{h-\rho}{1+\sigma\rho}=u$, dove

$$\sigma=ax_1+b(1-y_1)x_1+c(1-x_1)(1-y_1),$$

e si usi la formola

$$\int_0^1\frac{(1-y)^{p-1}y^{q-1}\,dy}{[\mu+\nu y+\lambda(1-y)]^{p+q+1}}=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}\frac{1}{(\lambda+\mu)^p(\mu+\nu)^q}\left[\frac{p}{\lambda+\mu}+\frac{q}{\mu+\nu}\right].$$

che si ottiene dalla (α) n. 125 derivandola rispetto a μ).

III. Elementi della teoria delle funzioni di variabili complesse.

Nozioni preliminari -- Serie a termini complessi
Le trascendenti elementari ad argomento complesso.

126. Qui si suppongono conosciute le nozioni fondamentali intorno ai numeri complessi e la loro rappresentazione geometrica mediante i punti di un piano.

Sia $z = x + iy$, $i = \sqrt{-1}$, dove x, y indicano variabili reali, una variabile complessa; indicheremo con z anche il punto che corrisponde al numero complesso z. Denoteremo con $|z|$ il modulo di $z = x + iy = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ cioè $|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Sia $w = u + iv$ una quantità complessa che varia al variare di z; diremo che $L = M + iN$ è il limite di w per $\alpha = a + ib$, se, per qualunque numero positivo σ assegnato, esiste un intorno del punto α, per tutti i punti z del quale, α al più escluso, è $|w - L| < \sigma$, e scriviamo $\lim\limits_{z=\alpha} w = L$. Si riconosce subito che è condizione necessaria e sufficiente affinchè sia $\lim\limits_{z=\alpha} w = L$, che sia $\lim u = M$, $\lim v = N$ quando x, y convergono comunque verso a, b. La condizione è necessaria perchè dall'essere, pei punti dell'intorno predetto, $|w - L| < \sigma$, ossia $\sqrt{(u-M)^2 + (v-N)^2} < \sigma$, risulta $|u - M| < \sigma$, $|v - N| < \sigma$. La condizione è sufficiente perchè, se esiste un intorno del punto α, pei punti x, y del quale sia $|u - M| < \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, $|v - N| < \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, avremo $(u - M)^2 + (v - N)^2 < \sigma^2$, e q indi $\sqrt{(u - M)^2 + (v - N)^2} < \sigma$.

Ciascuno poi intenderà da sè come si estendano le definizioni di ımite agli altri casi che possano presentarsi, cioè quando la z var ' in modo che $|z|$ vada crescendo indefinitamente, etc.

127. Sia una serie $\sum_1^\infty u_n = \sum_1^\infty (\alpha_n + i\beta_n)$ a termini complessi, o complessa. Fatta la somma S_n dei suoi primi n termini, la convergenza e divergenza della serie stessa viene definita precisamente come per le serie a termini reali. Risulta subito da ciò che, condizione necessaria e sufficiente alla convergenza della serie $\Sigma(\alpha_n + i\beta_n)$ è che siano convergenti le due serie reali $\Sigma\alpha_n$, $\Sigma\beta_n$ formate colle parti reali e coi coefficienti dell'immaginario i di ciascun termine della serie complessa. Invero, la condizione è necessaria perchè, dall'essere per ipotesi

$$(1) \qquad \lim(\alpha_1 + i\beta_1 + \alpha_2 + i\beta_2 + \ldots + \alpha_n + i\beta_n) = A + iB$$

quando n cresce indefinitamente per numeri interi e positivi, risulta (n. 126)

$$\lim\ (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = A, \qquad \lim(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n) = B.$$

La condizione è sufficiente perchè, supposte verificate queste due ultime eguaglianze, abbiamo come conseguenza la (1).

Si riconosce poi subito ancora che, condizione necessaria e sufficiente affinchè una serie complessa sia convergente, è che il resto della serie converga a zero al crescere indefinito di n.

Una serie complessa a termini variabili Σu_n, dove le u_n dipendono dalla variabile complessa ζ, dicesi uniformemente convergente o equiconvergente in un campo C, se, dato σ, esiste un numero m tale che per $n \geq m$ e per *tutti* i punti ζ di C, è $|R_n| < \sigma$, essendo R_n il resto della serie.

Una serie complessa

$$\Sigma u_n = \Sigma(\alpha_n + i\beta_n) = \Sigma\rho_n(\cos\theta_n + i \operatorname{sen}\theta_n)$$

dicesi *assolutamente* convergente se è convergente la serie $\Sigma\rho_n$ dei moduli dei suoi termini.

Si riconosce subito che una serie complessa è convergente indipendentemente dall'ordine dei suoi termini, o incondizionatamente, se sono tali le due serie $\Sigma\alpha_n$, $\Sigma\beta_n$; e inversamente. Ed abbiamo il teorema (di *Dirichlet*, Vedi n. 132 vol. I).

La condizione necessaria e sufficiente affinchè una serie complessa sia convergente indipendentemente dall'ordine dei termini è che sia convergente la serie formata coi moduli dei suoi termini.

Invero, se la serie complessa Σu_n è convergente qualunque sia

l'ordine dei suoi termini, lo sono tali le serie $\Sigma\alpha_n$, $\Sigma\beta_n$, e perciò convergono le serie $\Sigma|\alpha_n|$, $\Sigma|\beta_n|$, e quindi ancora la serie $\Sigma\rho_n$, giacchè è $\rho_n = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} \leq |\alpha_n| + |\beta_n|$; e se converge la serie $\Sigma\rho_n$ sono convergenti indipendentemente dall'ordine dei termini le serie $\Sigma\alpha_n$, $\Sigma\beta_n$, perchè $|\alpha_n| = \rho_n\,|\cos\theta_n| \leq \rho_n$, $|\beta_n| = \rho_n\,|\operatorname{sen}\theta_n| \leq \rho_n$, e quindi è pure così convergente la serie complessa.

Si riconoscerà poi come valgano per le serie complesse i teoremi dimostrati nei n.i 133, 134, 135, 136 del vol. I sulle serie doppie e sulla moltiplicazione delle serie; basterà per provarli sostituire in quelle dimostrazioni ai valori assoluti delle quantità i loro moduli.

128 La serie

$$(1) \qquad 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{z^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

dove $z = x + iy = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, è assolutamente convergente per qualunque valore di z, perchè è convergente la serie dei moduli. Se z è numero reale essa ha per valore e^z, cioè è la potenza z del numero $e = 2{,}718\ldots$, e può servire al calcolo effettivo di tale potenza. Indicheremo col simbolo e^z la somma della serie (1) anche quando z è complesso, cosichè la funzione esponenziale e^z viene definita come somma della serie (1) intendendo, per ora, che una quantità è funzione di $z = x + iy$ in un campo C, se, ad ogni punto - valore z del campo corrispondono un valore determinato o più valori determinati di quella quantità.

La definizione ora data di funzione esponenziale quando l'esponente non è reale, oltre che essere giustificata dal fatto, che per z reale corrisponde alla potenza z del numero e, lo è ancora dall'altro che, quantunque nella definizione di e^z per z non reale sparisca affatto il concetto di potenza, pure la funzione e^z gode di tutte le proprietà di una potenza con esponente reale. Basterà perciò provare che la formola fondamentale $e^z\, e^{z_1} = e^{z+z_1}$, che ha luogo quando gli esponenti sono reali, sussiste ancora quando essi sono numeri qualunque. Ed invero, abbiamo

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \ldots,$$

$$e^{z_1} = 1 + z_1 + \frac{z_1^2}{1.2} + \frac{z_1^3}{1.2.3} + \frac{z_1^4}{1.2.3.4} + \ldots,$$

e da queste (n. 127, e n.i 135, 136 vol. I)

$$e^z \cdot e^{z_1} = 1 + (z + z_1) + \left(\frac{z^2}{1.2} + z z_1 + \frac{z_1^2}{1.2}\right) + \dots$$

$$= 1 + (z + z_1) + \frac{(z + z_1)^2}{1.2} + \frac{(z + z_1)^3}{1.2.3.} + \dots = e^{z+z_1}.$$

129. Le serie

$$(1) \quad 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \dots, \; z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \dots$$

sono assolutamente convergenti per qualunque valore di z, essendo convergenti le corrispondenti serie dei moduli dei loro termini. e sono uguali, quando z è reale, la prima a $\cos z$, la seconda a $\operatorname{sen} z$. Designeremo ancora col simbolo $\cos z$ la prima e con $\operatorname{sen} z$ la seconda quando z è qualunque, e rimangono così definite, come somme di quelle serie, le due funzioni elementari $\cos z$, $\operatorname{sen} z$ per z complesso.

Si vede subito che

$$\cos(-z) = \cos z, \qquad \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z.$$

Osserviamo che

$$e^{iz} = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} - \dots$$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right)$$

e quindi

$$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z,$$

da questa

$$e^{-iz} = \cos z - i \operatorname{sen} z,$$

cosichè ancora

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

formole dovute ad Eulero, valevoli qualunque sia z, e che lo

loro le funzioni circolari ed esponenziali di una variabile qua-que.

Si ha anche così un modo compendiato di esprimere un numero nplesso:

$$x + iy = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = \rho e^{\theta i}.$$

Dalla formula

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

: x, y sono reali, si vede che $e^x \cos y$ è la parte reale, $ie^x \operatorname{sen} y$ parte puramente immaginaria del valore di e^{x+iy}.

Quantunque per le funzioni $\operatorname{sen} z$, $\cos z$, quando z è complesso, trisca affatto l'idea di linea relativa al circolo di raggio unità, che ha per z reale, pure esse godono di tutte le proprietà delle fun-ni circolari seno e coseno di argomento reale, e ciò giustifica ggiormente le denominazioni di $\cos z$ e $\operatorname{sen} z$ attribuite alle serie (1).

Intanto dalle

$$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \operatorname{sen} z$$

biamo subito $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$.

Basterà poi provare ancora che hanno luogo per esse le formole addizione, dalle quali le altre tutte procedono. Ora abbiamo

$$e^{iz} e^{iz_1} = (\cos z + i \operatorname{sen} z)(\cos z_1 + i \operatorname{sen} z_1)$$

$$= (\cos z \cos z_1 - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} z_1) + i(\operatorname{sen} z \cos z_1 + \operatorname{sen} z_1 \cos z)$$

$$= e^{i(z+z_1)} = \cos(z + z_1) + i \operatorname{sen}(z + z_1),$$

alla quale, cambiando z e z_1 in $-z$ e $-z_1$,

$$(\cos z \cos z_1 - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} z_1) - i(\operatorname{sen} z \cos z_1 + \operatorname{sen} z_1 \cos z)$$

$$= \cos(z + z_1) - i \operatorname{sen}(z + z_1),$$

e quali sommate e sottratte danno,

$$\cos(z + z_1) = \cos z \cos z_1 - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} z_1$$

$$\operatorname{sen}(z + z_1) = \operatorname{sen} z \cos z_1 + \operatorname{sen} z_1 \cos z.$$

Da queste formole riconosciamo subito anche la periodicità delle funzioni $\operatorname{sen} z$, $\cos z$, giacchè per esse è

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z, \qquad \operatorname{sen}(z + 2\pi) = \operatorname{sen} z.$$

La funzione esponenziale e^z è essa pure periodica col periodo $2\pi i$, giacchè

$$e^{z+2\pi i} = e^z \, e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi) = e^z.$$

Dalle formole di Eulero ricaviamo

$$\cos iy = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2}, \quad \operatorname{sen} iy = -i\,\frac{e^{-y} - e^{y}}{2},$$

dalle quali, supponendovi y reale, deduciamo che il coseno di un numero puramente immaginario è reale ed il seno è puramente immaginario.

Inoltre, per le formole di addizione ora dimostrate,

$$\cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} iy,$$

$$\operatorname{sen}(x + iy) = \operatorname{sen} x \cos iy + \operatorname{sen} iy \cos x,$$

e, se x, y sono reali, i secondi membri sono scomposti nella parte reale e nella parte puramente immaginaria di $\cos(x + iy)$, $\operatorname{sen}(x + iy)$.

Le altre funzioni circolari $\operatorname{tg} z, \ldots$ si definiscono:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}, \text{ etc.}$$

Le funzioni

$$\frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

si chiamano rispettivamente seno iperbolico di z, coseno iperbolico di z, e si indicano coi simboli $\operatorname{senh} z$, $\cosh z$; esse possono venire utilmente adoperate, ed hanno semplici relazioni colle funzioni circolari (Vedi ad es.: una nota sulle funzioni iperboliche contenuta nella traduzione italiana del Ferrucci della Trigonometria del Serret).

130. Se w è reale $e^w = z$ è un numero positivo e w è il logaritmo neperiano di z, $w = \log z$. Poniamo la stessa definizione nel caso di $w = u + iv$, con u, v reali; allora, essendo e^{u+iv} un numero della forma $x + iy$ con x, y reali, $e^{u+iv} = x + iy$, chiamiamo $u + iv$ il logaritmo neperiano di $x + iy$, $u + iv = \log(x + iy)$

Vediamo ora di ridurre $\log(x+iy)$ alla forma $\alpha+i\beta$ con α, β reali. Abbiamo

$$e^{u+iv} = e^u(\cos v + i \operatorname{sen} v) = x + iy,$$

quindi

$$x = e^u \cos v, \qquad y = e^u \operatorname{sen} v,$$

dalle quali

$$e^{2u} = x^2 + y^2, \qquad e^u = \sqrt{x^2+y^2},$$

il radicale essendo preso col segno $+$, perchè e^u è sempre positivo, e da questa $u = \log\sqrt{x^2+y^2}$; e $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} v$, dalla quale, indicando con $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$ il più piccolo arco avente $\frac{y}{x}$ per tangente, $v = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + 2k\pi i$, cosichè

$$\log(x+iy) = \log\sqrt{x^2+y^2} + i\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + 2k\pi\right),$$

dove k è un intero qualunque e il logaritmo nel secondo membro è il solito logaritmo aritmetico del numero $\sqrt{x^2+y^2}$.

Posto

$$x + iy = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

è

$$\log[\rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)] = \log\rho + i(\theta + 2k\pi).$$

Vediamo così che ogni numero $x+iy$ ha un numero infinito di logaritmi che corrispondono ai diversi valori di k. Quello che corrisponde a $k=0$ suole anche chiamarsi il *logaritmo principale*.

In particolare, per ogni numero reale positivo, degli infiniti logaritmi il principale è reale ed è il solito logaritmo aritmetico del numero stesso, e tutti gli altri sono complessi, e per ogni numero reale negativo, $-\rho = \rho(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi)$, tutti gli infiniti logaritmi sono complessi.

Si riconoscerà subito facilmente che il logaritmo di un numero complesso, così definito, gode delle stesse proprietà dei logaritmi dei numeri reali e positivi. Dimostreremo la formola $\log z + \log z_1 = \log(zz_1)$, la quale, poichè ogni logaritmo ha una infinità di valori, va intesa

nel senso, come del resto ora la dimostreremo, che la somma di due valori qualunque di $\log z$ e $\log z_1$ è uno dei valori di $\log(zz_1)$, e che vi è sempre un valore di $\log z$ che sommato con un valore di $\log z_1$ ci dà un valore qualunque prefissato di $\log(zz_1)$.

Invero

$$\log z = \log[\rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)] = \log\rho + i(\theta + 2k\pi)$$

$$\log z_1 = \log[\rho_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)] = \log\rho_1 + i(\theta_1 + 2k_1\pi)$$

$$\log(zz_1) = \log[\rho\rho_1(\cos(\theta+\theta_1) + i \operatorname{sen}(\theta+\theta_1))]$$

$$= \log(\rho\rho_1) + i(\theta + \theta_1 \cdot 2k'\pi) = \log\rho + \log\rho_1 + i(\theta + \theta_1 + 2k'\pi)$$

e posto $k' = k + k_1$,

$$\log(zz_1) = \log z + \log z_1.$$

131. Definiamo z^{z_1} come $e^{z_1 \log z}$, che ha significato conosciuto, estendendo al caso di z, z_1 numeri qualunque l'identità $z^{z_1} = e^{z_1 \log z}$ nota se z, z_1 sono reali e z è positivo. Abbiamo quindi

$$(x+iy)^{x_1+iy_1} = e^{(x_1+iy_1)\log(x+iy)} = e^{(x_1+iy_1)[\log\sqrt{x^2+y^2} + i(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + 2k\pi)]}$$

$$= e^{x_1\log\sqrt{x^2+y^2} - y_1(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + 2k\pi)}\, e^{i[y_1\log\sqrt{x^2+y^2} + x_1(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + 2k\pi)]}$$

e si ha così, generalmente, un numero infinito di valori per z^{z_1}.

Abbiamo ancora, dalla formola precedente,

$$[\rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^{\rho_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)}$$

$$= e^{-\rho_1 2k\pi \operatorname{sen}\theta_1}\, e^{\rho_1(\cos\theta_1 \log\rho - \theta \operatorname{sen}\theta_1)}\{\cos[\rho_1(\operatorname{sen}\theta_1 \log\rho + (\theta + 2k\pi)\cos\theta_1)]$$

$$+ i \operatorname{sen}[\rho_1(\operatorname{sen}\theta_1 \log\rho + (\theta + 2k\pi)\cos\theta_1)]\}.$$

Si riconoscerà subito che questa formola contiene come caso particolare la

$$[\rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^{\frac{m}{n}} = \rho^{\frac{m}{n}}\left[\cos\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi) + i \operatorname{sen}\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi)\right].$$

e che ha luogo la formola $z^{z_1+z_2} = z^{z_1} z^{z_2}$.

Come curiosità possiamo notare che $i^i = e^{-\pi\left(2k+\frac{1}{2}\right)}$ ha tutti i suoi infiniti valori reali, che $1^i = e^{-2k\pi}$.

Notiamo infine che vi è un caso di eccezione per la formola $\zeta^{z_1} = e^{z_1 \log z}$, quello di $\zeta = e$, sia che, per essere ζ_1 complesso, si intenda con e^{z_1} la somma della serie esponenziale, sia che, per essere ζ_1 reale, si intenda con e^{z_1} anche la potenza ζ_1 del numero 2,718..., perchè tanto nell'uno come nell'altro caso e^{z_1} ha un unico valore, mentre che la $e^{z_1} = e^{z_1 \log e}$ darebbe più valori per e^{z_1}, stante la moltiplicità dei valori del $\log e$ che comparisce nel secondo membro come esponente. Così chè, nel caso di $\zeta = e$, converremo di considerare in quella formola per $\log e$ il solo valore reale *uno*.

132. Se è $\operatorname{sen} w = \zeta = x + iy$, diremo che

$$w = \operatorname{arc\,sen} \zeta = \operatorname{arc\,sen}(x + iy).$$

Ora dalla

$$e^{iw} = \cos w + i \operatorname{sen} w = \sqrt{1 - \zeta^2} + i\zeta,$$

ricaviamo

$$w = \frac{1}{i} \log (\sqrt{1 - \zeta^2} + i\zeta),$$

cioè

$$\operatorname{arc\,sen}\zeta = \frac{1}{i}\log(\sqrt{1-\zeta^2}+i\zeta), \operatorname{arcsen}(x+iy) = \frac{1}{i}\log[\sqrt{1-(x+iy)^2}+i(x+iy)].$$

In modo analogo

$$\operatorname{arc\,cos}\zeta = \frac{1}{i}\log(\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2}), \operatorname{arc\,cos}(x+iy) = \frac{1}{i}\log[x+iy+i\sqrt{1-(x+iy)^2}].$$

E qui pure si riconoscerebbe facilmente che hanno luogo per queste funzioni tutte le proprietà delle funzioni circolari inverse $\operatorname{arc\,sen}\zeta$, $\operatorname{arc\,cos}\zeta$ quando ζ è reale e $|\zeta| \leq 1$.

Se è $\operatorname{tg} w = \zeta$ diremo $w = \operatorname{arc\,tg}\zeta$. Dalle formole

$$e^{iw} = \cos w + i \operatorname{sen} w$$

$$e^{-iw} = \cos w - i \operatorname{sen} w$$

abbiamo

$$e^{2iw} = \frac{\cos w + i \operatorname{sen} w}{\cos w - i \operatorname{sen} w} = \frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta},$$

e da questa

$$w = \operatorname{arc\,tg}\zeta = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta}.$$

Concetto di funzione di variabile complessa.

133. Siano $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ funzioni reali delle variabili reali x, y in un campo C. La quantità $w = u + iv$ è funzione delle x, y nel campo C, ed anche funzione della variabile complessa $z = x + iy$ in quanto che ai valori $z = x + iy$ appartenenti a C corrispondono valori determinati per u, v e quindi per w; e potremo perciò anche scrivere $w = w(z)$ nel campo C. Ora è manifesto che, in questo modo, lo studio delle funzioni $w(z)$ di una variabile complessa z rientrerebbe completamente in quello delle funzioni di due variabili reali. Epperò non si considerano tutte le funzioni $w(z)$, ma solo quelle di una certa classe, soddisfacente ad una condizione, e sono esse quelle che si assumono come vere e proprie funzioni di una variabile complessa, come ora andiamo a vedere.

La $w = w(z)$ abbia valore determinato in un punto $z = x - iy$, e in un intorno di z si mantenga finita, cioè siano tali le $u(x, y)$, $v(x, y)$. Diamo a z l'aumento $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ e consideriamo il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{w(z + \Delta z) - w(z)}{\Delta z}.$$

Se di questo esiste un unico limite finito quando Δz converge comunque a zero, cioè quando Δx, Δy convergono comunque a zero, questo unico limite vien definito come la derivata di $w = w(z)$ rapporto a z nel punto z, che si indica colle notazioni $\frac{dw}{dz}$, $w'(z)$.

Le funzioni di una variabile reale possono ammettere derivata a destra e a sinistra diverse tra loro, o non ammetterne, dipendentemente dal duplice modo col quale può convergere a zero l'aumento della variabile indipendente. Ora, mentre l'aumento di una variabile reale può convergere a zero solamente in due direzioni diverse, l'aumento Δz può convergere a zero in infiniti modi diversi, in infinite diverse direzioni, corrispondenti al diverso modo di variare del rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quando Δx e Δy convergono a zero; e corrispondentemente a questi diversi modi di tendere a zero di Δz potremo avere diversi limiti del rapporto incrementale $\frac{\Delta w}{\Delta z}$, o avere limite

determinato per alcuni, per altri no. Esaminiamo ora quale sia la condizione necessaria e sufficiente affinchè esista un unico limite finito del rapporto incrementale, cioè affinchè esista nel punto ζ la derivata di $w(\zeta)$, ammessa per le funzioni $u(x, y)$, $v(x, y)$ la sola condizione che per esse valga nel punto $\zeta = x + iy$ il teorema sul differenziale totale.

Avremo allora

$$\frac{\Delta w}{\Delta \zeta} = \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) + iv(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

dove α, β indicano quantità che convergono a zero con Δx, Δy.

Osservando che $\dfrac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \dfrac{\alpha + \beta\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}{1 + i\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \dfrac{\alpha\dfrac{\Delta x}{\Delta y} + \beta}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y} + i}$, si vede subito che, comunque convergano a zero Δx, Δy, esista o non esista, sia finito o infinito il limite di $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, è uguale a zero il limite di $\dfrac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$, di guisa che sarà

$$\lim_{\Delta z = 0} \frac{\Delta w}{\Delta \zeta} = \lim \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Ora affinchè il limite del secondo membro sia indipendente dal modo col quale tendono a zero Δx, Δy fa bisogno e basta che il rapporto stesso di cui si vuole il limite sia indipendente da Δx, Δy, altrimenti, se ciò non fosse, il limite del rapporto. quando Δx, Δy tendessero a zero in modo che fosse $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = m$, m essendo qualunque numero reale prefissato, sarebbe $\dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + i\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)m}{1 + m}$, quan-

tità che varia con m. Ma la condizione necessaria e sufficiente affinchè quel rapporto non dipenda da $\Delta x, \Delta y$ è che sia [1]

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\right) i - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0,$$

da cui

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Il *Cauchy* chiamava funzioni *monogene* di $x + iy$ quelle $w = f(x + iy) = u + iv$ che ammettono generalmente derivata finita cioè quelle che, in un certo campo, soddisfanno alle precedenti equazioni a derivate parziali. Sono le sole funzioni monogene quelle che appunto noi prendiamo a considerare, e sono esse che, seguendo *Riemann*, chiamiamo funzioni della variabile complessa z; e, notando che le equazioni (1) possono compendiarsi nella $\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, poniamo la definizione;

Se x , y *sono variabili reali, diremo che*

$$\mathrm{w} = \mathrm{w}(\mathrm{z}) = \mathrm{f}(\mathrm{x}\,,\mathrm{y}) = \mathrm{u}(\mathrm{x}\,,\mathrm{y}) + \mathrm{iv}(\mathrm{x}\,,\mathrm{y})$$

è funzione di x + iy *in un campo, se in ogni suo punto, fatta astrazione da un numero finito di punti o di linee, soddisfa alla relazione*

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{i}\,\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}} = 0.$$

---

[1] Invero affinchè un rapporto $\frac{ah + bk}{a'h + b'k}$ sia indipendente da h e k è necessario e sufficiente che sia nullo il determinante $ab' - a'b$, giacchè se è $\frac{ah + bk}{a'h + b'k} = g$, g indipendente da h, k, avremo $ah + bk = g(a'h + b'k)$ qualunque siano h, k e c fi $a = ga'$, $b = gb'$, da cui $ab' - a'b = 0$; e se $ab' - a'b = 0$ cioè $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, detto g e sto comune rapporto, cosichè $a = ga'$, $b = gb'$, abbiamo $\frac{ah + bk}{a'h + b'k} = g$.

Notiamo subito come le funzioni elementari definite nel n. 128 seguenti siano effettivamentente funzioni di $x+iy$ nel senso Rieanniano; e difatti ad es.: per

$$f(x,y)=e^{x+iy}=e^{x}(\cos y+i\operatorname{sen} y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{x}(\cos y+i\operatorname{sen} y),\ \frac{\partial f}{\partial y}=e^{x}(-\operatorname{sen} y+i\cos y),\ \frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}=0;$$

:r

$$f(x,y)=\log(x+iy)=\log\sqrt{x^2+y^2}+i\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}+2k\pi\right),\ \text{è}$$

$$=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{iy}{x^2+y^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{ix}{x^2+y^2},\ \frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}=0,\ \text{etc.}$$

Notiamo ancora che, supposto le u, v ammettano derivate seonde rispetto ad x, y e le derivazioni siano invertibili, le (1), deriite rapporto ad x e ad y, danno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

Posto $\Delta^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, vediamo così che la parte reale u ed il oefficiente di i di una funzione $u+iv$ di una variabile complessa $=x+iy$ soddisfanno alle equazioni a derivate parziali di 2° ordine $\Delta^2 u=0$, $\Delta^2 v=0$ ($\Delta^2=0$ equazione di *Laplace*). Le funzioni che oddisfanno alla equazione di *Laplace*, $\Delta^2=0$, si dicono *funzioni armoniche*. Affinchè due funzioni u, v di x, y possano essere parte reale coefficente dell'immaginario i di una funzione di una variabile omplessa $x+iy$ non basta che esse siano funzioni armoniche, ma deono ancora soddisfare alle equazioni (1), perchè le $\Delta^2 u=0$, $\Delta^2 v=0$ ono conseguenza delle (1), ma non inversamente. Quando siano ier le u, v soddisfatte anche le (1), le funzioni u, v si dicono funioni armoniche *associate*.

Per le nostre funzioni di variabile complessa avremo intanto

$$w'(z)=\frac{dw}{dz}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial w}{\partial y}.$$

S intende ora, senz'altro, come per le funzioni di variabili com-

plesse valgano le stesse regole di derivazione, relative alla somma, al prodotto di più funzioni etc., alle funzioni di funzioni etc. dimostrate per le funzioni di variabili reali.

La continuità di una funzione $w(z)$ in un punto z_0 si definisce in modo analogo a quello per le funzioni di una variabile reale cioè, $w(z)$ è continua in z_0 ove ha il valore $w(z_0)$ se, per ogni σ positivo, esiste un intorno di z_0 per tutti i punti z del quale sia $|w(z_0) - w(z)| < \sigma$ o, ciò che è lo stesso, se le $u(x, y)$, $v(x, y)$ sono funzioni assolutamente continue nel punto (x_0, y_0). E si intende che la condizione della continuità, per le nostre funzioni di variabile complessa, è implicita nella definizione stessa di funzione, perchè l'esistenza della derivata ha per conseguenza, come si riconosce subito, la continuità della funzione.

134. Calcoliamo ora le derivate delle funzioni semplici.

1) $$f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y),$$

$$f'(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial x} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^z.$$

La derivata è la stessa come se z fosse variabile reale. Vedremo che questo succede sempre.

2) $$\cos z = \cos x \frac{e^y + e^{-y}}{2} + i \operatorname{sen} x \frac{e^{-y} - e^y}{2},$$

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \frac{e^y + e^{-y}}{2} - i \cos x \frac{e^{-y} - e^y}{2};$$

$$\frac{d \cos z}{dz} = \frac{\partial \cos z}{\partial x} = -\operatorname{sen} x \frac{e^y + e^{-y}}{2} + i \cos x \frac{e^{-y} - e^y}{2} = -\operatorname{sen} z.$$

Analogamente $\dfrac{d \operatorname{sen} z}{dz} = \cos z$.

3) $$\log z = \log \sqrt{x^2 + y^2} + i\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} + 2k\pi\right),$$

$$\frac{d \log z}{dz} = \frac{\partial \log z}{\partial x} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{z}.$$

) $\zeta^{z_1} = e^{z_1 \log \zeta}$,

$$\frac{d\zeta^{z_1}}{d\zeta} = e^{z_1 \log \zeta} z_1 \frac{1}{\zeta} = z_1 \frac{\zeta^{z_1}}{\zeta} = z_1 \zeta^{z_1 - 1},$$

$$\frac{d\zeta^{z_1}}{dz_1} = e^{z_1 \log \zeta} \log \zeta = \zeta^{z_1} \log \zeta.$$

) $\operatorname{arc\,sen} \zeta = \frac{1}{i} \log(\sqrt{1-\zeta^2} + i\zeta)$,

$$\frac{d \operatorname{arc\,sen} \zeta}{d\zeta} = \frac{1}{i} \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2} + i\zeta} \left(\frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} + i \right) = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}};$$

$$\operatorname{arc\,tg} \zeta = \frac{1}{2i} \log \frac{1+i\zeta}{1-i\zeta}.$$

$$\frac{d \operatorname{arc\,tg} \zeta}{d\zeta} = \frac{1}{2i} \left(\frac{i}{1+i\zeta} + \frac{i}{1-i\zeta} \right) = \frac{1}{1+\zeta^2}.$$

135. Una variabile complessa ζ può per infinite successioni di ilori e con continuità passare da un valore ζ_0 ad un altro qualunque lore ζ; basta osservare che i due punti ζ_0 e ζ possono venire conunti tra loro mediante infinite linee continue.

Sia data la $f(\zeta)$ pei punti d'un campo C, e sia ζ_0 un punto so qualunque e ζ un altro punto qualunque di C, f_0 uno dei valori e la $f(\zeta)$ assume in ζ_0. Se, qualunque sia la linea appartenente a , che la variabile ζ percorre per andare da ζ_0 in ζ, il valore che trova avere assunto la $f(\zeta)$ nel punto ζ è sempre lo stesso, avendo mpre preso per valore iniziale il valore f_0, e facendo succedere i ilori di $f(\zeta)$ con legge di continuità, la funzione $f(\zeta)$ dicesi *monoroma* nel campo C. Se invece ciò non avviene dicesi *polidroma*. evidente che una funzione univalente, come e^z, cos ζ e simili, è ecessariamente monodroma. Si riconosce subito che, affinchè una unzione sia monodroma in C fa bisogno e basta che, se ζ_0 è un unto qualunque del campo ed f_0 il valore della funzione che assuiamo in ζ_0, facendo percorrere alla variabile una linea l qualunque i C, che cominci e termini in ζ_0, il valore che si trova avere la unzione, quando la variabile ritorna in ζ_0, sia ancora f_0. Infatti se la unzione è monodroma, e ζ è un punto qualunque di l, indichiamo on $\zeta_0 n \zeta$ una parte e con $\zeta n \zeta_0$ l'altra parte di l. Percorrendo

$z_0 m z$ e $z_0 n z$ arriviamo in z collo stesso valore della funzione, che indicheremo con f; cosichè, se dopo aver percorso la linea $z_0 m z$ ci partiamo da z col valore f e percorriamo la linea $z m z_0$, la funzione riprenderà i valori già presi, in senso inverso, e arriveremo in z_0 col valore f_0. Quindi percorrendo la linea $z_0 n z m z_0$, cioè l, ritroviamo alla fine per la nostra funzione il valore f_0. Inversamente, se questo avviene, e se alla fine del movimento ci partiamo da z_0 col valore f_0 percorrendo la linea $z_0 m z$, arriveremo in z col valore f, col quale siamo giunti percorrendo la linea $z_0 n z$.

Una stessa funzione può essere monodroma in alcune parti del piano ed in altre no. Prendiamo l'esempio più semplice $f(z) = \sqrt{z}$. Posto $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, la $f(z)$ ha in ogni punto del piano i due valori $\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{2}\right)$, $(k = 0, 1)$, cioè esplicitamente,

$$\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right),$$

$$\sqrt{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)\right] = -\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right).$$

Consideriamo un campo C tale che una linea qualunque di esso, che principia e termina in uno stesso punto, non possa circondare il punto $z = 0$, come ad esempio un campo il cui contorno sia di un sol pezzo e non contenga nell'interno il punto $z = 0$. In questo campo la funzione $\sqrt{z}$ è monodroma, perchè partendoci da z_0 con uno dei suoi valori, poniamo $\sqrt{\rho_0}\left(\cos\frac{\theta_0}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}\right)$, e percorrendo una linea qualunque di C, ritorniamo in z_0 collo stesso valore, giacchè ρ ripiglia il valore ρ_0 e θ il valore θ_0. La funzione invece non è monodroma in un campo che non goda della detta proprietà, perchè, partendoci da z_0 col valore precedente e facendo percorrere alla variabile una linea chiusa che circondi il punto $z = 0$ in modo che θ varii da θ_0 a $\theta_0 + 2\pi$ e quindi l'argomento o angolo polare di $\sqrt{z}$ da $\frac{\theta_0}{2}$ a $\frac{\theta_0 + 2\pi}{2} = \frac{\theta_0}{2} + \pi$, arriviamo in z_0 col valore

$$\sqrt{\rho_0}\left[\cos\left(\frac{\theta_0}{2} + \pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_0}{2} + \pi\right)\right] = -\sqrt{\rho_0}\left(\cos\frac{\theta_0}{2} + i \operatorname{sen} \quad \right)$$

cioè coll'altro dei due valori che $\sqrt{z}$ possiede in z_0.

136. Se x, y indicano le coordinate cartesiane ortogonali dei punti d'un piano, ed u, v quelle dei punti d'un altro piano, due relazioni della forma

$$u = u(x, y), \qquad v = v(x, y)$$

stabiliscono un legame tra i punti dei due piani, ovvero ci danno una rappresentazione od immagine di un piano sull'altro. Ad una linea $f(u, v) = 0$ sul piano delle u, v corrisponde nel piano delle x, y la linea $f[u(x, y), v(x, y)] = 0$.

Siano ora due linee nel piano u, v

$$f(u, v) = 0, \qquad \varphi(u, v) = 0$$

che passino per un punto (u, v). Indicando con α, β gli angoli delle tangenti nel punto (u, v) alle due linee coll'asse delle u, la tangente dell'angolo A che formano tra loro queste due tangenti, cioè, come si suol dire, dell'angolo che fanno tra loro in (u, v) le due linee, è

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta},$$

ossia, ricordando che $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{f'_u}{f'_v}$, $\operatorname{tg}\beta = -\dfrac{\varphi'_u}{\varphi'_v}$, è

$$\operatorname{tg} A = \frac{\varphi'_u f'_v - f'_u \varphi'_v}{f'_u \varphi'_u + f'_v \varphi'_v}.$$

A queste due linee, sul piano x, y, corrispondono le due linee

$$f[u(x, y), v(x, y)] = 0, \qquad \varphi[u(x, y), v(x, y)] = 0,$$

che passano per un punto (x, y) corrispondente al punto (u, v); se indichiamo con μ, ν gli angoli che le tangenti nel punto (x, y) a queste due linee fanno coll'asse delle x,

$$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg}\mu - \operatorname{tg}\nu}{1 + \operatorname{tg}\mu \operatorname{tg}\nu}$$

è la tangente dell'angolo B che nel punto (x, y) fanno tra loro queste due linee. Ma, se si suppone che le funzioni $u(x, y)$, $v(x, y)$ ammettano derivate parziali, è

$$\operatorname{tg}\mu = -\frac{f'_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + f'_v \dfrac{\partial v}{\partial x}}{f'_u \dfrac{\partial u}{\partial y} + f'_v \dfrac{\partial v}{\partial y}}, \qquad \operatorname{tg}\nu = -\frac{\varphi'_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + \varphi'_v \dfrac{\partial v}{\partial x}}{\varphi'_u \dfrac{\partial u}{\partial y} + \varphi'_v \dfrac{\partial v}{\partial y}},$$

e quindi

$$(1) \qquad \operatorname{tg} B =$$

$$= \frac{\left(f'_u \frac{\partial u}{\partial y} + f'_v \frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\varphi'_u \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi'_v \frac{\partial v}{\partial x}\right) - \left(f'_u \frac{\partial u}{\partial x} + f'_v \frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\varphi'_u \frac{\partial u}{\partial y} + \varphi'_v \frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\left(f'_u \frac{\partial u}{\partial y} + f'_v \frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\varphi'_u \frac{\partial u}{\partial y} + \varphi'_v \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(f'_u \frac{\partial u}{\partial x} + f'_v \frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\varphi'_u \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi'_v \frac{\partial v}{\partial x}\right)}$$

$$= \frac{(f'_v \varphi'_u - f'_u \varphi'_v)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{f'_u \varphi'_u \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] + f'_v \varphi'_v \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] + (f'_u \varphi'_v + f'_v \varphi'_u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)}.$$

Se ora supponiamo, in particolare, che le funzioni $u(x, y)$, $v(x, y)$ siano funzioni armoniche associate, cioè siano la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di una funzione

$$w = w(z) = w(x + iy) = u + iv = u(x, y) + i\,v(x, y)$$

della variabile complessa $z = x + iy$, allora, essendo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

sarà anche

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}, \end{cases}$$

cosichè avremo

$$\operatorname{tg} B = \frac{f'_v \varphi'_u - f'_u \varphi'_v}{f'_u \varphi'_u + f'_v \varphi'_v} = \operatorname{tg} A,$$

e quindi $B = A$. In conseguenza nella rappresentazione dei due piani uno sull'altro ottenuta mediante la funzione monogena $w = w(z)$ ossia $u + iv = u(x, y) + i\,v(x, y)$, le linee corrispondentesi nei due piani fanno tra loro angoli uguali; si ha una rappresentazione che si dice *rappresentazione conforme* di un piano sull'altro.

Vi può essere eccezione in alcuni punti del piano, nei quali le derivate parziali di u, v presentino qualche particolarità, siano, poniamo, zero od infinito, poichè allora $tg\,B$ non è più data dalla formola (1).

Notiamo poi che, affinchè risulti sempre $tg\,A = tg\,B$, occorre che siano verificate le equazioni (2); di queste tre equazioni, una è conseguenza delle altre due; infatti la

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

scritta nella forma

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0$$

combinata colla prima delle (2) ci dà

$$\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

cioè la

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Ora dalle due

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

ricaviamo subito appunto $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ le quali due equazioni tengono quindi luogo delle (2).

Cosichè tutte le rappresentazioni conformi di un piano (piano delle $z = x + iy$) su un altro piano (piano delle $w = u + iv$) si ottengono mediante la relazione $w = w(z)$, ove $w(z)$ è funzione (monogena) della variabile complessa z.

137. Qui non sarà inutile ricordare che, dicendo che il valore di una quantità complessa è infinito, si intende che è infinito il suo

modulo, qualunque ne sia l'argomento, allo stesso modo che dicendo che essa è zero, si intende che è nullo il suo modulo, qualunque ne sia l'argomento. E perciò, come al valore zero corrisponde sul piano complesso un unico punto, l'origine delle coordinate, così ai valori infiniti di z, corrisponde un unico punto, il così detto punto all'infinito sul piano; cosichè questo piano complesso, nel quale rappresentiamo, univocamente e con legge di continuità [1], i valori della variabile complessa z, si deve considerare come una superficie chiusa con un solo punto all'infinito.

Questo modo di considerare il piano, diverso da quello della geometria analitica e proiettiva, le cui convenzioni assegnano al piano una retta all'infinito, non deve ingenerare alcuna difficoltà; basta riflettere che il piano qui interviene come immagine geometrica della variabilità complessa e potrebbe essere sostituito da un'altra qualunque superficie, purchè la corrispondenza tra i punti di questa ed i valori della variabile complessa avvenisse in modo univoco e con legge di continuità. E così che, infatti, si suole, e giova alcune volte, usare anche la sfera come immagine della variabilità complessa. Per vedere ciò basta riportare i punti del piano su quelli della sfera (poniamo di raggio unitario) mediante la proiezione stereografica, che si ottiene ponendo il centro di proiezione in un punto 0 della sfera e il piano complesso parallelo al piano tangente alla sfera in 0 (in particolare facendo passare il piano complesso pel centro della sfera, o pel punto di essa diametralmente opposto ad 0), e proiettando dal punto 0 i punti del piano sulla sfera.

Si può anche osservare che, se z' indica una nuova variabile complessa, rappresentata geometricamente sopra un altro piano che diremo delle z', e se si stabilisce la relazione $z = \frac{1}{z'}$, si vede che ai valori di z il cui modulo è comunque grande corrispondono valori di z' il cui modulo è comunque piccolo, ed in conseguenza a punti a distanza comunque grande dall'origine nel piano delle z, corrispondono nel piano delle z' punti comunque vicini all'origine; o, come suol dirsi, al punto all'infinito nel piano delle z corrisponde

---

[1] In modo cioè che se P_0 è il punto del piano che corrisponde a numero z_0, assegnato σ positivo, sia possibile determinare un δ tale che a tutti i numeri z pei quali $|z - z_0| < \delta$ corrispondano punti P la cui distanza $\overline{PP_0}$ da P_0 sia minore di σ.

sul piano delle z' il punto *zero*; e viceversa. Mediante la posizione $z = \frac{1}{z'}$, lo studio relativo a valori di z di modulo comunque grande (in un intorno del punto all'infinito) si riporta allo studio relativo a valori di z' di modulo comunque piccolo (in un intorno dell'origine sul piano z').

Serie di potenze — Funzioni analitiche.

138. Se $c_1, c_2, \ldots c_n, \ldots a$ indicano quantità complesse e $z = x + iy$ è una variabile complessa, consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$, o più semplicemente la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Queste serie, di cui sono caso particolare quelle considerate ai n. 146 e seguenti del I volume, chiamansi, come quelle, serie di potenze.

Ora con modificazioni semplicissime ed evidenti, come sarebbe cambiare la parola « valore assoluto » in « modulo » e simili, i teoremi ai n. 147 e seguenti del I volume si estendono immediatamente al caso attuale. Abbiamo quindi, senz'altro, i teoremi seguenti:

Se α, g *sono quantità positive, tali che per ogni* $n \geq m$ *è* $|c_n| \alpha^n < g$, *la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *è assolutamente convergente se* $|z| < \alpha$, *cioè per tutti i punti* z *interni ad un circolo di raggio* α *col centro nell'origine delle coordinate, circolo che indicheremo con* $(0, \alpha)$, *ed è equiconvergente in qualunque campo interno a detto circolo, che chiamasi un circolo di convergenza.*

Se una serie $\sum c_n z^n$ *è convergente per* $z = z'$ *essa è assolutamente convergente in tutti i punti interni al circolo* $(0, |z'|)$; *e se per* $z = z'$ *essa è non convergente, o convergente non assolutamente, essa è non convergente per tutti i punti* z *esterni al circolo* $(0, |z'|)$.

Se α, g *sono numeri positivi, e* $\varphi(n)$ *una funzione di* n, *positiva pei valori interi positivi di* $n \geq m$, *e tale che quando* n *cresce per numeri interi positivi sia* $\lim \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = k \leq 1$, *e si ha per* $n \geq m$,

$|c_n|\,\alpha^n < g\,\varphi(n)$, *il circolo* $(0, \alpha)$ *è circolo di convergenza per la serie* $\Sigma c_n z^n$.

I termini d'una serie $\Sigma c_n z^n$ sono funzioni monogene di z, essendo $n\,c_n z^{n-1}$ la loro derivata; ora:

Se $(0, \alpha)$ *è circolo di convergenza per la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, *lo è pure per le serie formate colle derivate successive dei termini della serie stessa, cioè per le serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,c_n z^{n-1},\quad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,c_n z^{n-2},\quad \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)\,c_n z^{n-3}, \ldots$$

Dal fatto poi che queste serie sono equiconvergenti in qualunque campo interno al circolo $(0, \alpha)$, e da noti teoremi dimostrati sulla derivazione delle serie, estendibili senz'altro al caso delle serie complesse, risulta immediatamente che:

Nei punti interni ad un circolo di convergenza ogni serie di potenze ammette derivata unica, che si ottiene derivando termine a termine la serie stessa, la quale è perciò in detti punti una funzione monogena; ed ammette tutte le successive derivate, che sono pure funzioni monogene.

Analogamente poi a quanto dimostrammo al n. 150 vol. I, si proverebbe che per ogni serie di potenze $\Sigma c_n z^n$ esiste un *circolo di convergenza* $(0, R)$, tale cioè che essa è assolutamente convergente nei punti interni ad esso, e divergente nei punti esterni. Sulla circonferenza di detto circolo la serie potrà essere, secondo la sua natura, convergente, divergente, o convergente non assolutamente, e si potranno presentare queste circostanze in diversi punti di detta circonferenza per ogni singola serie. Il circolo di convergenza può essere di raggio nullo, di raggio R finito e diverso da zero, o di raggio infinito; vedansi gli esempi a pag. 292 del vol. I, valevoli se la variabile x è complessa.

139. Dimostriamo ora un importante teorema dovuto a Cauchy che dà una relazione, per ogni serie di potenze $\Sigma c_n z^n$, tra il raggio del suo vero circolo di convergenza e i coefficienti c_n.

Premettiamo il seguente teorema (Vedi Cauchy, Cours d'analyse de l'École Polytechnique, 1.e partie, pag. 132, 143), di cui è caso particolare quello dimostrato nel primo volume al n. 129:

Data una serie qualunque $\sum_{1}^{\infty} u_n$ consideriamo il gruppo di numeri

o punti

$$|u_1|, \quad \sqrt{|u_2|}, \quad \sqrt[3]{|u_3|}, \ldots \quad \sqrt[n]{|u_n|}, \ldots$$

Sia k un punto tale che, in ogni intorno comunque piccolo di esso cada un numero infinito di punti del gruppo, ma al di là dell'estremo superiore dell'intorno cada al più un numero finito di punti del gruppo. (Il *Cauchy* chiamava il numero k il limite dei più grandi valori dell'espressione $\sqrt[n]{|u_n|}$ al crescere di n). Questo punto k è, come subito si riconosce, il punto limite, più alla destra, del nostro gruppo.

Così ad esempio, sia

$$u_1 = \frac{1}{2}, \; u_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \; u_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3, \; u_4 = \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^4,\right.$$

$$u_5 = \left(\frac{1}{4}\right)^5, \; u_6 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^6, \ldots$$

ossia le u si ottengano dalle espressioni

$$\left(\frac{1}{2n}\right)^{4n-3}, \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{4n-2}, \left(\frac{1}{2n+1}\right)^{4n-1}, \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{4n}$$

facendo in esse successivamentente $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$; allora è $k = 1$.

Ora abbiamo:

La serie $\sum_1^\infty u_n$ *è assolutamente convergente se* $k < 1$, *e non convergente se* $k > 1$.

Invero, se $k < 1$, prendiamo un numero $U < 1$ e $> k$. Allora per la natura stessa del numero k, esisterà un m tale che per gli $n \geq m$ risulterà

$$\sqrt[n]{|u_n|} < U \qquad \text{ossia} \qquad |u_n| < U^n,$$

da cui risulta subito, osservando che la serie $\sum U^n$ è convergente per essere $U < 1$, la convergenza della serie $\sum |u_n|$ e quindi la convergenza assoluta della $\sum u_n$.

Se poi $k > 1$, prendiamo $U > 1$ e $< k$, ed allora, per la natura del numero k, per quanto grande si assuma un numero m, esisteranno infiniti indici $n \geq m$ pei quali sarà

$$\sqrt[n]{|u_n|} > U, \qquad |u_n| > U^n.$$

È quindi impossibile sia $\lim_{n=\infty} u_n = 0$, condizione necessaria alla

convergenza della serie Σu_n, perchè, assegnato un σ qualunque, basta prendere n' in modo che sia $U^{n'} > \sigma$, ciò che è sempre possibile perchè $U > 1$, ed allora per tutti gli infiniti $n > n'$, pei quali $\sqrt[n]{|u_n|} > U$, avremo $|u_n| > U^n > U^{n'} > \sigma$.

La serie Σu_n non può dunque essere convergente

Da quì si ricava subito il teorema di Cauchy (Loco citato pag. 151, 286):

Indicando con α il numero limite più alla destra per il gruppo di numeri

$$|c_1|, \sqrt{|c_2|}, \ldots \sqrt[n]{|c_n|}, \ldots,$$

il vero circolo di convergenza della serie $\sum_1^\infty c_n z^n$ è il circolo $\left(0, \frac{1}{\alpha}\right)$.

Infatti, poichè è $\sqrt[n]{|c_n| |\zeta|^n} = |\zeta| \sqrt[n]{|c_n|}$, la quantità analoga alla k del precedente teorema per la nostra serie di potenze è $\alpha |\zeta|$; essa serie sarà quindi assolutamente convergente se $|\zeta| \alpha < 1$, cioè se $|\zeta| < \frac{1}{\alpha}$ e non convergente se $|\zeta| \alpha > 1$, cioè se $|\zeta| > \frac{1}{\alpha}$, ciò che prova il teorema.

In particolare se $\alpha = 0$, è $\alpha |\zeta| < 1$ qualunque sia ζ e quindi il circolo vero di convergenza è tutto il piano complesso, è un circolo di raggio infinito $(0, \infty)$; e se α è infinito abbiamo $\alpha |\zeta| > 1$, qualunque sia ζ, e quindi il vero circolo di convergenza si riduce al solo punto *zero*, cioè è il circolo $(0, 0)$.

Notiamo che se fosse $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l$, sarebbe $l = k$. E in virtù di un noto teorema sui limiti dovuto a Cauchy, [1] se il $\lim_{n=\infty} \left|\frac{u_{n-1}}{u_n}\right| =$ o è infinito, è anche il $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l$ o è infinito. Questa osservazione può riuscire spesso utile.

---

[1] Il teorema è il seguente: Se al crescere di x, $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ ha un limite finito o l'infinito, e se $f(x)$ si mantiene sempre positiva, allora anche $[f(x)]^{\frac{1}{x}}$ converge verso lo stesso limite.

Applicando, ad esempio, questo teorema alle serie

$$1+z+\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^3}{3^3}+\ldots+\frac{z^n}{n^n}+\ldots,$$

$$1+z+2^2z^2+3^3z^3+\ldots n^n z^n+\ldots$$

riconosce subito che il vero circolo di convergenza della prima ie è $(0,\infty)$, quello della seconda è $(0,0)$ cioè si riduce alla a origine delle coordinate.

Per le serie $1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n z^n$, $1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n z^n$ esso è il colo $(0,1)$; e per le serie $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}z^n$, $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}z^n$, os-

vando che $\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}=\lim\frac{n+1}{n}\,\frac{n-1}{n}=\lim\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=1,$

$\lim\dfrac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n}{n-1}}=1$, si vede pure che il vero circolo di convergenza è circolo $(0,1)$.

140. Tutti i teoremi ora dimostrati per le serie $\sum_0^{\infty} c_n z^n$ hanno ogo, con evidente modificazione, per le serie della forma $\sum_0^{\infty} c_n(z-a)^n$, si possono dedurre da quelli ponendo $z-a=z_1$. Così si riconoerebbe subito che se la serie $\Sigma c_n(z-a)^n$ è convergente per $=z'$, lo è pure, ed assolutamente, per ogni z tale che $|z-a|<|z'-a|$, oè in tutti i punti interni al circolo $(a, |z'-a|)$ di centro a e di ggio uguale al segmento $\overline{a z_1}$; si riconoscerebbe l'esistenza di un ro circolo di convergenza col centro nel punto a, etc.

Sono pure ovvie le considerazioni da farsi per le serie di poenze negative, cioè della forma

$$\sum_0^{\infty}\frac{c_n}{z^n},\qquad \sum_0^{\infty}\frac{c_n}{(z-a)^n}.$$

Ponendo $\frac{1}{z} = z_1$, o $\frac{1}{z-a} = z_1$, queste serie diventano le serie di potenze positive $\sum_0^\infty c_n z_1^n$, ed allora basterà tradurre relativamente alla variabile z i teoremi ora dimostrati per queste ultime serie. Così si troverebbe che se una serie $\sum_0^\infty \frac{c_n}{z^n}$ è convergente per $z = z'$, lo è assolutamente per tutti i valori z di modulo $> |z'|$, cioè per tutti i punti esterni al circolo $(0, |z'|)$; che per queste serie esiste un vero circolo di convergenza $(0, R)$ tale che pei punti esterni la serie è assolutamente convergente, ed equiconvergente in qualunque campo esterno, e nei punti interni è divergente, etc.

È pure facile dedurre i teoremi relativi alle serie ordinate per potenze positive e negative cioè per le serie della forma

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n, \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n;$$

basterà, poniamo per la prima, considerare le due serie $\sum_0^\infty c_n z^n$, $\sum_1^\infty \frac{c_n}{z^n}$; e si riconoscerà subito che se la $\sum c_n z^n$ è convergente per $z = z_1$, e la $\sum_1^\infty \frac{c_n}{z^n}$ lo è per $z = z_2$, ed è $|z_1| > |z_2|$, allora la serie $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n$ è assolutamente convergente se $|z_2| < |z| < |z_1|$, cioè pei punti interni alla corona circolare col centro nell'origine e di raggi $|z_2|$, $|z_1|$; etc.

141. Sia $(0, R)$ il vero circolo di convergenza della serie $\sum_0^\infty c_n z^n$ che indicheremo con $P(z, 0)$. Prendiamo un punto a interno a questo circolo; allora, con procedimento analogo a quello del n. 151 vol. I. dalla serie $P(z, 0)$ si deduce una serie, che indicheremo con $P(z, 0, a)$ ordinata secondo le potenze di $z - a$,

$$P(z, 0, a) = \sum_0^\infty a_n (z-a)^n,$$

convergente almeno nel circolo $(a, R - |a|)$, pei punti z interni al

ual circolo avremo

$$P(z, 0) = P(z, 0, a)$$

dove

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} c_{n+k} a^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} c_{n+k} a^k, \text{ o anche } a_n = \frac{P^{(n)}(a, 0)}{n!},$$

ssendo $\binom{p}{q} = \frac{p(p-1)\ldots(p-q+1)}{1.2.3\ldots q}$, perchè

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n P(z, 0)}{dz^n} = \frac{1}{n!} P^{(n)}(z, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} c_{n+k} z^k.$$

La serie $P(z, 0, a)$, ottenuta in questo modo, ed i cui coefficienti a_n sono legati coi coefficienti della primitiva serie $P(z, 0)$ dalla lazione precedente, si dice la *serie dedotta* (*immediatamente*) *dalla* $(z, 0)$ *rispetto al punto* a; il vero circolo di convergenza della serie edotta è almeno il circolo $(a, R - |a|)$, cioè il circolo di centro tangente al circolo $(0, R)$ ed interno a questo, ma, come bene ibito si intende, potrebbe essere un circolo di centro a e di raggio aggiore di $R - |a|$.

142. Ragionando in modo analogo a quello del n. 152 vol. I si mostrano i teoremi:

Ogni serie di potenze, che non sia nulla o uguale sempre ad a costante, può annullarsi o prendere uno stesso valore, in un nuero solamente finito di punti del suo circolo di convergenza, se esto è finito; e se è infinito, di punti, nei quali si annulla o prende o stesso valore, ne può cadere un numero solamente finito in quanque campo finito.

Se due serie di potenze $\sum c_n (z - z_0)^n$, $\sum b_n (z - z_0)^n$ *sono uguali infiniti punti comuni ai loro circoli di convergenza, esse sono ntiche.*

143. Sia b un punto interno al circolo di convergenza della serie $z, 0, a)$ dedotta dalla $P(z, 0)$; allora, collo stesso procedimento deduzione, cioè osservando che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [z - b + b - a]^n$

che quest'ultima serie si può ridurre alla forma $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - b)^n$,

dalla serie $P(\zeta, 0, a)$ dedurremo la serie

$$P(\zeta, 0, a, b) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (\zeta - b)^n$$

dove

$$b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} a_{n+k} (b-a)^k = \frac{P^{(n)}(b, 0, a)}{n!}.$$

Questa serie $P(\zeta, 0, a, b)$, che diremo dedotta (mediatamente) dalla $P(\zeta, 0)$ rispetto al punto b, è certamente convergente almeno nel cerchio col centro in b e tangente internamente al vero circolo di convergenza della serie $P(\zeta, 0, a)$ ed ivi è uguale a $P(\zeta, 0, a)$.

Dalla $P(\zeta, 0, a, b)$ potremo dedurre analogamente una serie $P(\zeta, 0, a, b, c)$ e così di seguito; ed hanno così origine le serie dedotte dalla serie primitiva $P(\zeta, 0)$.

Abbiamo notato che il circolo di convergenza della $P(\zeta, 0, a)$ è almeno il circolo di centro a e tangente internamente al circolo $(0, R)$; possiamo ora riconoscere che è al più il circolo di centro a e tangente esternamente al circolo $(0, R)$. Se, invero, il suo circolo di convergenza (a, R_1) fosse più ampio, dedurremmo dalla $P(\zeta, 0, a)$ la serie $P(\zeta, 0, a, 0)$ rispetto al punto *zero*; il circolo di convergenza $(0, R_2)$ di questa serie è almeno il circolo di centro *zero* tangente internamente al circolo (a, R_1) ed è perciò $R_2 > R$. Nel circolo $(0, R_2)$ è $P(\zeta, 0, a, 0) = P(\zeta, 0, a)$ e nel circolo $(a, R - |a|)$, interno al circolo $(0, R_2)$, è $P(\zeta, 0) = P(\zeta, a, 0)$, cosichè nel circolo $(a, R - |a|)$ è $P(\zeta, 0, a, 0) = P(\zeta, 0)$. Ma queste due ultime serie sono entrambe ordinate per potenze di ζ, quindi, in virtù del secondo teorema al n. 142 esse sono identiche, e ne verrebbe perciò che $(0, R_2)$ e non $(0, R_1)$ sarebbe il vero circolo di convergenza della serie $P(\zeta, 0)$.

Nei punti ζ, comuni ai due cerchi $(0, R)$, $(0, R_1)$, anche non appartenenti al circolo $(a, R - |a|)$ nel quale abbiamo $P(\zeta, 0) = P(\zeta, 0, a)$, è pure soddisfatta questa eguaglianza, come si verifica subito dal fatto che le due serie sono convergenti entrambe, e dove entrambe lo sono, dal modo stesso di loro costruzione, sono uguali.

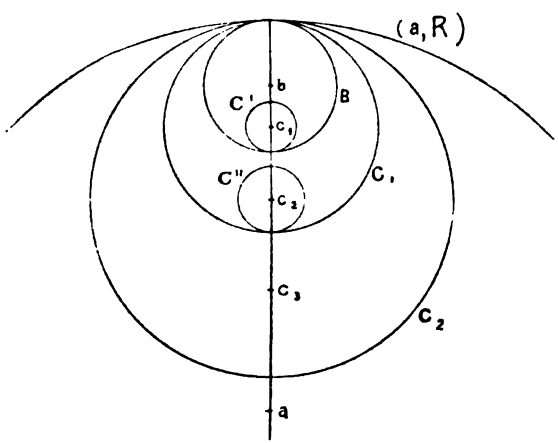
144. *Se da una serie* $P(\zeta, a)$ *si deduce la serie* $P(\zeta, a, b)$, *inversamente la serie* $P(\zeta, a)$ *è deducibile immediatamente o mediatamente dalla* $P(\zeta, a, b)$.

Se il circolo di convergenza (b, R_1) della serie $P(\zeta, a, b)$ contiene nel suo interno il punto a, allora dalla serie $P(\zeta, a, b)$ possiamo

dedurre la $P(z, a, b, a)$ che è identica alla $P(z, a)$; ciò si vede subito osservando che nella parte comune ai due circoli (b, R_1) ed al circolo (a, R) di convergenza della $P(z, a)$ abbiamo $P(z, a) = P(z, a, b)$, e nel circolo di centro a tangente internamente al circolo (b, R_1) è $P(z, a, b) = P(z, a, b, a)$, cosichè è ivi $P(z, a) = P(z, a, b, a)$, il che prova l'identità delle due serie $P(z, a, b, a)$ e $P(z, a)$, la quale ultima è perciò deducibile dalla $P(z, a, b)$.

Supponiamo ora invece che il circolo (b, R_1) non contenga nel suo interno il punto a. Questo circolo è almeno il circolo di centro b e tangente internamente a (a, R).

Chiamiamo B questo circolo. Uniamo con una retta a e b. Tra b ed a su questa retta prendiamo un punto c_1 interno al cerchio B; dalla $P(z, a, b)$ potremo allora dedurre rispetto a c_1 la serie $P(z, a, b, c_1)$ ordinata secondo le potenze di $z - c_1$ e nei punti z interni al circolo C_1, descritto col centro in c_1 e tangente internamente al circolo B, questa serie ha lo stesso valore di $P(z, a)$.



Ma da $P(z, a)$ deduciamo rispetto a c_1 la $P(z, a, c_1)$ ordinata secondo le potenze di $z - c_1$, che per tutti i punti interni al circolo C' di centro c_1 e tangente internamente a (a, R) ha lo stesso valore di $P(z, a)$. Il circolo C_1 contiene nel suo interno il circolo B e quindi anche il circolo C'; perciò le due serie $P(z, a, b, c_1)$, $P(z, a, c_1)$ hanno lo stesso valore, quello di $P(z, a)$, in tutti i punti interni a C'; esse dunque sono identiche e in conseguenza la serie $P(z, a, b, c_1)$

converge ancora in tutti i punti ζ interni al circolo C_1 ed è ivi uguale a $P(\zeta, a)$.

Prendiamo ora un punto c_2 tra c_1 ed a ed interno al circolo C_1. Dalla $P(\zeta, a, b, c_1)$ dedurremo la $P(\zeta, a, b, c_1, c_2)$, che nei punti ζ interni al circolo C'' di centro c_2 e tangente internamente a C_1 è uguale a $P(\zeta, a, b, c_1)$ e quindi a $P(\zeta, a)$. Ma da $P(\zeta, a)$ deduciamo ora rispetto a c_2 la $P(\zeta, a, c_2)$, che nei punti interni al circolo C_2 di centro c_2 e tangente internamente a (a, R) ha lo stesso valore di $P(\zeta, a)$. Le due serie $P(\zeta, a, b, c_1, c_2)$, $P(\zeta, a, c_2)$, ordinate entrambe rispetto alle potenze di $\zeta - c_2$, sono identiche, avendo lo stesso valore in tutti i punti interni al circolo C'', ed in conseguenza la serie $P(\zeta, a, b, c_1, c_2)$ è convergente nel circolo C_2 ed ivi ha il valore di $P(\zeta, a)$.

Così procedendo arriveremo certamente ad un punto c_n tale che il circolo C_n di centro c_n e tangente internamente a (a, R) conterrà il punto a. Basta osservare che, indicato con d il raggio del circolo B, possiamo prendere c_1 distante da a di $R - 2d + \varepsilon$, essendo ε quantità arbitrariamente e sufficientemente piccola, in modo che c_1 sia dentro B tra b ed a. Il raggio di C_1 è allora $2d - \varepsilon$. Poi possiamo prendere c_2 distante da a di $R - 4d + 3\varepsilon$ ed allora il raggio di C_2 è $4d - 3\varepsilon$; poscia prendere c_3 distante da a di $R - 8d + 7\varepsilon$, e così di seguito arriveremo a prendere un punto c_n distante da a di $R - 2^n d + (2^n - 1)\varepsilon$ ed il circolo C_n di centro c_n conterrà il punto a quando n sia tale che risulti $R - 2^n d + (2^n - 1)\varepsilon < \frac{R}{2}$ ossia $2^n(d - \varepsilon) > \frac{R}{2} - \varepsilon$. Ora il primo intero n che soddisfa a questa relazione è certamente finito.

Noi arriviamo dunque, dopo un numero finito di operazioni precedenti, ad una serie $P(\zeta, a, b, c_1, c_2, \ldots c_n)$, la quale, per tutti i punti interni a C_n ha il valore di $P(\zeta, a)$. Ora, poichè a è interno a C_n, dalla $P(\zeta, a, b, c_1, c_2, \ldots c_n)$ possiamo dedurre la $P(\zeta, a, b, c_1, c_2, \ldots c_n, a)$, la quale, per tutti i punti del circolo di centro a e tangente internamente a C_n, è uguale a $P(\zeta, a, b, c_1, c_2, \ldots c_n)$ cioè a $P(\zeta, a)$, cosichè le due serie $P(\zeta, a)$, $P(\zeta, a, b, c_1, c_2, \ldots c_n, a)$ ordinate entrambe secondo le potenze di $\zeta - a$, sono identiche. Ma in questo modo la serie $P(\zeta, a)$ è stata dedotta mediatamente dalla $P(\zeta, a, b)$. Il teorema è così completamente dimostrato.

145. *Se i circoli di convergenza delle due serie* P (z , a) , P (z , b) *hanno una parte comune* C, *e le serie dedotte da esse rispetto ad un punto* c *di questa parte sono eguali, e quindi identiche, allora:*

Le serie date si possono riguardare come dedotte l'una dall'altra, hanno lo stesso valore in ogni punto interno a C, *e per questi punti le serie dedotte da esse sono identiche.*

Invero, le due serie $P(z, a, c)$, $P(z, b, c)$ ove convergono sono identiche; ma dalla $P(z, a)$ deduciamo la $P(z, a, c)$ ossia $P(z, b, c)$, la quale ultima, poichè è dedotta dalla $P(z, b)$, dà per deduzione la $P(z, b)$; cosicchè dalla $P(z, a)$ abbiamo potuto dedurre mediatamente la $P(z, b)$.

Sia ora c' un punto qualunque interno a C. Poichè c' è interno a C esisterà un circolo (c', d') di raggio d' col centro in c' tutto interno a C. Consideriamo inoltre il circolo analogo (c, d) relativo al punto c, nel quale circolo le due serie $P(z, a)$, $P(z, b)$ hanno lo stesso valore perchè in esso è $P(z, a) = P(z, a, c)$, $P(z, b) = P(z, b, c)$ e $P(z, a, c) = P(z, b, c)$. Per provare che anche in c' ha luogo l'eguaglianza $P(c', a) = P(c', b)$, dimostriamo prima che si possono descrivere circoli, in numero finito, concatenati in modo che, i circoli estremi della catena essendo (c, d) , (c', d'), essi abbiano ciascuno il centro nell'interno del precedente e siano tutti interni a C. Le due tangenti comuni ai circoli (c, d) , (c', d'), e che li lasciano ciascuna da una stessa parte, determinano coi circoli stessi un campo C_1 che appartiene a C. Se, poniamo, sia $d \leq d'$, prendiamo un ε qualunque positivo minore di d e, a partire da c, segnamo sulla retta $c\,c'$ i punti $a_1, a_2, a_3, \ldots$ in modo che sia $d - \varepsilon = c\,a_1 = a_1\,a_2 = a_2\,a_3 = \ldots$; arriveremo così ad un punto a_n (n finito) tale che c' apparterrà al segmento $a_n\,a_{n+1}$. Allora, se col centro in a_1 descriviamo il massimo circolo A_1 contenuto in C_1, il punto c ed il punto a_2 sono contenuti in questo circolo; l'analogo circolo A_2 col centro in a_2 contiene interamente a_1 e a_3 e così di seguito, ed avremo la richiesta catena, la quale, come ben s'intende, potrà spesso costruirsi con un minor numero di circoli.

Ora se da $P(z, a)$ e $P(z, b)$ deduciamo $P(z, a, a_1)$, $P(z, b, a_1)$. nel circolo A_1 è certamente $P(z, a, a_1) = P(z, a)$, $P(z, b, a_1) = P(z, b)$; ma nella parte di A_1 che è interna a (c, d) è $P(z, a) = P(z, b)$, quindi $P(z, a, a_1)$, $P(z, b, a_1)$ sono identiche e perciò dentro tutto A_1 è $P(z, a) = P(z, b)$. Analogamente si proverebbe che vale questa eguaglianza entro A_2 etc., e si arriva così a provare che anche entro

(c', d') è $P(\zeta, a) = P(\zeta, b)$ e perciò $P(c', a) = P(c', b)$ come volevasi dimostrare.

Poichè ora in qualunque punto ζ di C sono eguali $P(\zeta, a)$, $P(\zeta, b)$ ne segue che, c'' essendo un punto qualunque interno a C, e in un certo cerchio di centro c'' essendo pure $P(\zeta, a, c'') = P(\zeta, a)$, $P(\zeta, b, c'') = P(\zeta, b)$, le due serie $P(\zeta, a, c'')$, $P(\zeta, b, c'')$ sono identiche.

Da questo teorema si ricava subito che se due serie di potenze sono eguali in una parte, anche piccolissima, comune ai due loro circoli di convergenza, esse sono eguali in tutti i punti comuni ed interni, ai circoli di convergenza. Così, in particolare, le serie $P(\zeta, a, c)$ $P(\zeta, a, c')$ dedotte da una serie $P(\zeta, a)$, ove i loro circoli di convergenza escano da quello di convergenza della $P(\zeta, a)$ ed abbiano una parte comune, sono eguali anche nei punti di questa parte esterni al circolo di convergenza della $P(\zeta, a)$.

146. Riflettendo a quanto è stato precedentemente esposto si troverà perfettamente giustificato e opportuno il seguente fondamentale concetto di *funzione analitica monogena* dovuto al *Weierstrass*.

Una serie $P(\zeta, a)$ è, nei punti ζ interni al suo vero circolo di convergenza (a, R), una funzione univalente continua $w(\zeta)$ di ζ. Una serie $P(\zeta, a, b)$, dedotta dalla $P(\zeta, a)$, è pure una funzione univalente continua nei punti interni al suo circolo di convergenza (b, R_1), che ha nei punti comuni al circolo (a, R), interni a questi due circoli, lo stesso valore della funzione $w(\zeta)$ definita della $P(\zeta, a)$ entro (a, R): se il circolo (b, R_1) esce dal circolo (a, R) i valori di $P(\zeta, a)$ nei punti interni a (a, R) si attaccano con continuità a quelli di $P(\zeta, a, b)$ nei punti di (b, R_1) esterni a (a, R).

Ora, quando il circolo (b, R_1) esca dal circolo (a, R), *Weierstrass* dice che la $P(\zeta, a, b)$ dà, nei punti di (b, R_1) esterni a (a, R) la *continuazione analitica* o *il prolungamento analitico* della $w(\zeta)$ definita da $P(\zeta, a)$ entro (a, R). E siccome ora dalla $P(\zeta, a, b)$, ed analogamente da qualunque altra serie dedotta dalla $P(\zeta, a)$ immediatamente, si potranno dedurre successivamente delle serie $P(\zeta, a, b, c)$, $P(\zeta, a, b, c, c_1), \ldots$, ove esse convergano in punti esterni al circolo di convergenza della serie, dalla quale furono immediatamente dedotte, diremo che esse danno, nei punti interni ai rispettivi veri circoli di convergenza, la continuazione analitica della $w(\zeta)$. Tutte le infinite serie deducibili dalla $P(\zeta, a)$ si dicono gli *elementi* della funzione

analitica $w(z)$, della quale $P(z, a)$ è l'elemento primitivo, od originario. L'insieme di tutti gli elementi costituisce la *funzione analitica* nella sua totalità. Dalle considerazioni fatte nei numeri precedenti risulta che come elemento primitivo di una funzione analitica può venire scelto uno qualunque dei suoi elementi.

147. Non è nostro intendimento, e la natura di quest'opera non lo comporterebbe, di dare ulteriore sviluppo alla teoria delle funzioni analitiche secondo il concetto del *Weierstrass*, e perciò, limitandoci ad averne accennato il principio fondamentale, faremo solamente le seguenti considerazioni.

Può avvenire che i circoli di convergenza di serie dedotte non escano dai circoli di convergenza di quelle serie da cui furono dedotte, per modo che la funzione analitica, di cui tutte queste serie sono elementi, non esista in certe parti del piano, le quali parti costituiscono allora, per queste funzioni, delle così dette *aree lacunari*. Ne abbiamo un esempio semplicissimo nella funzione analitica definita dall'elemento

$$P(z, 0) = z + z^m + z^{m^2} + z^{m^3} + \ldots + z^{m^n} + \ldots ,$$

dove m è un intero $\geqq 2$, il cui circolo di convergenza si riconosce essere, anche facendo uso del teorema di *Cauchy*, il circolo (0,1).

Ora questa funzione non è prolungabile al di là di questo circolo, ed essa ha perciò per area lacunare tutta la parte del piano esterna a questo circolo.

Infatti, per un valore z di modulo $\rho < 1$ e di argomento $\frac{2k\pi}{m^n}$ (k intero qualunque ed n int. positivo) la nostra serie, a partire dal termine z^{m^n}, diventa la serie a termini reali positivi

$$\rho^{mn} + \rho^{m^{n+1}} + \rho^{m^{n+2}} + \ldots ,$$

che cresce indefinitamente al tendere di ρ verso l'unità; perchè se A è una quantità positiva prefissata comunque grande, e q un numero compreso tra 0 e 1, potremo intanto fissare il numero intero positivo r in guisa che sia $rq > A$, indi assumere $\rho = \rho_1$ così vicino all'unità che risulti $\rho_1^{m^{n+r-1}} > q$, ed allora, per tutti i valori di $\rho \geqq \rho_1$ e < 1, la somma dei primi r termini della serie precedente risulta $> rq > A$. Cosichè avvicinandosi il punto z al punto b_{kn} di argo-

mento $\frac{2k\pi}{m^n}$, sulla circonferenza del circolo $(0, 1)$, il valore di $P(\zeta, 0)$ cresce indefinitamente. Di questi punti b_{kn} ve ne sono infiniti in qualunque tratto comunque piccolo di detta circonferenza. Ora questi fatti escludono appunto che la funzione analitica definita dalla $P(\zeta, 0)$ entro il circolo $(0, 1)$ possa essere continuata fuori di $(0, 1)$. Invero se una qualunque serie dedotta $P(\zeta, 0, a)$ potesse convergere in un circolo (a, R) uscente al di fuori di $(0, 1)$, questa serie avrebbe anche valore finito e sarebbe continua nei punti b della circonferenza di $(0, 1)$ e interni a (a, R), cosichè, assegnato un σ, esisterebbe un intorno di b per tutti i punti ζ del quale sarebbe $|P(\zeta, 0, a) - P(b, 0, a)| < \sigma$; ma nella parte di questo intorno interna a $(0, 1)$ sarebbe $P(\zeta, 0, a) = P(\zeta, 0)$, e, per quanto abbiamo visto ora, vi sono in esso sempre punti nei quali $|P(\zeta, 0)|$, e quindi $|P(\zeta, 0, a)|$, prende valori maggiori di qualunque numero prefissato, il che contraddirebbe alla disuguaglianza precedente.

148. Ciò premesso, distingueremo, relativamente ad una funzione analitica $w(\zeta)$, i punti del piano in tre classi.

Nella prima classe porremo quei punti che sono interni a qualche circolo di convergenza di qualche elemento della funzione stessa. Questi punti si chiamano punti *regolari* od *ordinari* della funzione, o punti nei quali la funzione si *comporta regolarmente*; essi costituiscono il *campo d' esistenza* della funzione analitica. Questo campo è connesso, cioè si può andare da uno qualunque dei suoi punti ad un altro qualunque mediante una linea continua che non esca dal campo stesso; per vedere ciò basta riflettere che da un elemento, il cui circolo di convergenza contiene il primo punto, si può passare, per prolungamento analitico mediante una successione di circoli concatenati tutti appartenenti al campo d' esistenza, ad un altro elemento, il cui circolo di convergenza contiene nell' interno l' altro punto.

Ad una seconda classe assegneremo quei punti che sono esterni al circolo di convergenza di qualunque elemento delle funzioni, tali, cioè, che esiste per essi un certo intorno non attraversato da alcun circolo di convergenza. Questi punti costituiscono un campo nel quale la funzione non esiste, formano il *campo* od *area lacunare* della funzione. Questo campo potrà non essere connesso, cioè potrà risultare composto di più pezzi distinti.

Ad una terza classe assegneremo quei punti che non sono interni

ad alcun circolo di convergenza di alcun elemento della funzione, ma ogni loro intorno è attraversato da circoli di convergenza di elementi della funzione stessa. Questi punti, della terza classe, diconsi *punti singolari o singolarità* della funzione analitica. Se la funzione ha un'area lacunare, essi sono al confine tra questa e il campo d'esistenza. Questi punti singolari potranno essere in numero finito, o formare un gruppo infinito di punti, o costituire una o più linee continue.

149. Sia a un punto singolare di una funzione analitica $w(z)$. Supponiamo che:

1) Esista un intorno del punto a formato tutto (escluso il punto a) da punti della prima classe, cioè da punti regolari di $w(z)$.

2) In detto intorno, o in un intorno in esso contenuto, escluso al più il punto a, i valori di $\frac{1}{w(z)}$ siano tali che essi vengano dati da una serie di potenze $b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \ldots$

In questo sviluppo bisogna supporre $b_0 = 0$, perchè, se ciò non fosse, si avrebbe in tale intorno

$$w(z) = \frac{1}{b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \ldots} = \frac{1}{b_0(1-u)},$$

avendo posto $-u = \frac{b_1}{b_0}(z-a) + \frac{b_2}{b_0}(z-a)^2 + \ldots$; ossia, poichè esiste un intorno di a così piccolo che risulti $|u| < 1$, sarà ancora in quest' ultimo intorno

$$w(z) = \frac{1}{b_0}\left[1 + u + u^2 + u^3 + \ldots\right],$$

che può, in virtù dei noti teoremi sulle serie doppie, ridursi alla forma

$$w(z) = \frac{1}{b_0}\left[1 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots\right],$$

il che proverebbe che il punto a non potrebbe essere punto singolare, ma sarebbe invece regolare, per la funzione analitica $w(z)$.

Supponiamo dunque $b_0 = 0$, o, più generalmente $b_0 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0, \ldots b_{n-1} = 0$ e b_n diverso da zero. Avremo allora in modo analogo

$$w(z) = \frac{1}{b_n (z-a)^n \left[1 + \frac{b_{n+1}}{b_n}(z-a) + \frac{b_{n+2}}{b_n}(z-a)^2 + \ldots\right]}$$

$$= \frac{1}{b_n (z-a)^n}\left[1 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots\right]$$

valevole per tutti i punti z del precedente intorno, escluso il punto a. Dalla qual formola risulta

$$w(z)(z-a)^n = \frac{1}{b_n}\left[1 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots\right],$$

$$w(z) = \frac{1}{b_n(z-a)^n} + \frac{c_1}{b_n}\frac{1}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{c_{n-1}}{b_n}\frac{1}{z-a}$$

$$+ \frac{c_n}{b_n} + \frac{c_{n+1}}{b_n}(z-a) + \frac{c_{n+2}}{b_n}(z-a)^2 + \ldots;$$

l'ultima di queste formole ci dà lo sviluppo della $w(z)$ nell'intorno di un punto singolare a soddisfacente alle condizioni 1), 2), sviluppo che contiene un polinomio in $\frac{1}{z-a}$ ed una serie, che qualche volta potrà ridursi pure ad un polinomio, ordinata secondo le potenze intere di $z-a$. La penultima formola poi ci mostra come la funzione $w(z)(z-a)^n$ sia regolare nel punto a, e che la $w(z)$ diviene infinita d'ordine n nel punto a (Vedi Vol. I, n. 37).

Questi punti singolari a, soddisfacenti alle condizioni 1), 2) diconsi *poli*, o *infiniti*, o *punti singolari non essenziali*, ovvero *singolarità polari o non essenziali*, della funzione analitica.

Se un punto singolare a non soddisfa a tutte e due le condizioni 1), 2) esso dicesi un *punto singolare essenziale* o *singolarità essenziale* della funzione analitica; notando che può essere soddisfatta la condizione 1), esprimente che il punto singolare è isolato da qualunque altro punto singolare, ma non la 2); mentre se non è soddisfatta la 1) non lo è necessariamente neanche la 2).

Integrali delle funzioni di variabili complesse.

150. Cauchy fu il primo, nel 1825, a stabilire il significato preciso, dandone una chiara definizione, del simbolo $\int_{a+ib}^{a'+ib'} f(z)\,dz$, dove $f(z)$ è funzione della variabile complessa z, riducibile per ogni sistema di valori di x, y alla forma $u(x, y) + iv(x, y)$, essendo u, v funzioni reali di x, y.

Sia l una linea appartenente ad un campo dove la $f(z)$ è monodroma e finita, e che unisce tra loro i punti $\alpha = a + ib$, $\beta = a' + ib'$. Siano $z_0 = \alpha, z_1, z_2 \ldots z_{n-1}, z_n = \beta$ punti qualunque appartenenti ad l e succedentisi andando da α verso β; consideriamo la somma $S = \Sigma\, w_s (z_s - z_{s-1})$, dove w_s indica un valore qualunque di $f(z)$ lungo il tratto di linea l compreso tra i punti z_{s-1} e z_s. Ora una quantità L dicesi limite di S al crescere di n, se dato σ, esiste un corrispondente numero positivo δ tale che per qualunque scomposizione di l mediante punti z_s pei quali risulti $|z_s - z_{s-1}| < \delta$, e qualunque sia la scelta dei valori w_s, sia sempre $|S - L| < \sigma$, ed L chiamasi l'*integrale definito della funzione* f(z) *preso tra* α *e* β *lungo la linea* l, *che dicesi linea o cammino di integrazione*, e scriviamo

$L = \int f(z)\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z)\,dz$ lungo l, e la $f(z)$ sarà allora *integrabile* da α a β lungo la linea l.

Supponiamo che le coordinate dei punti della linea l vengano espresse per un parametro t mediante le formole

$$x = \varphi(t)\ ,\ y = \psi(t),$$

(in particolare potrà essere $t = x$ o $t = y$) e che si ottengano tutti i punti di l da α a β facendo variare t da t_0 a t_1 sempre crescendo o sempre decrescendo, e che $\varphi(t)$, $\psi(t)$ ammettano derivate continue pei valori di t da t_0 a t_1. Posto

$$w = f(z) = u[\varphi(t), \psi(t)] + iv[\varphi(t), \psi(t)] = u(t) + iv(t) = u + iv,$$

$$w_s = f(z'_s) = u[\varphi(t'_s), \psi(t'_s)] + iv[\varphi(t'_s), \psi(t'_s)] = u_s + iv_s,$$

abbiamo

$$S = \sum_1^n w_s(\zeta_s - \zeta_{s-1}) = \sum_1^n (u_s + iv_s)[\varphi(t_s) + i\psi(t_s) - \varphi(t_{s-1}) - i\psi(t_{s-1})]$$

$$= \sum_1^n u_s[\varphi(t_s) - \varphi(t_{s-1})] - \sum_1^n v_s[\psi(t_s) - \psi(t_{s-1})] +$$

$$i\left\{\sum_1^n v_s[\varphi(t_s) - \varphi(t_{s-1})] + \sum_1^n u_s[\psi(t_s) - \psi(t_{s-1})]\right\}.$$

Alla prima somma del secondo membro (ed in modo analogo per le altre) possiamo dare la forma

$$\sum_1^n u_s \frac{\varphi(t_s) - \varphi(t_{s-1})}{t_s - t_{s-1}}(t_s - t_{s-1});$$

ma

$$\frac{\varphi(t_s) - \varphi(t_{s-1})}{t_s - t_{s-1}} = \varphi'[t_{s-1} + \theta(t_s - t_{s-1})] = \varphi'(t_{s-1}) + \varepsilon_s.$$

dove, essendo la $\varphi'(t)$ continua nell' intervallo (t_0, t_1), le ε_s sono quantità che possono *tutte* ridursi minori numericamente di qualunque quantità positiva assegnata prendendo gli intervalli $t_s - t_{s-1}$ sufficientemente piccoli.

Avremo quindi

$$\sum_1^n u_s \frac{\varphi(t_s) - \varphi(t_{s-1})}{t_s - t_{s-1}}(t_s - t_{s-1}) = \sum_1^n u_s \varphi'(t_{s-1})(t_s - t_{s-1}) + \sum_1^n \varepsilon_s u_s(t_s - t_{s-1})$$

Supponiamo la funzione u di t integrabile nell'intervallo (t_0, t_1); allora è anche integrabile la $u\varphi'(t)$ e perciò, essendo

$$\lim \sum_1^n u_s(t_s - t_{s-1}) = \int_{t_0}^{t_1} u\,dt$$

e quindi $\lim \Sigma \varepsilon_s u_s(t_s - t_{s-1}) = 0$, avremo

$$\lim \sum_1^n u_s \frac{\varphi(t_s) - \varphi(t_{s-1})}{t_s - t_{s-1}}(t_s - t_{s-1}) = \lim \sum_1^n u_s \varphi'(t_{s-1})(t_s - t_{s-1}) = \int_{t_0}^{t_1} u\,\varphi'\,dt.$$

Ammessa poi ancora la integrabilità di v nell' intervallo (t_0, t_1)

abbiamo in ultimo, procedendo in modo analogo colle altre somme suddette,

$$\lim S = \int_{t_0}^{t_1} u\,\varphi'(t)\,dt - \int_{t_0}^{t_1} v\,\psi'(t)\,dt + i\left\{\int_{t_0}^{t_1} v\varphi'(t)\,dt + \int_{t_0}^{t_1} u\,\psi'(t)\,dt\right\}$$

(1)

$$= \int_{t_0}^{t_1} (u+iv)\,[\varphi'(t) + i\psi'(t)]\,dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\zeta)\,d\zeta,$$

la quale formola non solo ci prova l'esistenza dell'integrale della $f(\zeta)$ lungo la linea l, ma ancora ci indica il modo di calcolarne il valore.

Per esempio, per calcolare l'integrale lungo la retta che unisce i punti α, β, basta porre

$$x = \varphi(t) = a + (a' - a)\,t,\quad y = \psi(t) = b + (b' - b)t$$

ed allora

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\zeta)\,d\zeta = [a' - a + i(b' - b)]\int_{0}^{1} f[a + (a' - a)\,t + ib + i(b' - b)\,t]\,dt;$$

per calcolare quello da α a β lungo un semicircolo che passa per α e β, basta porre

$$x = \frac{1}{2}\left[a + a' + \sqrt{(a-a')^2 + (b-b')^2}\cos t\right],$$

$$y = \frac{1}{2}\left[b + b' + \sqrt{(a-a')^2 + (b-b')^2}\,\mathrm{sen}\,t\right],$$

ed allora

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\zeta)d\zeta = \frac{1}{2}\sqrt{(a-a')^2 + (b-b')^2}.$$

$$\cdot\int_{t_0}^{\pi+t_0} f\left[\frac{a+a'}{2} + i\frac{b+b'}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(a-a')^2 + (b-b')^2}(\cos t + i\,\mathrm{sen}\,t)\right](-\mathrm{sen}\,t + i\cos t)\,dt,$$

dove

$$t_0 = \text{arc cos} \frac{a - a'}{\sqrt{(a-a')^2 + (b-b')^2}} = \text{arc sen} \frac{b - b'}{\sqrt{(a-a')^2 + (b-b')^2}}.$$

Notiamo che si poteva anche procedere nel modo seguente:

$$\Sigma\, w_s (\zeta_s - \zeta_{s-1}) = \Sigma\, (u_s + i\, v_s)[(x_s - x_{s-1}) + i\,(y_s - y_{s-1})]$$

$$= \Sigma\, u_s (x_s - x_{s-1}) - \Sigma\, v_s (y_s - y_{s-1}) + i\,\{\Sigma\, v_s (x_s - x_{s-1}) - \Sigma\, u_s (y_s - y_{s-1})\}$$

ma, ammessa la integrabilità di u, v lungo la linea l rispetto ad x e y è (n. 113)

$$\lim u_s (x_s - x_{s-1}) = \int_\alpha^\beta u\, dx\,, \quad \lim \Sigma\, v_s (y_s - y_{s-1}) = \int_\alpha^\beta v\, dy,$$

$$\lim v_s (x_s - x_{s-1}) = \int_\alpha^\beta v\, dx\,, \quad \lim \Sigma\, u_s (y_s - y_{s-1}) = \int_\beta^\beta u\, dy$$

cosicchè

$$\lim \Sigma\, w_s (\zeta_s - \zeta_{s-1}) = \int_\alpha^\beta f(\zeta)\, d\zeta$$

$$= \int_\alpha^\beta u\, dx - \int_\alpha^\beta v\, dy + i \left[\int_\alpha^\beta v\, dx + \int_\alpha^\beta u\, dy \right]$$

$$= \int_\alpha^\beta (u + i\, v)\, dx + i \int_\alpha^\beta (u + i\, v)\, dy = \int_\alpha^\beta (u + i\, v)\, (dx + i\, dy).$$

Da quanto precede risulta poi, senz'altro, che

$$\int_\alpha^\beta f(\zeta)\, d\zeta = - \int_\beta^\alpha f(\zeta)\, d\zeta,$$

il cammino di integrazione essendo lo stesso pei due integrali; e che

se γ è un punto di l,

$$\int_\alpha^\beta f(\zeta)\,d\zeta = \int_\alpha^\gamma f(\zeta)\,d\zeta + \int_\gamma^\beta f(\zeta)\,d\zeta,$$

la qual formola vale anche se il punto γ è fuori della linea l, purchè, indicando con l_1 la linea di integrazione dell'ultimo integrale del secondo membro, la $f(\zeta)$ sia integrabile su l_1, e la linea di integrazione del primo integrale del secondo membro si componga delle linee l ed l_1.

151. Abbiamo anche qui un teorema analogo al primo della media.

Invero, essendo

$$\int_\alpha^\beta f(\zeta)\,d\zeta = \int_{t_0}^{t_1} u\,[\varphi'(t) + i\,\psi'(t)]\,dt + i\int_{t_0}^{t_1} v\,[\varphi'(t) + i\,\psi'(t)]\,dt,$$

e poichè, applicando il primo noto teorema della media, è

$$\int_{t_0}^{t_1} u\,[\varphi'(t) + i\,\psi'(t)]\,dt = m_1\,(a' - a) + i m_2\,(b' - b)$$
$$= m_1\,(\beta - \alpha) + i\,(m_2 - m_1)\,(b' - b),$$
$$\int_{t_0}^{t_1} v\,[\varphi'(t) + i\,\psi'(t)]\,dt = n_1\,(\beta - \alpha) + i\,(n_2 - n_1)\,(b' - b),$$

dove m_1, m_2 sono valori compresi tra il limite superiore e l'inferiore di u nell'intervallo (t_0, t_1) e analogamente n_1, n_2 per v, abbiamo

$$\int_\alpha^\beta f(\zeta)\,d\zeta = (m_1 + i n_1)\,(\beta - \alpha) + i\,(b' - b)\,[m_2 - m_1 + i\,(n_2 - n_1)],$$

e, se la $f(\zeta)$ è continua lungo la linea l,

$$(1)\qquad \int_\alpha^\beta f(\zeta)\,d\zeta = \{u\,[t_0 + \theta\,(t_1 - t_0)] + iv\,[t_0 + \theta'\,(t_1 - t_0)]\}\,(\beta - \alpha)$$
$$+ i\,(b' - b)\,[m_2 - m_1 + i\,(n_2 - n_1)],$$

dove $0 \leq \theta \leq 1$, $0 \leq \theta' \leq 1$.

Queste formole corrispondono a quella del primo teorema sulla media per gli integrali di funzioni reali; ma vi è un' altra formola dovuta al Darboux, che è più semplice e di cui quella della media è caso particolare, e che perciò pare più opportuna per costituire il primo teorema della media per i nostri integrali.

Scriviamo

$$\mathrm{I} = \int_{\alpha}^{\beta} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{t_0}^{t_1} (u + iv) \frac{dx + idy}{dt}\, dt,$$

ed avremo

$$|\mathrm{I}| \leq \int_{t}^{t_1} |u + iv| \frac{|dx + idy|}{dt}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} |u + iv| \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt}\, dt,$$

cosicchè, indicando θ un certo numero compreso tra 0 e 1,

$$|\mathrm{I}| = \theta \int_{t_0}^{t_1} |u + iv| \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt}\, dt,$$

ed applicando il noto teorema della media

$$|\mathrm{I}| = \theta\, \mathrm{M} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt}\, dt = \theta\, \mathrm{M} \text{ arco } l,$$

dove M è un numero compreso tra il limite superiore e l' inferiore di $|u + iv|$ nell' intervallo (t_0, t_1) e arco l indica la lunghezza della linea l. Se la $f(\zeta)$ è continua lungo l,

$$|\mathrm{I}| = \theta\, |u(t') + iv(t')| \text{ arco } l = \theta\, |f(\zeta')| \text{ arco } l,$$

dove $t_0 \leq t' \leq t_1$ e ζ' indica quel punto della linea l, che corrisponde a $t = t'$.

Ma indicando con φ l' argomento di I, con α l' argomento di $f(\zeta')$, è $\mathrm{I} = |\mathrm{I}|\, e^{\varphi i}$, $f(\zeta') = |f(\zeta')|\, e^{\alpha i}$, ed avremo

$$\mathrm{I} = \theta\, |f(\zeta')|\, e^{\varphi i} \text{ arco } l = \theta\, e^{(\varphi - \alpha) i} f(\zeta') \text{ arco } l,$$

ed in conseguenza, indicando con λ una quantità il cui modulo

supera l'unità, abbiamo

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\zeta)\, d\zeta = \lambda \text{ arco } l f(\zeta),$$

che è la formola che corrisponde a quella del primo teorema della media.

152. Proviamo ora che in ogni punto ζ della linea di integrazione l'integrale di $f(\zeta)$ è funzione di ζ. Poniamo

$$\mathrm{I}(\zeta) = \int_{\alpha}^{z} f(\zeta)\, d\zeta\,;$$

allora

$$\mathrm{I}'(\zeta) = \lim_{h=0} \frac{1}{h}\left[\int_{\alpha}^{z+h} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{\alpha}^{z} f(\zeta)\, d\zeta\right] = \lim_{h=0} \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(\zeta)\, d\zeta,$$

dove $h = \Delta\zeta = \Delta x + i\,\Delta y$ indica un aumento qualunque attribuito a ζ, e l'integrale da ζ a $\zeta + h$ è condotto lungo una linea qualunque che unisca i punti ζ e $\zeta + h$, le coordinate dei punti della quale supporremo espresse mediante t e in modo che ζ corrisponda al valore t e $\zeta + h$ al valore $t + k$ di t, essendo k quantità che converge a zero con h. Ma per la formola (1) n. 151 abbiamo

$$\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(\zeta)\, d\zeta = u(t+\theta k) + iv(t+\theta' k) + \frac{i\,\Delta y}{\Delta x + i\,\Delta y}\,[m_2 - m_1 + i(n_2 - n_1)]$$

e poichè comunque h converga a zero è $\lim(m_2 - m_1) = \lim(n_2 - n_1) = 0$, $\lim u(t+\theta k) = u(t)$, $\lim v(t+\theta' k) = v(t)$, sarà

$$\lim_{h=0} \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(\zeta)\, d\zeta = u(t) + iv(t) = f(\zeta)\,;$$

quindi la $\mathrm{I}(\zeta)$ ammette l'unica derivata

$$\mathrm{I}'(\zeta) = \frac{d}{d\zeta}\int_{\alpha}^{z} f(\zeta)\, d\zeta = f(\zeta),$$

cioè $\int_\alpha^z f(\zeta)\,d\zeta$ è funzione del limite superiore z, pei punti z della linea di integrazione, e ha per derivata $f(z)$.

Se $F(z)$ è funzione di z, che, lungo la linea di integrazione abbia per derivata $f(z)$, avremo

$$\int_\alpha^z f(z)\,dz = F(z) - F(\alpha).$$

Invero, posto $z = \varphi(t) + i\psi(t)$, in modo che ai valori di t da t_0 a t corrispondano i punti della linea di integrazione da α a z, e posto $F(z) = U(t) + iV(t)$, avremo

$$F'(z) = f(z) = [U'(t) + iV'(t)]\frac{dt}{dz} = [u(t) + iv(t)],$$

e quindi

$$f(z)\,dz = [u(t) + iv(t)][\varphi'(t) + i\psi'(t)]\,dt = [U'(t) + iV'(t)]\,dt,$$

e da questa

$$\int_\alpha^z f(z)\,dz = \int_{t_0}^t [u(t) + iv(t)][\varphi'(t) + i\psi'(t)]\,dt = \int_{t_0}^t [U'(t) + iV'(t)]\,dt$$

$$= U(t) + iV(t) - [U(t_0) + iV(t_0)] = F(z) - F(\alpha).$$

Così ad esempio, qualunque sia la linea di integrazione, è

$$\int_\alpha^z \cos z\,dz = \operatorname{sen} z - \operatorname{sen}\alpha,\quad \int_\alpha^z \operatorname{sen} z\,dz = \cos\alpha - \cos z,\quad \int_\alpha^z e^z\,dz = e^z - e^\alpha.$$

153. Se la $f(z)$ diviene infinita in un punto c della linea di integrazione, perchè esiste un intorno del punto c per tutti i punti del quale $|f(z)|$ si mantiene maggiore di qualunque numero prefissato, o perchè ciò avviene per tutti i punti di un intorno sulla linea di integrazione, o perchè comunque piccolo si prenda un intorno di c su detta linea vi siano sempre in esso dei punti nei quali $|f(z)|$ è

maggiore di qualunque numero prefissato, allora poniamo la definizione

$$\int_{\alpha}^{c} f(z)\,dz = \lim_{\delta=0} \int_{\alpha}^{c-\delta} f(z)\,dz,$$

restando il punto $c-\delta$ sempre sulla linea di integrazione.

E se la linea di integrazione si estende all'infinito, poniamo la definizione

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(z)\,dz = \lim \int_{\alpha}^{z} f(z)\,dz,$$

quando il punto z si allontana indefinitamente sulla linea di integrazione.

154. Il cambiamento di variabile negli integrali di funzioni di variabile complessa si opera precisamente come negli integrali di funzioni di variabile reale. Sia $\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\,dz$ preso lungo la linea l e si ponga $z = z(z_1)$, dove $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z(z_1)$ è funzione di z_1 che ammette derivata, e sia $\alpha = z(\alpha_1)$, $\beta = z(\beta_1)$, essendo $\alpha = a + ib$, $\beta = a' + ib'$, $\alpha_1 = a_1 + ib_1$, $\beta_1 = a'_1 + ib'_1$; dico che avremo

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\,dz = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f[z(z_1)]\,z'(z_1)\,dz_1,$$

l'integrale del secondo membro essendo preso lungo quella linea l_1 che corrisponde alla linea l, linea l_1 le coordinate x_1, y_1 dei punti della quale vengono date dalle $x_1 = f_1(x, y)$, $y_1 = f_2(x, y)$, essendo questi valori di x_1, y_1 quelli che si ricavano dalle

$$x = F_1(x_1, y_1),\ y = F_2(x_1, y_1),$$

supposto che sia

$$z = x + iy = z(z_1) = F_1(x_1, y_1) + iF_2[x_1, y_1).$$

Ora, se si pone $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ cosichè sia

$$F_1(x_1, y_1) = \varphi(t), \quad F_2(x_1, y_1) = \psi(t),$$

$$\int_\alpha^\beta f(\zeta)\, d\zeta = \int_{t_0}^{t_1} [u(t) + iv(t)]\, [\varphi'(t) + i\psi'(t)]\, dt,$$

avremo

$$x_1 = f_1(x, y) = f_1[\varphi(t), \psi(t)] = f_1(t), \; y_1 = f_2(x, y) = f_2[\varphi(t), \psi(t)] = f_2(t),$$

$$a_1 = f_1(a, b) = f_1[\varphi(t_0), \psi(t_0)] = f_1(t_0), \; b_1 = f_2(a, b) = f_2[\varphi(t_0), \psi(t_0)] = f_2(t_0),$$

ed analogamente $a'_1 = f_1(t_1), b'_1 = f_2(t_1)$,

$$f[\zeta(\zeta_1)] = f[F_1(x_1, y_1) + iF_2(x_1, y_1)] = f[\varphi(t) + i\psi(t)] = u(t) + iv(t),$$

$$\zeta'(\zeta) = [\varphi'(t) + i\psi'(t)] \frac{dt}{d\zeta_1},$$

cosichè

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f[\zeta(\zeta_1)]\, \zeta'(\zeta_1)\, d\zeta_1 = \int_{t_0}^{t_1} [u(t) + iv(t)]\, [\varphi'(t) + i\psi'(t)]\, dt = \int_\alpha^\beta f(\zeta)\, d\zeta.$$

155. In seguito alle considerazioni fatte finora possiamo riunire in una sola formola alcuni dei risultati di integrazioni di funzioni di variabili reali, che si presentarono sotto aspetto diverso a seconda dei valori o del segno di certe quantità: come pure si potrà con semplicità ricavare il valore di un integrale da un altro già conosciuto; il che verrà dichiarato con i seguenti semplici esempi.

Possiamo dire sempre che, supposte x, a, b, c reali, è, se $4ac - b^2$ è diverso da zero,

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}}$$

(vedi pag. 456 vol. I); invero se $4ac - b^2 < 0$ il secondo membro

diviene $$\frac{2}{i\sqrt{b^2 - 4ac}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2ax + b}{i\sqrt{b^2 - 4ac}},$$

cioè

$$\frac{2}{i\sqrt{b^2-4ac}}\,\frac{1}{2i}\log\frac{1+i\dfrac{2ax+b}{i\sqrt{b^2-4ac}}}{1-i\dfrac{2ax+b}{i\sqrt{b^2-4ac}}}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{b^2-4ac}}\log\frac{\sqrt{b^2-4ac}+2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}-(2ax+b)}=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\log\frac{\sqrt{b^2-4ac}-(2ax+b)}{\sqrt{b^2-4ac}+2ax+b},$$

che non differisce che pel segno della quantità sotto il logaritmo (ciò che non importa, perchè di essa dobbiamo prendere il valore assoluto) dalla formola trovata a pag. 356 vol. I quando $4ac-b^2<0$.

Così ancora per avere $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ da $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\text{arc sen}\,\frac{x}{a}$, basta porre in quest'ultimo $x=ix_1$ ed allora

$$\int\frac{dx_1}{\sqrt{a^2+x_1^2}}=\frac{1}{i}\,\text{arc sen}\,\frac{ix_1}{a}=\frac{1}{i}\,\frac{1}{i}\log\left(\sqrt{1+\frac{x_1^2}{a^2}}-\frac{x_1}{a}\right)$$

$$=-\log\frac{\sqrt{a^2+x_1^2}-x_1}{a}=\log\frac{a}{\sqrt{a^2+x_1^2}-x_1}$$

$$=\log\frac{a(\sqrt{a^2+x_1^2}+x_1)}{a^2}=\log(\sqrt{a^2+x_1^2}+x_1)+C.$$

Così ancora, conoscendo

$$\int\frac{x^2\,dx}{x^4+x^2-2}=\frac{1}{6}\log\frac{x-1}{x+1}+\frac{\sqrt{2}}{3}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{\sqrt{2}}.$$

troviamo subito $\int\frac{x^2\,dx}{x^4-x^2-2}$, giacchè, cambiando x in ix nel primo integrale, abbiamo

$$\int\frac{x^2\,dx}{x^4-x^2-2}=-\frac{1}{i}\left\{\frac{1}{6}\log\frac{ix-1}{ix+1}+\frac{\sqrt{2}}{3}\,\text{arc tg}\,\frac{ix}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$=-\frac{1}{i}\left\{\frac{1}{6}\,\frac{2}{i}\,\text{arc tg}\,x+\frac{\sqrt{2}}{3}\,\frac{1}{2i}\log\frac{\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}+x}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\,\text{arc tg}\,x+\frac{1}{3\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}+x}.$$

Teoremi di Cauchy

156. *Se* $f(z) = u + iv$ *è monodroma finita e continua in tutto un campo* C, *il cui contorno sia* s, *e le derivate di* u *e* v *rapporto ad* x, y *sono integrabili in* C, *l'integrale di* $f(z)\,dz$ *esteso al contorno di* C *è uguale a zero, cioè* $\int_s f(z)\,dz = 0$.

Infatti

$$\int_s f(z)\,dz = \int_s (u\,dx - v\,dy) + i\int_s (u\,dy + v\,dx);$$

ma poichè u, v sono funzioni univalenti continue di x, y in C e le loro derivate sono ivi integrabili, abbiamo in virtù della formola di Gauss al n. 113,

$$\int_s (u\,dx - v\,dy) = -\iint_C \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

$$\int_s (u\,dy + v\,dx) = \iint_C \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

e gli integrali nei secondi membri sono zero perchè, essendo $f(z)$ funzione di z in C, è ivi

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0;$$

in conseguenza $\int_s f(z)\,dz = 0$.

157. Dal precedente teorema fondamentale di Cauchy risulta subito che il valore dell'integrale $\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz$, quando si integri per due linee differenti che uniscono i punti z_0 e z_1, ma tali che nella parte del piano da esse limitata, incluse le linee stesse, la $f(z)$ sia monodroma finita e continua, è lo stesso; ossia, il valore dell'integrale non cambia quando, rimanendo fissi gli estremi, la linea di integra-

zione si deforma senza spezzarsi e rimanendo sempre in un campo ove la $f(z)$ sia monodroma finita e continua, cosichè allora la linea di integrazione non ha influenza sul valore dell'integrale; perchè se l e l_1 sono due qualunque di tali linee, $z_0 \alpha z_1$, $z_0 \beta z_1$, è pel teorema di CAUCHY, $\int_{z_0 \alpha z_1 \beta z_0} f(z)\,dz = \int_{z_0 \alpha z_1} f(z)\,dz + \int_{z_1 \beta z_0} f(z)\,dz = 0$, da cui

$$\int_{z_0 \alpha z_1} f(z)\,dz = \int_{z_0 \beta z_1} f(z)\,dz, \text{ cioè } \int_{l} f(z)\,dz = \int_{l_1} f(z)\,dz.$$

Altra conseguenza del teorema di CAUCHY è che gli integrali di $f(z)\,dz$ estesi, nello stesso verso, lungo due curve chiuse s, s_1, l'una interna all'altra e tali che nell'area da esse racchiusa, incluse le linee stesse, la $f(z)$ è monodroma finita e continua, sono uguali; perchè avremo $\int_s f(z)\,dz + \int_{s_1} f(z)\,dz = 0$, l'integrazione essendo condotta nello stesso verso (poniamo il positivo) lungo s ed s_1 rispetto al campo da esse limitato, verso che è perciò opposto lungo di esse. Cambiando il verso in uno dei due integrali, avremo $\int_s f(z)\,dz = \int_{s_1} f(z)\,dz$.

Come esempio calcoliamo l'integrale $\int_s \frac{dz}{z-a}$ esteso ad una curva chiusa s che racchiude nel suo interno il punto a, ove la funzione integranda $\frac{1}{z-a}$ diviene infinita. Descriviamo col centro in a un circolo σ di raggio R tutto contenuto nell'area determinata da s; nel campo limitato da s e da σ la funzione $\frac{1}{z-a}$ si mantiene monodroma finita e continua, cosicchè

$$\int_s \frac{dz}{z-a} = \int_\sigma \frac{dz}{z-a}.$$

Per calcolare il secondo integrale poniamo $z - a = Re^{\theta i}$, di guisa che. essendo R costante pei punti z di σ, sarà $dz = i\,Re^{\theta i}\,d\theta$, ed in

conseguenza $\int_\sigma \frac{d\zeta}{\zeta - a} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$, per cui

$$\int_s \frac{d\zeta}{\zeta - a} = 2\pi i.$$

Calcoliamo ancora $\int_s (\zeta - a)^n \, d\zeta$, ove n è numero intero qualunque. Se n è positivo, pel teorema di CAUCHY, il valore dell'integrale è zero. Sia n negativo, cioè consideriamo l'integrale $\int_s \frac{d\zeta}{(\zeta - a)^n}$, n intero positivo. Descritto il circolo σ, come precedentemente, e posto $\zeta - a = Re^{\theta i}$ abbiamo

$$\int_s \frac{d\zeta}{(\zeta - a)^n} = \int_\sigma \frac{d\zeta}{(\zeta - a)^n} = \frac{i}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} \, d\theta = \frac{1}{(1-n) R^{n-1}} \left[e^{i(1-n)\theta} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

valevole se n è diverso dall'unità. Cosichè vediamo che $\int_s (\zeta - a)^n \, d\zeta = 0$ se n è un intero diverso da -1, e per $n = -1$, il valore dell'integrale è $2\pi i$.

158. *Se* $f(z) = u + iv$ *è monodroma finita e continua in un campo* C, *il contorno* s *di* C *incluso, ed* u, v *hanno le derivate integrabili in* C, *e* z' *indica un punto interno a* C, *abbiamo*

$$f(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{f(z)}{z - z'} \, dz.$$

Invero, la funzione di ζ, $\frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta'}$, è in C dappertutto monodroma, finita e continua, escluso il punto $\zeta = \zeta'$ in cui diviene infinita. Ove si circondi questo punto ζ' con un circolo σ tutto contenuto i C, descritto col centro in ζ' e di raggio R, che potremo assumere piccolo quanto si vuole, la funzione $\frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta'}$ è monodroma finita e con-

tinua in tutto il campo limitato dalle linee s e da σ; cosicchè avremo

$$\int_s \frac{f(\zeta)}{\zeta-\zeta'}\,d\zeta - \int_\sigma \frac{f(\zeta)}{\zeta-\zeta'}\,d\zeta = 0,$$

dove l' integrazione lungo σ si intenderà condotta lasciando a sinistra l'area racchiusa da σ, se l' integrazione lungo s è condotta lasciando a sinistra il campo C.

Posto $\zeta-\zeta' = Re^{\theta i}$, è

$$\int_\sigma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\zeta'} = i\int_0^{2\pi} f(\zeta'+Re^{\theta i})\,d\theta = i\int_0^{2\pi}[f(\zeta'+Re^{\theta i})-f(\zeta')]\,d\theta + 2\pi i f(\zeta')$$

e quindi

$$\int_s \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\zeta'} - 2\pi i f(\zeta') = i\int_0^{2\pi}[f(\zeta'+Re^{\theta i})-f(\zeta')]\,d\theta\,;$$

ed essendo $f(\zeta)$ continua in ζ', dato δ, esiste un numero R_1 tale che per $R \leq R_1$ e qualunque sia θ è $|f(\zeta'+Re^{\theta i})-f(\zeta')| < \frac{\delta}{2\pi}$ cosichè allora

$$\left|\int_s \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\zeta'} - 2\pi i f(\zeta')\right| < \delta.$$

Ma, la quantità di cui si prende il modulo nel primo membro essendo una costante, rispetto a θ e ad R, dipendente solo da ζ' dovremo avere

$$\int_s \frac{f(\zeta)}{\zeta-\zeta'}\,d\zeta - 2\pi i f(\zeta') = 0,$$

cioè $f(\zeta') = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{f(\zeta)}{\zeta-\zeta'}\,d\zeta$, come volevasi dimostrare.

Questa formola è notevole ed importante. Essa dà il valore che la $f(\zeta)$ ha in un punto ζ', interno al campo, mediante i valori che essa ha sul contorno s di esso, così che i valori sul contorno, quando la funzione debba essere monodroma finita e continua in tutto il campo, la determinano completamente in guisa che non vi possa essere che

una sola funzione, monodroma finita e continua, avente quei valori sul contorno. Osserviamo però che questa formola non va intesa nel senso che si possano sempre assegnare arbitrariamente sul contorno i valori di una funzione, che nel campo debba essere monodroma finita e continua, poichè potrebbe avvenire che non esistesse una tale funzione, avente quei valori prefissati sul contorno.

159. *Una funzione monodroma finita e continua* $f(z) = u + iv$ *in tutto un campo* C, *e tale che le derivate di* u, v *sieno in esso integrabili, ammette tutte le derivate* $f'(z')$, $f''(z')$...., *finite e continue in tutti i punti* z' *interni al campo.*

Invero, abbiamo $f(z') = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{f(z)}{z - z'} dz$; ma la $\frac{f(z)}{z - z'}$ è continua rispetto a z' per tutti i punti z' interni a C, ed ammette derivata continua $\frac{f(z)}{(z - z')^2}$, e perciò, derivando rispetto a z', potremo applicare la regola di derivazione sotto il segno integrale ottenendo

$$f'(z') = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{f(z)\, dz}{(z - z')^2}.$$

Proseguendo così, in modo analogo, si troverebbe

$$f''(z') = \frac{2}{2\pi i}\int_s \frac{f(z)}{(z - z')^3} dz,$$

$$f'''(z') = \frac{2 \cdot 3}{2\pi i}\int_s \frac{f(z)}{(z - z')^4} dz,$$

ed in generale

$$f^{(n)}(z') = \frac{2 \cdot 3 \ldots n}{2\pi i}\int_s \frac{f(z)}{(z - z')^{n+1}} dz.$$

Serie del Taylor e del Laurent

160. Supposta $f(\zeta)$ monodroma finita e continua in un campo C, incluso il contorno s, e ζ' un punto interno riprendiamo la formola

$$(1) \qquad f(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta.$$

Ora dalla formola

$$(2) \qquad 1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{n-1} = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\alpha^n}{1-\alpha},$$

ponendovi $\alpha = \dfrac{\zeta' - a}{\zeta - a}$, ricaviamo

$$\frac{1}{\zeta - \zeta'} = \frac{1}{\zeta - a} + \frac{\zeta' - a}{(\zeta - a)^2} + \ldots + \frac{(\zeta' - a)^{n-1}}{(\zeta - a)^n} + \frac{(\zeta' - a)^n}{(\zeta - a)^n (\zeta - \zeta')}.$$

Supposto a non sia un punto di s, sostituendo questo valore di $\dfrac{1}{\zeta - \zeta'}$ nella (1), abbiamo

$$f(\zeta') = I_0 + (\zeta - a) I_1 + (\zeta' - a)^2 I_2 + \ldots + (\zeta' - a)^{n-1} I_{n-1} + R_n,$$

dove abbiamo posto

$$I_r = \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - a)^{r+1}}, \quad R_n = \frac{(\zeta' - a)^n}{2\pi i} \int_s \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - a)^n (\zeta - \zeta')}.$$

La quantità R_n, ove il contorno s non sia di un sol pezzo, bensì dei pezzi $s_1, s_2 \ldots s_n$, si comporrà di un numero finito di termini della forma $\dfrac{(\zeta' - a)^n}{2\pi i} \displaystyle\int_{s_r} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - a)^n (\zeta - \zeta')}$, che, in virtù del teorema della media, saranno uguali a $\dfrac{\lambda_r \text{ arco } s_r}{2\pi} \dfrac{f(\xi_r)}{\xi_r - \zeta'} \left(\dfrac{\zeta' - a}{\xi_r - a} \right)^n$, dove λ_r è quantità il cui modulo non supera l'unità e ξ_r è un certo punto sopra s_r.

Se ora supponiamo a sia un punto interno al campo C, e tale che il cerchio descritto col centro in a e con raggio $|\zeta' - a|$ sia tutto

interno al campo, sarà sempre $\left|\frac{\zeta' - a}{\xi_r - a}\right| < 1$, e quindi, al crescere indefinito di n, è $\lim \left\{ \frac{\lambda_r \text{ arco } s_r}{2\pi} \frac{f(\xi_r)}{(\xi_r - \zeta')} \left(\frac{\zeta' - a}{\xi_r - a}\right)^n \right\} = 0$, e quindi ancora $\lim R_n = 0$; così che allora varrà lo sviluppo in serie

$$f(\zeta) = I_0 + (\zeta' - a) I_1 + (\zeta' - a)^2 I_2 + \ldots + (\zeta' - a)^n I_n + \ldots.$$

e la serie del secondo membro è quella dal TAYLOR, perchè (n. 150) è

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} = \frac{1}{1 . 2 \ldots n} f^{(n)}(a).$$

Da quanto precede risulta che una funzione $f(\zeta)$ è sviluppabile colla serie del TAYLOR, ordinata secondo le potenze di $\zeta - a$, in tutti i punti ζ interni ad un cerchio col centro in a nel quale la $f(\zeta)$ si mantiene monodroma finita e continua, avvertendo che lo sviluppo medesimo è valido pei punti interni, anche quando sulla circonferenza la funzione cessi di essere finita o continua, perchè, qualunque sia il punto ζ interno al circolo, possiamo tra esso e la circonferenza far passare un secondo circolo concentrico e sul quale la $f(\zeta)$ è finita e continua, ed assumendo questo secondo circolo come il contorno s della precedente ricerca, si giunge alla serie del Taylor. Possiamo dunque enunciare il seguente importante e fondamentale teorema dovuto a CAUCHY:

I valori di una funzione monodroma finita e continua in un cerchio di centro a, *il contorno incluso oppure no, possono, per ogni punto* z *interno al cerchio, esprimersi mediante la serie del Taylor relativa al punto* a.

Se $a = 0$ si ha la serie del MAC-LAURIN.

Questo teorema ci può risparmiare, per le funzioni monogene di variabile complessa, lo studio del resto della serie, come avevamo dovuto fare nel calcolo differenziale per le funzioni qualunque di variabile reale, e la sola ispezione della funzione può bastare ad accertarci della sua sviluppabilità o no, secondo la serie del Taylor. Così ad es.: poichè la funzione $\frac{1}{1 + \zeta}$ diviene infinita nel punto $\zeta = -1$, e dappertutto altrove è monodroma finita e continua, essa è sviluppabile colla serie del Mac-Laurin in tutti i punti ζ interni

un circolo col centro nel punto $\zeta = 0$ e di raggio *uno*, ed è svi-
ppabile colla serie del TAYLOR, secondo le potenze di $\zeta - a$, in
ti i punti ζ interni ad un circolo col centro nel punto a e di rag-
o $|a - 1|$.

161. Dimostriamo ora che se una funzione monodroma finita e
ntinua è sviluppabile nei punti ζ interni ad un circolo col centro
a in una serie ordinata secondo le potenze di $\zeta - a$, questa serie
quella del Taylor.

Sia infatti

$$f(\zeta) = A_0 + A_1(\zeta - a) + A_2(\zeta - a)^2 + \ldots + A_n(\zeta - a)^n + \ldots;$$

oltiplichiamo i due membri per $\frac{d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}$, ed integriamo lungo
a linea chiusa σ racchiudente il punto a e tutta interna al circolo.
ichè possiamo applicare alle serie di potenze l'integrazione termine
termine, avremo

$$\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} = A_0\int_\sigma \frac{d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} + A_1\int_\sigma \frac{d\zeta}{(\zeta-a)^n} + \ldots + A_n\int_\sigma \frac{d\zeta}{\zeta-a} + A_{n+1}\int_\sigma d\zeta + \ldots;$$

e tutti gli integrali nel secondo membro sono zero fuori che
$\frac{d\zeta}{\zeta - a} = 2\pi i$ (n. 157), quindi

$$\int_\sigma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} = A_n\, 2\pi i,$$

sia, poichè $f(a) = \frac{1 \,.\, 2 \,..\, n}{2\pi i}\int_\sigma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}$, sarà $A_n = \frac{f(a)}{1 \,.\, 2 \ldots .\, n}$, il
he mostra appunto che lo sviluppo (1) è quello del Taylor.

162. Sia $f(\zeta)$ monodroma finita e continua in tutti i punti di
na corona circolare di centro a e di raggi R, R_1, $(R > R_1)$, il con-
orno incluso. Indicando con s, s_1 le circonferenze dei circoli di raggi

R, R_1 e ζ' un punto qualunque interno alla corona avremo

$$f(\zeta') = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta'}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{s_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta'}\,d\zeta,$$

intendendo l'integrazione lungo i circoli condotta in modo da lasciare a sinistra la relativa area circolare.

Il primo termine del secondo membro si trasforma, analogamente a quanto si fece al n. 160, nella serie

$$I_0 + I_1(\zeta' - a) + I_2(\zeta' - a)^2 + \ldots + I_n(\zeta' - a)^n + \ldots.$$

dove

$$I_n = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}.$$

Per trasformare il secondo termine poniamo $\alpha = \frac{\zeta - a}{\zeta' - a}$ nella formola (2) del n. 160; avremo

$$\frac{1}{\zeta' - \zeta} = \frac{1}{\zeta' - a} + \frac{\zeta - a}{(\zeta' - a)^2} + \ldots + \frac{(\zeta - a)^{n-1}}{(\zeta' - a)^n} + \frac{(\zeta - a)^n}{(\zeta' - a)^n(\zeta' - \zeta)}$$

per cui

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{s_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta'}\,d\zeta = \frac{A_0}{\zeta' - a} + \frac{A_1}{(\zeta' - a)^2} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{(\zeta' - a)^n} + R_n$$

dove
$$A_r = \frac{1}{2\pi i}\int_{s_1} f(\zeta)(\zeta - a)^r\,d\zeta$$

e

$$R_n = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{(\zeta' - a)^n}\int_{s_1} \frac{f(\zeta)(\zeta - a)^n}{\zeta' - \zeta}\,d\zeta = \lambda R_1\,\frac{f(\xi)}{\zeta' - \xi}\left(\frac{\xi - a}{\zeta' - a}\right)^n.$$

dove λ è il solito numero il cui modulo non supera l'unità e ξ è un certo punto della circonferenza s_1; e, poichè $\left|\frac{\xi - a}{\zeta' - a}\right| < 1$, è $\lim_{n=\infty} R_n = 0$, cosichè si avrà lo sviluppo in serie

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta'}\,d\zeta = \frac{A_0}{\zeta' - a} + \frac{A_1}{(\zeta' - a)^2} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{(\zeta' - a)^n} + \ldots$$

Sostituendo nel secondo membro della (1), ed osservando che integrali I_n ed A_n non cambiano valore se la integrazione è conta lungo una curva chiusa appartenente alla corona circolare e chiudente il punto a, poniamo lungo un circolo di centro a e raggio R_2, dove $R > R_2 > R_1$, e di circonferenza s_2, possiamo ivere:

$$f(\zeta') = I_0 + I_1(\zeta' - a) + I_2(\zeta' - a)^2 + \ldots + I_n(\zeta' - a)^n + \ldots$$

$$+ \frac{I_{-1}}{\zeta' - a} + \frac{I_{-2}}{(\zeta' - a)^2} + \ldots + \frac{I_{-n}}{(\zeta' - a)^n} + \ldots$$

ve $I_r = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_2} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - a)^{r+1}}$.

Analogamente a quanto notammo al n. 160, si riconosce che esto sviluppo è valido anche se sui circoli di raggio R, R_1 la funne cessa di essere finita o continua.

Abbiamo quindi il seguente teorema, dovuto a P. A. Laurent l 1843:

Una funzione monodroma e continua entro una corona circolare centro a, *può, nei punti interni* z *di essa, rappresentarsi mediante a serie che procede secondo le potenze intere, positive e negative,* z — a.

In modo completamente analogo a quello tenuto al n. 161 si mostrerebbe che una tale funzione può svilupparsi in un sol modo, condo le potenze positive e negative di $\zeta - a$, cioè collo sviluppo l Laurent.

Supponiamo che dentro al circolo di raggio R_1 vi sia il solo ntro a, nel quale la funzione divenga infinita o discontinua. Allora sviluppo del Laurent varrà per quanto il punto ζ sia prossimo al ntro a, giacchè potremo sempre descrivere col centro in a un circolo di raggio R_2 che escluda il punto ζ, ed allora nella corona circolare coi raggi R, R_2 la $f(\zeta)$ è monodroma e continua. In conseuenza: *se* a *è un punto nel quale la* f(z) *è infinita o discontinua* b *è il punto più vicino ad* a *nel quale la* f(z) *è pure infinita o iscontinua, pei punti* z *interni al circolo di centro* a *e di raggio* a — b|, *escluso il centro* a, *la* f(z) *è sviluppabile in un sol modo n serie ordinata secondo le potenze intere, positive e negative, di* z — a.

Il punto a è certamente un punto singolare (Vedi n. 149) di

una funzione analitica, di cui fa parte la nostra funzione $f(\zeta)$; perchè se col centro in un punto qualunque c del circolo $\left(a, \frac{R_1}{2}\right)$ descriviamo un circolo che passi per a, in questo i valori di $f(\zeta)$ vengono dati da una serie di potenze, che definisce una funzione analitica di cui fan parte i valori di $f(\zeta)$ in (a, R_1), e per questa funzione analitica il punto a è un punto singolare.

Diremo quindi anche il punto a *punto singolare isolato* per la $f(\zeta)$.

163. Supponiamo il punto a sia un punto *singolare isolato* (di infinito o di discontinuità) per la $f(\zeta)$; varrà in un *intorno* del punto a (un circolo col centro in a e di raggio $|b-a|$ se b è il punto singolare il più vicino ad a) lo sviluppo del LAURENT. Ora se la parte ordinata per le potenze negative di $\zeta - a$ è un polinomio di grado n, la funzione ha nel punto a un infinito d'ordine n (vedi vol. I; pag. 55) e si dice allora che il punto a è un *polo* o un *infinito* o una *singolarità polare* della funzione. Invero essendo allora nell'intorno di a

$$(1) \qquad f(\zeta) = \frac{B_1}{\zeta - a} + \frac{B_2}{(\zeta - a)^2} + \ldots + \frac{B_n}{(\zeta - a)^n}$$
$$+ A_0 + A_1(\zeta - a) + A_2(\zeta - a)^2 + \ldots,$$

dove B_n è certamente diversa da zero, abbiamo

$$(2) \qquad \lim_{\zeta = a} (\zeta - a)^n f(\zeta) = B_n,$$

che dice appunto che a è un punto ove la $f(\zeta)$ diviene infinita di ordine n.

Dalla (1) scritta così

$$f(\zeta) = \frac{1}{(\zeta - a)^n} \{B_n + B_{n-1}(\zeta - a) + \ldots + B_1(\zeta - a)^{n-1} + A_0(\zeta - a)^n + A_1(\zeta - a)^{n-1} + \ldots$$

si ricava

$$\frac{1}{f(\zeta)} = \frac{(\zeta - a)^n}{B_n + B_{n-1}(\zeta - a) + \ldots + B_1(\zeta - a)^{n-1} + A_0(\zeta - a)^n + \ldots}$$

la quale si riconosce che la inversa $\frac{1}{f(z)}$ è finita nel punto a, e priamente nel punto a diviene zero di ordine n, giacchè

$$\frac{1}{f(z)}\,\frac{1}{(z-a)^n}=\frac{1}{B_n}.$$

Inversamente, se è verificata la (2), nello sviluppo di $f(z)$ nelntorno di a la parte ordinata per le potenze negative di $z-a$ è polinomio di grado n in $\frac{1}{z-a}$. Infatti, per la (2) si vede che un certo intorno di a avremo

$$(z-a)^n f(z)=B_n+\varphi(z),$$

ve $\varphi(z)$ è funzione monodroma finita e continua, che si annulla r $z=a$, ed avrà quindi la forma

$$\varphi(z)=A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+\ldots+A_n(z-a)^n+\ldots$$

sichè

$$f(z)=\frac{B_n}{(z-a)^n}+\frac{A_1}{(z-a)^{n-1}}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{z-a}+A_n+A_{n+1}(z-a)+\ldots$$

Così pure si riconosce, senz'altro, che, se la inversa di $f(z)$ è ita nel punto a, la $f(z)$ è pure finita in a se $\frac{1}{f(z)}$ è diversa da ro in a, oppure è infinita di ordine n se la $\frac{1}{f(z)}$ ha in a uno zero ordine n. Tutto ciò è in completa armonia con quanto è stato acnnato nel n. 149 per le funzioni analitiche.

164. Supponiamo ora che nello sviluppo di $f(z)$ nell'intorno l punto singolare a la parte ordinata per le potenze negative di $-a$ sia una serie, di guisa che non valgano più le precedenti conderazioni. Cominciamo allora dal provare che in qualunque intorno omunque piccolo di a vi sono sempre dei punti nei quali $|f(z)|$ ipera un qualunque numero positivo B prefissato comunque grande. ivero, z' indicando un punto di un intorno di a, consideriamo l'ingrale $\int_s \frac{f(z)\,dz}{z-z'}$, dove s indica una curva chiusa qualunque lungo l qual è $|z-a|<|z'-a|$, poniamo un circolo di centro a di rag-

gio R comunque piccolo, ed il cui sviluppo dà luogo alla serie co potenze negative di $\zeta' - a$. Abbiamo

$$\int_s \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - \zeta'} = \lambda 2\pi R \frac{f(\zeta)}{\xi - \zeta'},$$

dove λ è il solito numero il cui modulo non supera l'unità e ξ un certo punto della circonferenza s di raggio R col centro in Ora se $|f(\zeta)|$ si mantenesse sempre minore di una certa quantità, quindi anche $|f(\xi)|$, comunque impiccolisca R, potremmo sempre prendere R così piccolo che risultasse $\left|\int_s \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - \zeta'}\right| < \sigma$, essendo σ co munque piccolo e prefissato, cosichè, essendo il nostro integrale in pendente da R, dovrebbe essere $\int_s \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - \zeta'} = 0$, ed allora la funzione $f(\zeta)$ non avrebbe alcuna singolarità in a, essendo lo sviluppo di quest integrale che dà le potenze negative di $\zeta - a$.

Ciò premesso, osserviamo che anche $\frac{1}{f(\zeta)}$ deve avere nel punto a una singolarità della stessa natura della $f(\zeta)$, altrimenti questa in a sarebbe finita; e che anche $f(\zeta) - A$, dove A è un numero qua lunque, ha nel punto a una singolarità come la $f(\zeta)$, cosichè ciò av viene anche per la funzione $\frac{1}{f(\zeta) - A}$. Dato quindi un numero posi tivo comunque grande $B = \frac{1}{\sigma}$, vi sono sempre dei punti, in un in torno comunque piccolo di a, nei quali $\left|\frac{1}{f(\zeta) - A}\right| > \frac{1}{\sigma}$, cioè nei quali

$$|f(\zeta) - A| < \sigma;$$

cioè, assegnato un numero qualunque A, e preso un numero qualunque positivo arbitrariamente piccolo, in qualunque intorno del punto a vi sono sempre punti nei quali il modulo della differenza tra il valore che la $f(\zeta)$ prende in essi ed il valore A è sempre minore di σ; e si potrebbe anche dimostrare, ciò che qui non possiamo fare, che la $f(\zeta)$ prende in essi effettivamente il valore A, per modo che i punti nei quali la $f(\zeta)$ prende un qualunque valore A

i condensano nel punto a, cioè costituiscono un gruppo di punti di ui a è un punto limite. Vi possono però essere due valori che, come imostrò il sig. PICARD, non vengono presi dalla funzione in un inorno del punto singolare.

I punti a, della natura ora studiata, vennero chiamati dal *Weierrass*, come già accennammo al n. 149, punti *singolari essenziali* della unzione. Essi erano già stati studiati dal CASORATI nella sua opera *Teorica delle Funzioni di variabili complesse* » pubblicata nel 1868, ag. 430 e seguenti. Il CASORATI chiamava questi punti, punti di disconinuità; le precedenti considerazioni intorno ad essi sono analoghe quelle da lui svolte nella citata opera.

Come esempio semplice consideriamo la funzione

$$e^{\frac{1}{z-a}} = 1 + \frac{1}{z-a} + \frac{1}{1.2(z-a)^2} + \frac{1}{1.2.3(z-a)^3} + \dots$$

he ha una singolarità essenziale nel punto a. Vediamo in quali punti el piano questa funzione prende un valore qualunque $r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$, ioè in quali punti z è

$$e^{\frac{1}{z-a}} = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi).$$

Posto $a = \alpha + i\beta$, avremo

$$\frac{1}{z-a} = \frac{x-\alpha-i(y-\beta)}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = \log r + i(\varphi - 2k\pi),$$

(k intero qualunque), da cui

$$\frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = \log r, \quad \frac{y-\beta}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = -\varphi + 2k\pi,$$

dalle quali ricaviamo

$$(1)\quad x = \alpha + \frac{\log r}{(\log r)^2 + (2k\pi - \varphi)^2}, \quad y = \beta + \frac{2k\pi - \varphi}{(\log r)^2 + (2k\pi - \varphi)^2},$$

ed avremo tutti i punti $z = x + iy$ nei quali $e^{\frac{1}{z-a}}$ assume il valore $r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ attribuendo nelle (1) a k tutti i valori interi; e si vede che, al crescere di k, questi punti si avvicinano indefinitamente al punto $a = \alpha + i\beta$. È escluso il valore $r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) = 0$, che non viene mai preso dalla funzione $e^{\frac{1}{z-a}}$.

Teorema sulle serie di funzioni. — Considerazioni sulle funzioni analitiche e sulle espressioni aritmetiche.

165. *Se i termini* $u_n(z)$ *di una serie* $\sum_1^\infty u_n(z)$ *sono funzioni monodrome continue in tutto un campo* C, *e la serie è equiconvergente sul contorno* s *di* C, *questa è funzione (monogena) nei punti interni a* C, *e le sue derivate successive si ottengono derivando termine a termine la serie stessa.*

Invero, se ζ' è un qualunque punto interno a C, avremo, pel teorema di Cauchy,

$$u_n(\zeta') = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{u_n(\zeta)}{\zeta - \zeta'}\, d\zeta,$$

per cui

$$\sum_1^\infty u_n(\zeta') = \frac{1}{2\pi i}\sum_1^\infty \int_s \frac{u_n(\zeta)}{\zeta - \zeta'}\, d\zeta;$$

ma la serie $\sum_1^\infty u_n(\zeta)$ essendo equiconvergente sul contorno s, e quindi anche la serie $\sum_1^\infty \frac{u_n(\zeta)}{\zeta - \zeta'}$, giacchè ζ' è punto interno a C, avremo ancora

$$\int_s \frac{\sum_1^\infty u_n(\zeta)}{\zeta - \zeta'}\, d\zeta = \sum_1^\infty \int_s \frac{u_n(\zeta)}{\zeta - \zeta'}\, d\zeta.$$

In conseguenza

$$\sum_1^\infty u_n(\zeta') = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{\sum_1^\infty u_n(\zeta)}{\zeta - \zeta'}\, d\zeta,$$

dalla qual formola risulta che $\sum_1^\infty u_n(\zeta')$ è funzione monogena della variabile complessa ζ' pei punti ζ' interni a C, giacchè, stante la

continuità rispetto a ζ' della funzione $\dfrac{\sum_1^\infty u_n(\zeta)}{(\zeta-\zeta')^2}$, si ha

$$\frac{d\sum_1^\infty u_n(\zeta')}{d\zeta'}=\frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{\sum_1^\infty u_n(\zeta)}{(\zeta-\zeta')^2}\,d\zeta.$$

Inoltre abbiamo

$$u_n^{(r)}(\zeta')=\frac{1.2\ldots r}{2\pi i}\int_s \frac{u_n(\zeta)}{(\zeta-\zeta')^{r+1}}\,d\zeta$$

e quindi

$$\sum_1^\infty u_n^{(r)}(\zeta')=\frac{1.2\ldots r}{2\pi i}\sum_1^\infty\int_s \frac{u_n(\zeta)}{(\zeta-\zeta')^{r+1}}\,d\zeta,$$

dalla quale, in seguito alla equiconvergenza di $\dfrac{\sum_1^\infty u_n(\zeta)}{(\zeta-\zeta')^{r+1}}$ sopra s, ricaviamo

$$\sum_1^\infty u_n^{(r)}(\zeta')=\frac{1.2\ldots r}{2\pi i}\int_s \frac{\sum_1^\infty u_n(\zeta)}{(\zeta-\zeta')^{r+1}}\,d\zeta=\frac{d^r\sum_1^\infty u_n(\zeta')}{d\zeta'^r}.$$

166. Da questo teorema risulta subito che, se a è un punto interno a C, per tutti i punti appartenenti al massimo circolo di centro a e tutto contenuto in C, la serie $\sum_1^\infty u_n(\zeta)$ può svilupparsi in una serie di potenze $P(\zeta, a)$, che è un elemento di una funzione analitica, che in quel circolo coincide colla serie $\sum_1^\infty u_n(\zeta)$, e che coincide pure con questa in tutti i punti comuni ed interni al suo campo d'esistenza ed al campo C, campo che è stato supposto connesso, avendo nella dimostrazione fatto uso del teorema di Cauchy. Se ora una serie $\sum_1^\infty u_n(\zeta)$ soddisfa in più campi distinti C_1, C_2,... C_n alle

condizioni cui soddisfaceva la serie precedente nel campo C, è possibile che essa rappresenti in questi diversi campi dei pezzi di una stessa funzione analitica, ma potrebbe darsi che ciò sempre non avvenga, vale a dire potrebbe anche succedere che in quei diversi campi la serie rappresentasse dei pezzi di funzioni analitiche diverse. È ciò che effettivamente ha luogo, come ora vedremo, e ciò prova che: *il concetto di funzione analitica* (secondo la definizione del WEIERSTRASS) *di una variabile complessa e il concetto di una dipendenza esprimibile mediante una successione di operazioni aritmetiche* (espressione aritmetica) *non coincidono intieramente.*

Consideriamo, invero, prendendo un esempio classico dovuto allo stesso WEIERSTRASS, la serie

$$(1) \qquad \sum_0^\infty \frac{1}{z^n + z^{-n}} = \sum_0^\infty \frac{z^n}{z^{2n}+1},$$

la quale è sempre convergente assolutamente se $|z| \gtrless 1$, ed è equiconvergente in qualunque campo tutto interno o tutto esterno al circolo $(0, 1)$. Infatti, se $|z| < 1$, e prendiamo z' in modo che sia $|z| < |z'| < 1$, abbiamo

$$\left|\frac{z^n}{z^{2n}+1}\right| \leq \frac{|z|^n}{1-|z|^{2n}} < \frac{|z|^n}{1-|z'|^{2n}};$$

ma la serie $\sum_0^\infty \frac{|z'|^n}{1-|z'|^{2n}}$ è convergente, perchè il limite del rapporto di un termine al precedente, per n crescente indefinitamente, è $\lim |z'| \frac{1-|z'|^{2n-2}}{1-|z'|^{2n}} = |z'| < 1$.

La serie (1) è quindi assolutamente ed uniformemente convergente se $|z| < |z'|$, cioè assolutamente ed uniformemente convergente in qualunque circolo (o, r) essendo $r < |z'|$, il che prova che è assolutamente convergente se $|z| < 1$, ed è equiconvergente in qualunque campo interno al circolo $(0, 1)$.

Se $|z| > 1$ e prendiamo z' in modo che sia $1 < |z'| < |z|$, avremo

$$\left|\frac{1}{z^n + z^{-n}}\right| = \frac{1}{|z|^n \left|1 + \frac{1}{z^{2n}}\right|} \leq \frac{1}{|z|^n\left(1 - \frac{1}{|z|^{2n}}\right)} < \frac{1}{|z'|^n\left(1 - \frac{1}{|z'|^{2n}}\right)}$$

e la serie $\sum_0^\infty \frac{1}{|\zeta'|^n\left(1-\frac{1}{|\zeta'|^{2n}}\right)}$ è convergente perchè il limite del rapporto di un termine al precedente, al crescere di n, è $\frac{1}{|\zeta'|}<1$. Si vede da ciò, come precedentemente, che la serie (1) è assolutamente convergente se $|\zeta|>1$, ed equiconvergente in qualunque campo esterno al circolo $(0,1)$.

Nell'interno del circolo $(0,1)$ la (1) è quindi, in virtù del teorema al n. 165, sviluppabile in serie del Mac-Laurin, la quale è un elemento di una certa funzione analitica $w(\zeta)$. Se a è un punto esterno al circolo $(0,1)$ e ζ è un punto qualunque del circolo di centro a e tangente al circolo $(0,1)$, ma che non contiene questo circolo nel suo interno, il valore della (1) è dato da una serie di potenze di $(\zeta-a)$, che è così un elemento di una certa funzione analitica $w_1(\zeta)$. Ora le due funzioni analitiche sono distinte completamente tra loro, perchè la $w(\zeta)$ non può essere continuata fuori del circolo $(0,1)$ e la $w_1(\zeta)$ dentro al circolo $(0,1)$. Ciò si deduce dal fatto, che noi qui ammetteremo, che se ζ_0 è un punto della circonferenza del circolo $(0,1)$, in un intorno comunque piccolo di ζ_0 vi sono sempre valori di ζ, il cui modulo è <1, e valori di ζ il cui modulo è >1, pei quali il modulo della nostra serie supera qualunque numero positivo prefissato; dal che si trae, ragionando in modo analogo a quello tenuto nell'esempio del n. 147, che appunto la $w(\zeta)$ non può prolungarsi all'esterno e la $w_1(\zeta)$ all'interno del circolo $(0,1)$. La serie (1), che converge nei due campi distinti formati dai punti interni e dai punti esterni al circolo $(0,1)$ rappresenta così la funzione analitica $w(\zeta)$ nell'interno ed un'altra funzione analitica $w_1(\zeta)$ all'esterno del circolo $(0,1)$.

Le due funzioni analitiche $w(\zeta)$, $w_1(\zeta)$ definite dalla serie (1) hanno però tra loro una relazione semplicissima, $w(\zeta)=w_1\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, come è facile riconoscere. Potrebbe perciò generarsi il dubbio che, nel caso in cui una espressione aritmetica, nelle diverse parti, nelle quali essa esiste, rappresenta dei pezzi di funzioni analitiche diverse, tra queste debba allora esistere una connessione necessaria, che permetta dedurre dalle proprietà di una di esse quelle delle altre. Questo dubbio viene completamente a svanire mediante un altro esempio dovuto pure al Weierstrass e che passeremo a sviluppare.

167. Intanto dimostriamo un semplice teorema sulle serie mediante il quale si potranno costruire quante si vogliano espressioni aritmetiche rappresentanti porzioni di funzioni analitiche diverse [1].

Se $n_1, n_2, n_3, \ldots$ *è una successione crescente di numeri interi positivi, e* S_n *indica la somma dei primi* n *termini della serie* $\sum_1^\infty u_n$, *la serie*

$$(1) \qquad \sum_{r=1}^{\infty} \frac{u_{n_r+1} + u_{n_r+2} + \ldots + u_{n_{r+1}}}{S_{n_r} S_{n_{r+1}}}$$

è convergente ed ha per valore $\dfrac{1}{u_1 + u_2 + \ldots + u_{n_1}}$ *se la serie* $\sum_1^\infty u_n$ *è divergente, ed ha per valore* $\dfrac{1}{u_1 + u_2 + \ldots + u_{n_1}} - \dfrac{1}{S}$, *se la serie* $\sum_1^\infty u_n$ *è convergente ed ha il valore* S *diverso da zero.*

Basta osservare che il termine generale della serie (1) è $\dfrac{1}{S_{n_r}} - \dfrac{1}{S_{n_{r+1}}}$, per cui la somma dei primi suoi m termini è

$$\left(\frac{1}{S_{n_1}} - \frac{1}{S_{n_2}}\right) + \left(\frac{1}{S_{n_2}} - \frac{1}{S_{n_3}}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{S_{n_m}} - \frac{1}{S_{n_{m+1}}}\right) = \frac{1}{S_{n_1}} - \frac{1}{S_{n_{m-1}}},$$

che al crescere di m ha per limite $\dfrac{1}{S_{n_1}}$ se $\lim S_{n_{m+1}} = \infty$, cioè se la $\sum_1^\infty u_n$ è divergente, ed ha per limite $\dfrac{1}{S_{n_1}} - \dfrac{1}{S}$, se la $\sum_1^\infty u_n$ è convergente ed ha per valore S [2].

Dal quale teorema si ricava subito che:

Se le $u_n = u_n(z)$ *sono funzioni della variabile complessa* z *e la*

---

[1] Vedi una mia nota: Sulle espressioni analitiche rappresentanti porzioni di funzioni analitiche diverse. Rivista di matematica, anno 1895.

[2] Per $n_1 = 1$, $n_{r+1} = n_r + 1 = n + 1$ si ha il teorema contenuto negli esercizi 2°, 3° a pag. 252 del vol I.

serie $\sum_1^\infty u_n(z)$ *è convergente e vale* $S(z)$, *diverso da zero, in un campo* C, *ed è divergente nei punti non appartenenti a* C, *e nei quali i suoi termini hanno tutti valore determinato, la serie* (1) *rappresenta una porzione della funzione analitica* $\frac{1}{u_1(z)+u_2(z)+\ldots+u_{n_1}(z)}-\frac{1}{S(z)}$ *nei punti* z *di* C, *e una porzione della funzione analitica* $\frac{1}{u_1(z)+u_2(z)+\ldots u_{n_1}(z)}$ *fuori del campo* C.

Ad esempio: partiamoci dalla serie geometrica

$$1+z+z^2+\ldots+z^{n-1}+\ldots.$$

ed osservando che $S_n=\frac{1-z^n}{1-z}$, $S(z)=\frac{1}{1-z}$ se $|z|<1$, e che la serie stessa è divergente se $|z|>1$, si vedrà che la serie

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(1-z)z^{n_r}(1-z^{n_{r+1}-n_r})}{(1-z^{n_r})(1-z^{n_{r+1}})}$$

vale $\frac{1}{1+z+z^2+\ldots+z^{n_1-1}}-(1-z)=\frac{(1-z)z^{n_1}}{1-z^{n_1}}$ se $|z|<1$,

e vale $\frac{1}{1+z+z^2+\ldots+z^{n_1-1}}=\frac{1-z}{1-z^{n_1}}$ se $|z|>1$, e quindi ancora la serie

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{z^{n_r-n_1}(1-z^{n_{r+1}-n_r})}{(1-z^{n_r})(1-z^{n_{r+1}})}$$

rappresenta la funzione $\frac{1}{1-z^{n_1}}$ se $|z|<1$, cioè nell'interno del circolo $(0,1)$, e la funzione $\frac{1}{z^{n_1}(1-z^{n_1})}$ se $|z|>1$, cioè all'esterno di detto circolo.

In particolare, per $n_1 = 1$, $n_{r+1} = 2n_r = 2^r$, si vede che la serie

$$\frac{1}{1-\zeta^2} + \frac{\zeta}{1-\zeta^4} + \frac{\zeta^3}{1-\zeta^8} + \ldots + \frac{\zeta^{2^{r-1}-1}}{1-\zeta^{2^r}} + \ldots$$

vale $\frac{1}{1-\zeta}$ se $|\zeta| < 1$, e vale $\frac{1}{\zeta(1-\zeta)}$ se $|\zeta| > 1$.

Da quanto precede si deduce subito che le serie

$$\frac{1+\zeta^{n_1}}{1-\zeta^{n_1}} + 2\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\zeta^{n_r}(\zeta^{n_{r+1}-n_r}-1)}{(1-\zeta^{n_r})(1-\zeta^{n_{r+1}})}, \quad \frac{1+\zeta}{1-\zeta} + 2\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\zeta^{2^{r-1}}}{\zeta^{2^r}-1}$$

hanno per valore $+1$ nei punti ζ interni al circolo $(0, 1)$, e per valore -1 nei punti ζ esterni a detto circolo, risultato dovuto, in altro modo, al sig. J. Tannery. Indichiamo con $T(\zeta)$ una espressione aritmetica dotata di quest'ultima proprietà, la cui esistenza è ora pienamente provata.

168. Ciò posto, leghiamo tra loro la variabile complessa ζ con un'altra variabile complessa ζ_1, che potremo rappresentare geometricamente nello stesso piano complesso della variabile ζ o, per maggior chiarezza, in un altro piano complesso, mediante la relazione lineare

$$(1) \qquad \zeta = \frac{\alpha\zeta_1 + \beta}{\gamma\zeta_1 + \delta}$$

essendo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ costanti qualunque, tali però che il determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ sia diverso da zero, altrimenti $\frac{\alpha\zeta_1+\beta}{\gamma\zeta_1+\delta}$ sarebbe indipendente da ζ_1.

Nella rappresentazione conforme del piano delle ζ sul piano delle ζ_1, che si ottiene mediante la *sostituzione lineare* (1), ai circoli di un piano corrispondono nell'altro pure dei circoli, considerando la retta come caso particolare del circolo. Invero si abbia il circolo, nel piano delle ζ,

$$a(x^2+y^2) + 2bx + 2cy + g = 0,$$

dove a, b, c, g sono delle costanti reali. Indicando con A' il numero

mplesso coniugato di un numero complesso A, ed osservando che lora è

$$x^2+y^2=\zeta\zeta', \; x=\frac{\zeta-\zeta'}{2}, \; y=\frac{\zeta-\zeta'}{2i}=-i\frac{\zeta-\zeta'}{2},$$

la equazione precedente può darsi la forma

$$a\zeta\zeta'+b(\zeta+\zeta')-ic(\zeta-\zeta')+g=0,$$

sia

$$a\zeta\zeta'+B\zeta+B'\zeta'+g=0, \tag{2}$$

endo posto $B=b-ic$, ed è questa la forma generale dell'equaone di un circolo, espressa per le variabili ζ, ζ', dove osserviamo che coefficiente di $\zeta\zeta'$ ed il termine indipendente da ζ sono reali, e i efficienti di ζ e ζ' sono complessi coniugati.

Sostituendo ora a ζ il valore (1) nella (2) e notando che $=\frac{\alpha'\zeta'_1+\beta'}{\gamma'\zeta'_1+\delta'}$, la (2) si trasforma nella

$$a_1\zeta_1\zeta'_1+B_1\zeta_1+B'_1\zeta'_1+g_1=0, \tag{3}$$

sendo

$$a_1=a\alpha\alpha'+B\alpha\gamma'+B'\alpha'\gamma+g\gamma\gamma',$$

$$B_1=a\alpha\beta'+B\alpha\delta'+B'\beta'\gamma+g\gamma\delta',$$

$$B'_1=a\alpha'\beta+B\alpha'\delta+B\beta\gamma'+g\gamma'\delta,$$

$$g_1=a\gamma\gamma'+B\beta\delta'+B'\beta'\delta+g\delta\delta',$$

poichè a_1, g_1 sono reali e B_1, B'_1 complessi coniugati, la (3) rapresenta appunto un circolo nel piano delle ζ_1

Si riconosce poi anche subito che ad ogni circolo del piano ζ_1 orrisponde un circolo nel piano ζ, giacchè dalla (1) ricaviamo

$$\zeta_1=\frac{\delta\zeta-\beta}{-\gamma\zeta+\alpha},$$

he esprime ζ_1 linearmente per ζ.

I rapporti di tre delle costanti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ alla quarta si potranno empre determinare in modo che a tre punti u, v, w del piano ζ

corrispondano tre dati punti u_1, v_1, w_1 del piano delle ζ_1. Se nella formola (1) si pongono successivamente per (ζ, ζ_1) le coppie (u, u_1), (v, v_1), (w, w_1) si hanno tre equazioni che servono alla determinazione di tali rapporti; ma facciamo più presto a stabilire la relazione

$$\frac{\zeta - u}{\zeta - v} \frac{w - v}{w - u} = \frac{\zeta_1 - u_1}{\zeta_1 - v_1} \frac{w_1 - v_1}{w_1 - u_1}$$

tra ζ e ζ_1, che è lineare in ζ e ζ_1 ed è appunto tale che ai punti u, v, w corrispondono i punti u_1, v_1, w_1

Far corrispondere a tre punti del piano ζ tre punti dati del piano ζ_1 equivale nel nostro caso a far corrispondere ad un circolo del piano ζ un dato circolo del piano ζ_1.

Possiamo inoltre fare in modo che ai punti interni ad un circolo A nel piano ζ corrispondano i punti interni ad un dato circolo A_1 nel piano ζ_1. Invero se $\zeta = \frac{\alpha \zeta_1 + \beta}{\gamma \zeta_1 + \delta}$ è la sostituzione per la quale ai punti della circonferenza di A corrispondono quelli di A_1, se già ai punti interni di A non corrispondono gli interni di A_1, faremo la sostituzione

$$\zeta_1 - a_1 = \frac{R^2}{\zeta_2 - a_1},$$

dove a_1, R indicano il centro ed il raggio del circolo A_1. In virtù di questa formola al circolo A_1 nel piano delle ζ_1 corrisponde un circolo A_2 dello stesso raggio nel piano delle ζ_2 e di centro a_1, perchè se $|\zeta_1 - a_1| = R$ avremo ancora $|\zeta_2 - a_1| = R$, ed ai punti esterni al circolo A_1 corrispondono i punti interni al circolo A_2, perchè se $|\zeta_1 - a_1| > R$ risulterà $|\zeta_2 - a_1| < R$. In conseguenza la sostituzione

$$\zeta = \frac{\alpha \dfrac{R^2}{\zeta_2 - a_1} + \beta}{\gamma \dfrac{R^2}{\zeta_2 - a_1} + \delta} = \frac{\alpha R^2 + \beta(\zeta_2 - a_1)}{\gamma R^2 + \delta(\zeta_2 - a_1)}$$

ossia, scrivendo ζ_1 in luogo di ζ_2,

$$\zeta = \frac{\beta \zeta_1 + \alpha R^2 - \beta a_1}{\delta \zeta_1 + \gamma R^2 - \delta a_1}$$

a corrispondere ai punti della circonferenza di A quelli della circonferenza di A_1, ed ai punti interni al circolo A i punti interni il circolo A_1.

Siano ora dati i circoli $A_1, A_2, \ldots A_n$, nel piano delle z, tutti esterni tra loro, ed indichiamo con A_0 la parte del piano esterna a tutti questi circoli, e siano arbitrariamente assegnate le funzioni analitiche $t_0(z), t_1(z), \ldots t_n(z)$ tali che $t_r(z)$ esista almeno nel campo A_r.

Sia $z_1 = \frac{\alpha_r z + \beta_r}{\gamma_r z + \delta_r}$ la sostituzione mediante la quale ai punti interni al circolo $(0, 1)$ nel piano z_1 corrispondono i punti interni nel piano z, al circolo A_r. Allora la funzione $T\left(\frac{\alpha_r z + \beta_r}{\gamma_r z + \delta_r}\right)$ ha per valore $+1$ nei punti interni, e -1 nei punti esterni al circolo A_r, perchè è $\left|\frac{\alpha_r z + \beta_r}{\gamma_r z + \delta_r}\right| < 1$ oppure > 1 secondochè il punto z è interno oppure esterno al circolo A_r.

Formata ora l'espressione aritmetica

$$t_0(z) + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\left[1 + T\left(\frac{\alpha_r z + \beta_r}{\gamma_r z + \delta_r}\right)\right][t_r(z) - t_0(z)]$$

si vede subito che questa ha per valore $t_0(z)$ nel campo A_0, e ha per valore $t_1(z), t_2(z), \ldots t_n(z)$ all'interno rispettivamente dei circoli $A_1, A_2, \ldots A_n$; e questo è l'esempio generale del WEIERSTRASS, cui avevamo accennato alla fine del n. 166.

Residui. Calcolo di alcuni integrali

169. La $f(z)$, funzione monodroma in un campo C di cui s sia il contorno, abbia dentro ad esso le singolarità polari o essenziali $a_1, a_2 \ldots a_n$.

Descritti col centro in questi punti dei circoli $s_1, s_2 \ldots s_n$ interni al campo e racchiudenti ciascuno la sola singolarità che è nel centro, avremo

$$1) \qquad \int_s f(z)\,dz = \int_{s_1} f(z)\,dz + \int_{s_2} f(z)\,dz + \ldots + \int_{s_n} f(z)\,dz.$$

Calcoliamo uno degli integrali del secondo membro, poniamo il primo $\int_{s_1} f(\zeta)\,d\zeta$. In un intorno di a abbiamo lo sviluppo

$$f(\zeta) = A_0 + A_1(\zeta - a_1) + \ldots + \frac{B_1}{\zeta - a_1} + \frac{B_2}{(\zeta - a_1)^2} + \ldots$$

ed in conseguenza

$$\int_{s_1} f(\zeta)\,d\zeta = B_1 \int_{s_1} \frac{d\zeta}{\zeta - a_1} = 2\pi i\, B_1,$$

ed analogamente per gli altri.

Cauchy chiamava *residuo* della $f(\zeta)$ relativo al punto singolare a_1 il coefficiente di $\frac{1}{\zeta - a_1}$ nello sviluppo di $f(\zeta)$ nell'intorno del punto singolare a_1; vediamo così che il residuo relativo ad a_1 è uguale all'integrale $\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{d\zeta}{\zeta - a_1}$ essendo σ una curva chiusa qualunque appartenente all'intorno di a_1 e racchiudente a_1; e vediamo ancora che questo integrale è nullo se manca il termine in $\frac{1}{\zeta - a_1}$ in detto sviluppo. La formola (1) ci mostra che $\frac{1}{2\pi i}\int_s f(\zeta)\,d\zeta$ è uguale alla somma dei residui di $f(\zeta)$ relativi ai punti singolari, in numero finito, che la $f(\zeta)$ ha dentro al campo il cui contorno è s.

170. I teoremi di Cauchy sugli integrali e sui residui sono spesso utili pel calcolo effettivo di alcuni integrali definiti e per quello della somma di alcune serie. Diamone alcuni

Esempi

1) Si voglia calcolare il valore di $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(a\,x)}{c^4 + x^4}\,dx$, dove x è variabile reale, a e c sono reali e $a > 0$.

Consideriamo la funzione

$$f(\zeta) = \frac{\cos(a\,\zeta) + i \operatorname{sen}(a\,\zeta)}{c^4 + \zeta^4} = \frac{e^{ia\zeta}}{c^4 + \zeta^4},$$

dove $\zeta = x + iy$. La $f(\zeta)$ diviene infinita nei quattro punti $\zeta = c e^{i\pi\frac{2k+1}{4}}$ $(k = 0, 1, 2, 3)$.

Consideriamo il campo limitato dall'asse delle x e da un semicircolo s, al disopra di questo asse, di centro zero e di raggio b destinato a crescere indefinitamente.

Dentro a questo campo la $f(\zeta)$ ha i due punti di infinito $c_1 = c e^{\frac{i\pi}{4}}$, $c_2 = c e^{i\frac{3\pi}{4}}$, cosichè avremo

$$2) \qquad \int_{-b}^{b} \frac{e^{ia\zeta}\, d\zeta}{c^4 + \zeta^4} + \int_{s} \frac{e^{ia\zeta}\, d\zeta}{c^4 + \zeta^4} = 2\pi i(\mu_1 + \mu_2),$$

dove $\mu_1 . \mu_2$ sono i residui di $f(\zeta)$ relativi ai punti c_1, c_2; e questa formola sussiste per quanto grande sia b. Ma al limite, per b crescente indefinitamente, il secondo integrale del primo membro è zero. Invero, posto $\zeta = b e^{i\theta}$, è

$$\int_{s} \frac{e^{ia\zeta}\, d\zeta}{c^4 + \zeta^4} = i \int_0^{\pi} \frac{b e^{i\theta}\, e^{iab(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)}\, d\theta}{c^4 + b^4 e^{4i\theta}} = i \int_0^{\pi} \frac{b e^{\,ab \operatorname{sen}\theta}\, e^{i(ab\cos\theta + \theta)}\, d\theta}{c^4 + b^4(\cos 4\theta + i \operatorname{sen} 4\theta)},$$

ed il modulo della quantità sotto il segno integrale è

$$\frac{b e^{-ab \operatorname{sen}\theta}}{|c^4 + b^4(\cos 4\theta + i \operatorname{sen} 4\theta)|} = \frac{b}{e^{ab \operatorname{sen}\theta}\sqrt{c^8 + b^8 + 2c^4 b^4 \cos 4\theta}} < \frac{b}{e^{ab \operatorname{sen}\theta}\, b^2 \sqrt{b^4 - 2c^4}}$$

$$< \frac{1}{b\sqrt{b^4 - 2c^4}}$$

quantità che può rendersi piccola quanto si vuole prendendo b sufficientemente grande; cosichè il limite dell'integrale è zero.

Calcoliamo adesso i residui μ_1 e μ_2. Osserviamo che

$$e^{ia\zeta} = e^{ia(\zeta - c_1)}\, e^{iac_1} = e^{iac_1} \left\{ 1 + ia(\zeta - c_1) - \frac{a^2(\zeta - c_1)^2}{1.2} + \dots \right\}$$

e che sviluppando $\dfrac{1}{c^4 + \zeta^4}$ in frazioni semplici è

$$\frac{1}{c^4 + \zeta^4} = \frac{1}{4c_1^3} \frac{1}{\zeta - c_1} + \varphi(\zeta)$$

dove $\varphi(\zeta)$ non contiene potenze negative di $\zeta - c_1$, cosichè il coefficiente di $\frac{1}{\zeta - c_1}$ nello sviluppo di $\frac{e^{iaz}}{c^4 + \zeta^4}$ nell'intorno di c_1, cioè μ_1, è $\frac{e^{iac_1}}{4c^3}$, ossia

$$\mu = \frac{e^{iac\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)}}{4c^3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{e^{\frac{iac}{\sqrt{2}}(1+i)}}{\frac{4c^3}{\sqrt{2}}(i-1)}.$$

Analogamente si trova

$$\mu_2 = \frac{e^{\frac{iac}{\sqrt{2}}(-1+i)}}{\frac{4c^3}{\sqrt{2}}(1+i)},$$

e quindi

$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{\sqrt{2}}{4c^3} e^{-\frac{ac}{\sqrt{2}}} \left(\frac{e^{\frac{iac}{\sqrt{2}}}}{i-1} + \frac{e^{\frac{-iac}{\sqrt{2}}}}{1+i} \right) = -\frac{i\sqrt{2}}{4c^3} e^{\frac{-ac}{\sqrt{2}}} \left(\cos\frac{ac}{\sqrt{2}} + \operatorname{sen}\frac{ac}{\sqrt{2}} \right).$$

Passando al limite nella (2) per b infinito, ed osservando che nel primo integrale la ζ è la variabile reale x, si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}\,dx}{c^4 + x^4} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax) + i \operatorname{sen}(ax)}{c^4 + x^4}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{e^{\frac{-ac}{\sqrt{2}}}}{c^3} \left(\cos\frac{ac}{\sqrt{2}} + \operatorname{sen}\frac{ac}{\sqrt{2}} \right)$$

da cui $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{c^4 + x^4}\,dx = 0$, e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)\,dx}{c^4 + x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{e^{\frac{-ac}{\sqrt{2}}}}{c^3} \left(\cos\frac{ac}{\sqrt{2}} + \operatorname{sen}\frac{ac}{\sqrt{2}} \right).$$

Osservando che $\int_{-\infty}^{0} \frac{\cos(a\,x)\,dx}{c^4+x^4} = \int_{0}^{\infty} \frac{\cos(a\,x)\,dx}{c^4+x^4}$, abbiamo

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(a\,x)\,dx}{c^4+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,\frac{e^{\frac{-ac}{\sqrt{2}}}}{c^3}\left(\cos\frac{a\,c}{\sqrt{2}} + \operatorname{sen}\frac{a\,c}{\sqrt{2}}\right).$$

2) Gli infiniti della funzione monodroma $\frac{1}{\operatorname{sen}^2 z}$ sono nei punti $z = k\pi$, dove k è un intero qualunque. Per determinarne i residui osserviamo che, dall'essere $\lim_{z=0} \frac{z}{\operatorname{sen} z} = 1$, abbiamo, in un certo intorno di $z = 0$, $\frac{z}{\operatorname{sen} z} = 1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots$, e poichè $\frac{z}{\operatorname{sen} z}$ non cambia valore cambiando z in $-z$, dovrà essere $A_i = 0$, $i = 0, \ldots$, cosichè

$$\frac{1}{\operatorname{sen} z} = \frac{1}{z} + A_2 z + A_4 z^3 + \ldots$$

da questa

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 z} = \frac{1}{z^2} + 2\,A_2 + 2\,A_4\,z^2 + \ldots,$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 z} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2(z - k\pi)} = \frac{1}{(z-k\pi)^2} + 2\,A_2 + 2\,A_4\,(z - k\pi)^2 + \ldots$$

lasciando il termine in $\frac{1}{z - k\pi}$ nello sviluppo di $\frac{1}{\operatorname{sen}^2 z}$ in un intorno di $z = k\pi$, il residuo di $\frac{1}{\operatorname{sen}^2 z}$ relativo ai suoi punti di infinito è zero. In conseguenza, se s indica una curva chiusa qualunque, che non passi per alcun punto di infinito, è $\int_s \frac{dz}{\operatorname{sen}^2 z} = 0$. Si ricava da ciò che $\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\operatorname{sen}^2 z}$ è funzione monodroma di z, perchè qualunque sia

la linea di integrazione da z_0 a z il valore dell'integrale è sempre lo stesso, cioè

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\operatorname{sen}^2 z} = \cot z - \cot z_0 .$$

3) Si voglia il valore dell'integrale

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{f(z)(z'-a)^m}{(z-z')(z-a)^m} dz, \quad (m \text{ intero positivo}),$$

esteso alla curva chiusa s, sulla quale e nel cui interno la $f(z)$ è monodroma finita e continua, e che racchiude i punti z' ed a.

Osservando che la funzione sotto l'integrale diviene infinita nei punti z' ed a, avremo $I = \mu_{z'} + \mu_a$, dove $\mu_{z'}$ e μ_a indicano i residui di detta funzione relativi a z' e ad a. Calcoliamo questi residui.

Nell'intorno di z' è

$$f(z) = f(z') + (z-z')f'(z') + \dots,$$

$$\frac{f(z)}{z-z'} = \frac{f(z')}{z-z'} + f'(z') + \frac{(z-z')}{1.2} f''(z') + \dots,$$

$$\frac{(z'-a)^m}{(z-a)^m} = 1 - (z-z')\frac{m}{(z'-a)} + \dots,$$

quindi $\mu_{z'} = f(z')$.

Nell'intorno di a abbiamo

$$f(z) = f(a) + (z-a)f'(a) + \frac{(z-a)^2}{1.2} f''(a) + \dots + \frac{(z-a)^{m-1}}{1.2\dots(m-1)} f^{(m-1)}(a) + \dots$$

$$\frac{1}{z-z'} = -\frac{1}{z'-a}\frac{1}{1-\frac{z-a}{z'-a}} = -\frac{1}{z'-a}\left\{1 + \frac{z-a}{z'-a} + \frac{(z-a)^2}{(z'-a)^2} + \dots\right.$$

$$\left. + \frac{(z-a)^m}{(z'-a)^m} + \dots\right\};$$

quindi il coefficiente di $\frac{1}{z-a}$ nello sviluppo di $\frac{f(z)(z'-a)^m}{(z-z')(z-a)^m}$

ossia μ_a, è uguale a

$$-\left\{f(a)+(\zeta'-a)f'(a)+\frac{(\zeta'-a)^2}{1.2}f''(a)+\ldots+\frac{(\zeta'-a)^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}f^{(m-1)}(a)\right\}.$$

In conseguenza

$$I=f(\zeta')-f(a)-(\zeta'-a)f'(a)-\frac{(\zeta'-a)^2}{1.2}f''(a)-\ldots-\frac{(\zeta'-a)^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}f^{(m-1}(a),$$

dalla qual formola si riconosce anche che I è il resto della serie del TAYLOR, secondo le potenze di $\zeta'-a$, troncata al termine m^{esimo}, relativa alla funzione $f(\zeta')$.

4) Si voglia la somma della serie

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1^2+\lambda^2}-\frac{2\operatorname{sen}2\alpha}{2^2+\lambda^2}+\frac{3\operatorname{sen}3\alpha}{3^2+\lambda^2}-\frac{4\operatorname{sen}4\alpha}{4^2+\lambda^2}+\ldots$$

A tale scopo cercheremo una funzione che diventi infinita in infiniti punti coi residui uguali ai termini della serie, ed allora il limite dell' integrale di questa funzione esteso ad un contorno che ingrandendosi continuamente finisca per racchiudere tutti quei punti, moltiplicato per $\frac{1}{2\pi i}$, sarà uguale alla somma della serie. Nel nostro caso si trova facilmente questa funzione di ζ; essa è la funzione $\frac{\pi\zeta\operatorname{sen}(\alpha\zeta)}{(\zeta^2+\lambda^2)\operatorname{sen}(\pi\zeta)}$, che diviene infinita nei punti $\zeta=1,2,3,4\ldots$ coi residui assolutamente uguali ma di segno contrario ai termini della serie, ed inoltre diviene infinita nei punti $i\lambda$ e $-i\lambda$. Prenderemo come linea di integrazione un contorno s formato da due rette parallele all' asse delle x condotte pei punti $y=h$, $y=-h$, dove h è numero reale positivo qualunque, da una retta parallela all' asse delle y condotta pel punto $x=h$ (e gioverà assumere allora $h=n+\frac{1}{2}$, n intero positivo), da due semicircoli descritti con centro nei punti $y=\lambda$, $y=-\lambda$ e di raggio ε, e dalle tre porzioni di asse delle y comprese tra questi due semicircoli e tra essi e le rette parallele all' asse delle x.

Integrando lungo questo contorno, lasciando l' area da esso racchiusa a sinistra, e facendo crescere indefinitamente h (facendo cre-

scere n), l'integrale moltiplicato per $\frac{1}{2\pi i}$ è uguale a *meno* la somma della nostra serie.

Ora la parte di integrale, che si riferisce alle parti rettilinee di contorno sull'asse delle y, è zero, perchè essa è, posto $\zeta = iy$.

$$-\int_h^{\lambda+\varepsilon} \frac{y \operatorname{sen}(\alpha i y)\, dy}{(-y^2+\lambda^2)\operatorname{sen}(\pi i y)} - \int_{\lambda-\varepsilon}^{0} - \int_0^{\lambda+\varepsilon} - \int_{-\lambda-\varepsilon}^{-h}$$

somma che riconosciamo subito essere zero cambiando y in $-y$ nei due ultimi integrali.

Supponendo α compreso tra $-\pi$ e π (esclusi $\pm\pi$) si vede anche che sono zero gli integrali estesi alle rette parallele all'asse delle x, quando si faccia crescere h indefinitamente.

Poniamo $\zeta = x + ih$ e dimostriamolo per l'integrale

$$I = \int_h^0 \frac{(x+ih)\operatorname{sen}[\alpha(x+ih)]\, dx}{[(x+ih)^2+\lambda^2]\operatorname{sen}[\pi(x+ih)]} = -\int_0^h \frac{x+ih}{[(x+ih)^2+\lambda^2]} \frac{e^{ix\alpha}e^{-\alpha h} - e^{-ix\alpha}e^{\alpha h}}{e^{ix\pi}e^{-\pi h} - e^{-ix\pi}e^{\pi h}}\, dx,$$

che è zero se $\alpha = 0$. Se α è diverso da zero, osserviamo che

$$\left|\frac{x+ih}{(x+ih)^2+\lambda^2}\right| = \frac{\sqrt{x^2+h^2}}{\sqrt{(x^2-h^2+\lambda^2)^2+4h^2x^2}} < \frac{h\sqrt{2}}{h^2-\lambda^2},$$

$$\left|\frac{e^{ix\alpha}e^{-\alpha h} - e^{-ix\alpha}e^{\alpha h}}{e^{ix\pi}e^{-\pi h} - e^{-ix\pi}e^{\pi h}}\right| = \sqrt{\frac{e^{-2\alpha h}+e^{2\alpha h}-2\cos 2\alpha x}{e^{-2\pi h}+e^{2\pi h}-2\cos 2\pi x}}$$

$$< \sqrt{\frac{e^{-2\alpha h}+e^{2\alpha h}+2}{e^{-2\pi h}+e^{2\pi h}-2}} = \frac{e^{\alpha h}+e^{-\alpha h}}{e^{\pi h}-e^{-\pi h}} = \frac{1}{e^{h(\pi-\alpha)}}\,\frac{1+e^{-2\alpha h}}{1-e^{-2\pi h}}.$$

cosichè

$$|I| < \frac{h\sqrt{2}}{h^2-\lambda}\,\frac{1}{e^{h(\pi-\alpha)}}\,\frac{1+e^{-2\alpha h}}{1-e^{-2\pi h}}\int_0^h dx = \frac{h^2\sqrt{2}}{h^2-\lambda^2}\,\frac{1}{e^{h(\pi-\alpha)}}\,\frac{1+e^{-2\alpha h}}{1-e^{-2\pi h}}.$$

Al crescere di h l'ultimo termine ha per limite l'unità se $\alpha > 0$, il termine $\frac{h^2\sqrt{2}}{h^2-\lambda^2}$ ha per limite $\sqrt{2}$ e il termine $\frac{1}{e^{h(\pi-\alpha)}}$

ha per limite zero se $\alpha > \pi$. Ed allora $\lim\limits_{h=\infty} I = 0$. Lo stesso si proverebbe, in modo analogo, se $\alpha < 0$ e $|\alpha| < \pi$.

Ed analogamente ancora si proverebbe che è zero l'integrale esteso da 0 a $-h$, quando h cresce indefinitamente.

Consideriamo ora, posto $z = h + iy$, l'integrale

$$I_1 = i \int_{-h}^{h} \frac{(h+iy)\,\mathrm{sen}\,[(h+iy)\alpha]}{[(h+iy)^2+\lambda^2]\,\mathrm{sen}\,[\pi(h+iy)]}\,dy,$$

dove $h = n + \frac{1}{2}$, e facciamo poi crescere h indefinitamente.

Osservando che $\mathrm{sen}\,\pi(h+iy) = (-1)^n \cos(\pi i y)$ e che

$$\left|\frac{h+iy}{(h+iy)^2+\lambda^2}\right| < \frac{h\sqrt{2}}{\sqrt{(h^2-y^2+\lambda^2)^2+4h^2y^2}} < \frac{h\sqrt{2}}{\sqrt{(h^2-y^2)^2+4h^2y^2}} < \frac{\sqrt{2}}{h},$$

abbiamo

$$|I_1| < \frac{\sqrt{2}}{h}\int_{-h}^{h} \frac{\sqrt{e^{2y\alpha}+e^{-2y\alpha}-2\cos 2h\alpha}}{e^{\pi y}+e^{-\pi y}}\,dy = \frac{2\sqrt{2}}{h}\int_{0}^{h} \frac{\sqrt{e^{2y\alpha}+e^{-2y\alpha}-2\cos 2h\alpha}}{e^{\pi y}+e^{-\pi y}}\,dy$$

$$< \frac{2\sqrt{2}}{h}\int_{0}^{h} \frac{e^{y\alpha}+e^{-y\alpha}}{e^{y\pi}+e^{-y\pi}}\,dy,$$

e poichè, come facilmente si riconosce, ha valore finito l'integrale $\int_{0}^{\infty} \frac{e^{y\alpha}+e^{-y\alpha}}{e^{y\pi}+e^{-y\pi}}\,dy$ se α è compreso tra $-\pi$ e π, si vede che si potrà rendere $|I_1|$ minore di qualunque numero positivo prefissato prendendo h sufficientemente grande, cosichè $\lim\limits_{h=\infty} I_1 = 0$.

Rimangono perciò solo i due integrali relativi ai due semicerchi; posto $z = i\lambda + \varepsilon e^{\theta i}$ l'uno di essi è

$$(3) \qquad i\varepsilon \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{(i\lambda+\varepsilon e^{\theta i})\,\mathrm{sen}\,[\alpha(i\lambda+\varepsilon e^{i\theta})]}{[(i\lambda+\varepsilon e^{\theta i})^2+\lambda^2]\,\mathrm{sen}\,[\pi(i\lambda+\varepsilon e^{\theta i})]}\,e^{\theta i}\,d\theta,$$

e l'altro si ricava da questo ponendovi $-i\lambda$ in luogo di $i\lambda$, nel quale ultimo integrale, cambiando in esso θ in $\theta+\pi$, i limiti si cangiano in $-\frac{\pi}{2}$ e $-\frac{3\pi}{2}$ e la quantità sotto il segno diviene quella dell'integrale (3), cosichè la somma dei due integrali risulta

$$i\varepsilon\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}}\frac{(i\lambda+\varepsilon e^{\theta i})\operatorname{sen}[\alpha(i\lambda+\varepsilon e^{\theta i})]}{[(i\lambda+\varepsilon e^{\theta i})^2+\lambda^2]\operatorname{sen}[\pi(i\lambda+\varepsilon e^{\theta i})]}e^{\theta i}\,d\theta,$$

che è uguale a $-2\pi i$ moltiplicato pel residuo della funzione $\frac{\zeta\operatorname{sen}(\alpha\zeta)}{(\zeta^2+\lambda^2)\operatorname{sen}(\pi\zeta)}$ relativo al punto $\zeta=i\lambda$, cioè è uguale a $-2\pi i\frac{\operatorname{sen}(\alpha i\lambda)}{2\operatorname{sen}(\pi i\lambda)}$. Avremo dunque infine

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\varepsilon}\frac{\pi\zeta\operatorname{sen}(\alpha\zeta)}{(\zeta^2+\lambda^2)\operatorname{sen}(\pi\zeta)}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\left\{-2\pi^2 i\frac{\operatorname{sen}(\alpha i\lambda)}{2\operatorname{sen}(\pi i\lambda)}\right\}=-\frac{\pi}{2}\frac{e^{-\alpha\lambda}-e^{\alpha\lambda}}{e^{-\pi\lambda}-e^{\pi\lambda}}$$

e quindi otteniamo la somma della nostra serie, cioè

$$\frac{\pi}{2}\frac{e^{-\alpha\lambda}-e^{\alpha\lambda}}{e^{-\pi\lambda}-e^{\pi\lambda}}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1^2+\lambda^2}-\frac{2\operatorname{sen}2\alpha}{2^2+\lambda^2}+\frac{3\operatorname{sen}3\alpha}{3^2+\lambda^2}-\frac{4\operatorname{sen}4\alpha}{4^2+\lambda^2}+\dots$$

valevole se $-\pi<\alpha<\pi$ e qualunque sia il numero reale λ.

Esercizi

1. Se $f(\zeta)$ è funzione monodroma finita e continua in un circolo di raggio R e di centro ζ_0, il contorno incluso, ed M è il massimo di $|f(\zeta)|$ lungo la circonferenza del circolo, allora è $|f^n(\zeta_0)|<\frac{1.2.3\dots n.M}{R^n}$ dove, se $n=0$, cioè per la $f(\zeta_0)$, si intende che $1.2\dots n$ si riduce ad *uno*. Dal che si deduce subito il teorema, di *Weierstrass*: Se $R<R_1$, essendo (a, R_1) il vero circolo di convergenza della serie $\sum_0^\infty a_n(\zeta-a)^n$. ed M indica il massimo del modulo della serie pei punti della circonferenza del circolo (a, R), è $|a_n|R^n<M$ per $n=0,1,2,3,\dots$

2. Se $f(\zeta, u)$ è funzione ad un sol valore finita e continua delle due variabili complesse ζ, u pei valori di ζ appartenenti ad un circolo di raggio R e di centro ζ_0, e pei valori di u di un circolo di raggio R_1 e di centro u_0, i contorni inclusi, ed M è il massimo di $|f(\zeta, u)|$ per qualunque coppia di valori di ζ e u delle circonferenze di quei circoli, allora è

$$\left|\frac{\partial^{n+m} f(\zeta_0, u_0)}{\partial \zeta^n \partial u^m}\right| < (1.2...n)(1.2...m)\frac{M}{R^n R_1^m}.$$

3. Si provi, facendo uso del metodo ora seguito al n. 170, che $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{a+b}$, dove x, a, b sono quantità reali. (In questo esercizio e nei seguenti $a, b, c...$ indicheranno quantità reali, x, y variabili reali, ζ variabile complessa).

4. L'integrale $\int \frac{d\zeta}{(\zeta-1)^2(\zeta^2+1)}$ esteso alla circonferenza del circolo $x^2+y^2-2x-2y=0$ e uguale a $-\frac{\pi i}{2}$.

5. Si ritrovi il valore di $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} ax}{x}\,dx$ (Vedi pag. 204). Perciò si integri la funzione $\frac{e^{axi}}{\zeta}$ lungo il contorno della mezza corona circolare, al disopra dell'asse delle x, limitata dai circoli $x^2+y^2=R^2$, $x^2+y^2=r^2$, facendo poi crescere R indefinitamente e convergere r a zero.

6. $$\int_0^{2\pi} e^{-\rho \operatorname{sen}\theta} \cos(\rho\cos\theta)\,d\theta = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} e^{-\rho\operatorname{sen}\theta} \operatorname{sen}(\rho\cos\theta)\,d\theta = 0.$$

(Si integri la funzione $\frac{e^{iz}}{\zeta}$ lungo il cerchio di raggio $|\rho|$ col centro nell'origine).

In modo analogo si trova

$$\int_0^{2\pi} e^{-\rho\cos\theta} \cos(\rho \operatorname{sen}\theta)\,d\theta = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} e^{-\rho\cos\theta} \operatorname{sen}(\rho\operatorname{sen}\theta)\,d\theta = 0;$$

e generalmente, se n è numero intero,

$$\int_0^{2\pi} e^{-\rho\cos\theta}\cos(\rho\,\mathrm{sen}\,\theta+n\theta)d\theta=\begin{cases}(-1)^n\dfrac{2\pi\rho^n}{1.2\ldots n} & \text{se } n\geqq 0,\\ 0 & \text{se } n<0,\end{cases}\quad \int_0^{2\pi} e^{-\rho\cos\theta}\mathrm{sen}(\rho\,\mathrm{sen}\,\theta+n\theta)d\theta=0,$$

$$\int_0^{2\pi} e^{\rho\,\mathrm{sen}\,\theta}\cos(\rho\cos\theta+n\theta)\,d\theta=\begin{cases}(-1)^m\dfrac{2\pi\rho^n}{1.2\ldots n} & \text{se } n=2m\ ,\\ 0 & \text{»}\ n=2m+1,\\ 0 & \text{»}\ n<0\ ,\end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{\rho\,\mathrm{sen}\,\theta}\,\mathrm{sen}(\rho\cos\theta+n\theta)\,d\theta=\begin{cases}0 & \text{se } n=2m\ ,\\ (-1)^m\dfrac{2\pi\rho^n}{1.2\ldots n} & \text{»}\ n=2m+1,\\ 0 & \text{»}\ n<0.\end{cases}$$

7. Se $f(\zeta)$ è funzione monodroma finita e continua nel circolo di raggio *uno* col centro nell' origine, si ha, essendo a quantità anche complessa,

$$\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{\theta i})}{1-ae^{\,i}}\,d\theta=\begin{cases}2\pi f(0) & \text{se } |a|<1\\ 2\pi\left[f(0)-f\left(\dfrac{1}{a}\right)\right] & \text{»}\ |a|>1.\end{cases}$$

In particolare

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-ae^{\theta i}}=\begin{cases}2\pi & \text{se } |a|<1\\ 0 & \text{»}\ |a|>1.\end{cases}$$

Si ricavi, se a è reale,

$$\int_0^{2\pi}\frac{1-a\cos\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta=\begin{cases}2\pi & \text{se } |a|<1,\\ 0 & \text{»}\ |a|>1,\end{cases}\quad \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{sen}\,\theta d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}=0.$$

8. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}\,dx}{ia-x}=\begin{cases}-2\pi ie^{-a} & \text{se } a>0\\ 0 & \text{»}\ a<0\end{cases}$ da cui si ricavano le for-

mole altrove dimostrate (Vedi pag. 256)

$$\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi e^{-a}}{2a}, \quad \int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi e^{-a}}{2a}.$$

(Si integri la funzione $\frac{e^{iz}}{ia-z}$ lungo l'asse delle x da $-R$ a $+R$ e lungo il semicircolo di raggio R col centro in $z=0$ e si faccia crescere R indefinitamente; l'integrale lungo il semicircolo è zero, e per provare ciò lo si riduca ad un integrale in θ esteso da 0 a $\frac{\pi}{2}$, e poi questo si spezzi in due uno da 0 a ε l'altro da ε a $\frac{\pi}{2}$).

9. $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2\cos^2 x + b^2 \operatorname{sen}^2 x}{c^2\cos^2 x + d^2 \operatorname{sen}^2 x}\,dx = \pi\,\frac{a^2 d + b^2 c}{cd(c+d)}.$$

(Si integri la funzione $\frac{a^2\cos^2 z + b^2 \operatorname{sen}^2 z}{c^2\cos^2 z + d^2 \operatorname{sen}^2 z}$ lungo il contorno del rettangolo i cui lati sono $y=0$, $y=h$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$, si osservi che sui lati $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$ la funzione integranda prende gli stessi valori, e si faccia crescere h indefinitamente).

10. $\int_0^\infty e^{-(a+ib)x}\,x^{n-1}\,dx = \frac{\Gamma(n)}{(a+ib)^n}$, $n>0$, $a>0$, che comprende come caso particolare la nota formola

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,x^{n-1}\,dx = \frac{\Gamma(n)}{a^n}$$

(Vedi pag. 260).

(La funzione $e^{-z}\,z^{n-1}$ è monodroma finita e continua nel campo limitato dalle rette $y=0$, $y=\frac{b}{a}x$ e dai circoli $x^2+y^2=R^2$, $x^2+y^2=r^2$, e situato nel primo quadrante degli assi. Si integri

lungo il contorno, facendo poi crescere R e decrescere r, indefinitamente).

Si ricavino le formole

$$\int_0^\infty e^{-ax}\, x^{n-1} \cos bx\, dx = \frac{\Gamma(n) \cos\left(n \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}},$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\, x^{n-1} \operatorname{sen} bx\, dx = \frac{\Gamma(n) \operatorname{sen}\left(n \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}},$$

ovvero

$$\int_0^\infty e^{-\rho x \cos\theta} \cos(\rho x \operatorname{sen}\theta)\, x^{n-1}\, dx = \frac{\Gamma(n) \cos n\theta}{\rho^n},$$

$$\int_0^\infty e^{-\rho x \cos\theta} \operatorname{sen}(\rho x \operatorname{sen}\theta)\, x^{n-1}\, dx = \frac{\Gamma(n) \operatorname{sen} n\theta}{\rho^n},$$

dove $\rho > 0$ e $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

11. $\int_0^\infty e^{-(a+ib)^2 x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2(a+ib)}$, $a > 0$, $|b| < a$,

da cui

$$\int_0^\infty e^{-(a^2-b^2)x^2} \cos(2abx^2)\, dx = \frac{a\sqrt{\pi}}{2(a^2+b^2)}, \quad \int_0^\infty e^{-(a^2-b^2)x^2} \operatorname{sen}(2abx^2)\, dx = \frac{b\sqrt{\pi}}{2(a^2+b^2)}.$$

12. Sia $I = \int_{ia}^{ia+2\pi} \frac{d\zeta}{2-\cos\zeta}$, l'integrazione essendo condotta lungo la retta $y = a$; allora $I = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ se $-\log(2+\sqrt{3}) < a < |\log(2-\sqrt{3})|$;

$I = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ se $a < -\log(2+\sqrt{3})$, o se $a > |\log(2-\sqrt{3}$

13. La somma della serie

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1^2-\lambda^2}-\frac{2\operatorname{sen}2\alpha}{2^2-\lambda^2}+\frac{3\operatorname{sen}3\alpha}{3^2-\lambda^2}-\frac{4\operatorname{sen}4\alpha}{4^2-\lambda^2}+\ldots,$$

love λ è numero reale qualunque non intero positivo e $-\pi<\alpha<\pi$, è $\frac{\pi}{2}\frac{\operatorname{sen}(\alpha\lambda)}{\operatorname{sen}(\pi\lambda)}$.

14. $$\frac{1}{2}\alpha=\operatorname{sen}\alpha-\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{2}+\frac{\operatorname{sen}3\alpha}{3}-\frac{\operatorname{sen}4\alpha}{4}+\ldots$$

love $-\pi<\alpha<\pi$.

15. Seguendo il metodo tenuto alla fine del n. 170 si provi che

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots$$

IV. Equazioni differenziali.

Integrazione delle espressioni differenziali con due o più variabili.

171. Consideriamo la espressione differenziale con due variabili indipendenti x, y

$$\text{(1)} \qquad M\,dx + N\,dy$$

dove $M = M(x, y)$, $N = N(x, y)$ sono funzioni continue di x, y, insieme alle loro derivate prime, in un campo C. Se esiste una funzione $u(x, y)$ il cui differenziale totale du eguagli nel campo C la espressione (1), si dice che la (1) è un *differenziale esatto* o che è *integrabile*; la u più una costante arbitraria ne è allora l'*integrale generale* o *completo*, o la *primitiva generale o completa*; ed integrare la (1) significa appunto determinare la funzione u tale che sia $du = M\,dx + N\,dy$.

Ma non sempre esiste l'integrale della (1), ossia non sempre la (1) è un differenziale esatto. Affinchè ciò avvenga è necessario e sufficiente che le funzioni M, N soddisfacciano in C alla relazione

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Invero, *la condizione è necessaria*, perchè, ammessa l'esistenza della u tale che

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = M\,dx + N\,dy,$$

cioè tale che $\frac{\partial u}{\partial x} = M$, $\frac{\partial u}{\partial y} = N$, abbiamo, da queste due ultime eguaglianze, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$; ma i secondi membri

sono funzioni continue di x, y, per ipotesi, quindi le derivate nei primi membri sono uguali in C, e perciò $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

La condizione è sufficiente, cioè, supposto verificata la (2), vedremo ora che esiste una funzione u di x, y tale che

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N. \tag{3}$$

Infatti, costruiamo la funzione di x, y

$$u = \int_{x_0}^{x} M(x, y)\, dx + \varphi(y),$$

dove i punti (x, y) appartengono a C ed x_0 è tale che i punti (x_0, y) che vengono considerati appartengano pure a C. Questa funzione, qualunque sia la funzione $\varphi(y)$ di y, soddisfa, come si vede, alla prima delle (3). Ma potremo determinare $\varphi(y)$ in guisa che essa soddisfaccia pure alla seconda delle (3), giacchè, essendo

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x, y)}{\partial y}\, dx + \varphi'(y),$$

ossia, per la (2),

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}\, dx + \varphi'(y)$$

$$= N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y),$$

basterà assumere $\varphi(y)$ tale che sia

$$\varphi'(y) = N(x_0, y).$$

cioè

$$\varphi(y) = \int N(x_0, y)\, dy.$$

Perciò la funzione

$$(4) \qquad u = \int_{x_0}^{x} M(x, y)\, dx + \int N(x_0, y)\, dy + \text{costante}$$

od anche

$$(4)' \qquad u = \int_{x_0}^{x} M(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\, dy$$

soddisfa la (3), cioè la (1) è un differenziale esatto e la (4), o (4)', ne è l'integrale generale.

Si intende poi senz'altro come, se ci partissimo dalla funzione

$$u = \int_{y_0}^{y} N(x, y)\, dy + \psi(x)$$

che soddisfa alla seconda delle (3) qualunque sia $\psi(x)$, si potrebbe, procedendo analogamente, determinare la $\psi(x)$ in guisa che essa soddisfaccia anche alla prima delle (3), ottenendo così l'integrale sotto l'aspetto

$$(5) \qquad u = \int_{y_0}^{y} N(x, y)\, dx + \int M(x, y_0)\, dx + \text{costante},$$

od anche

$$(5)' \qquad u = \int_{y_0}^{y} N(x, y)\, dy + \int_{x_0}^{x} M(x, y_0)\, dx.$$

È quasi superfluo notare che due integrali qualunque della (1) non possono differire tra loro che per una costante giacchè hanno lo stesso differenziale totale $M dx + N dy$.

Notiamo ancora che se (x_0, y_0), (x, y) sono le coordinate di due punti qualunque m_0, m di C, ed s_1, s_2 due linee di C che uniscono questi due punti e tali che nella parte di piano C_1 da esse li limitata non vi sia alcuna parte del contorno di C, allora, indicando con

$\int$ l' integrale da m_0 ad m lungo la linea s, in virtù della for-
la di Gauss dimostrata al n. 113, è

$$(s_1)\int^{m}(Mdx+Ndy)+(s_2)\int_{m}^{m_0}(Mdx+Ndy)=-\int\int_{C_1}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dC_1=0$$

quindi

$$(s_1)\int_{m_0}^{m}(Mdx+Ndy)=(s_2)\int_{m_0}^{m}(Mdx+Ndy).$$

In conseguenza, se si suppone il contorno del campo C sia di sol pezzo, per modo che tra due linee qualunque di C che uni-no due punti qualunque di C non vi possa essere alcuna parte l contorno, il valore dell' integrale $\int_{m_0}^{m}(Mdx+Ndy)$, se $Mdx+Ndy$ un differenziale esatto, è indipendente dalla linea di integrazione, è quindi una funzione monodroma di x, y nel campo C. Essa incide colla funzione u data dalle formole (4)', (5)', perchè, pren-ndo per linea di integrazione da m_0 a m la spezzata formata dalle tte $Y=y_0$, $X=x$, ed essendo sulla prima $dy=0$ sulla seconda $=0$, si ha

$$\int_{m_0}^{m}(Mdx+Ndy)=\int_{x_0}^{x}M(x,y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y}N(x,y)\,dy;$$

d integrando da m_0 a m lungo le rette $X=x_0$, $Y=y$, si ha

$$\int_{m_0}^{m}(Mdx+Ndy)=\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)\,dy+\int_{x_0}^{x}M(x,y)\,dx,$$

cui secondi membri coincidono con quelli delle formole (5)', (4)'.
iassumendo abbiamo:

Se M, N *sono funzioni continue insieme alle loro derivate prime in un campo* C, *la condizione necessaria e sufficiente affinchè* $Mdx + Ndy$ *sia un differenziale esatto è* $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$; *e quando questa è soddisfatta l' integrale della precedente espressione è, se il contorno del campo è di un sol pezzo, la funzione di* x, y

$$u = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (Mdx + Ndy),$$

l integrazione tra i punti (x_0, y_0) *e* (x, y) *di* C *essendo condotta lungo una linea qualunque di* C. *In particolare si ha l'integrale sotto uno degli aspetti* (4), (4)', (5), (5)'.

Si intende poi che gioverà scegliere i valori x_0, y_0 in modo che le quantità integrande da essi dipendenti riescano le più semplici possibili, e delle precedenti forme di integrali quella più facilmente calcolabile nel caso che si considera.

Esempi

1) Sia la espressione differenziale

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\right) dy;$$

cosichè $M = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $N = \frac{1}{y}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$; il campo in cui si considera è una parte qualunque del piano cui non appartenga la retta $y = 0$.

Usando la formola (4) e prendendo $x_0 = 0$, abbiamo l' integrale

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \int \frac{dy}{y} + C_1 = \log(x + \sqrt{x^2+y^2}) + C_1 = \log C(x + \sqrt{x^2+y^2})$$

2) La espressione

$$\frac{y^2\, dx}{x^2\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y dy}{x\sqrt{x^2+y^2}}$$

a differenziale esatto, ed il suo integrale, usando la formola (5) endo $y_0 = 0$, si trova essere

$$u = -\frac{1}{x}\int_0^y \frac{y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} + C_1 = -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} + C,$$

tutti i punti del piano esclusi quelli della retta $x = 0$.

3) Sia il differenziale esatto

$$\frac{x^3+y^3+xy(2y+x)+y}{(x^2+y^2)(x^2+y^2+1)}\,dx + \frac{2y^3-x^3+xy(2x-y)-x}{(x^2+y^2)(x^2+y^2+1)}\,dy;$$

averne l'integrale calcoliamo l'integrale $\int_{(x_0,\,0)}^{(x,\,y)} (M\,dx + N\,dy)$ lungo se delle x e lungo il circolo che passa pel punto (x, y) col centro l'origine.

Perciò poniamo $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$, ed osserviamo che l'in- rale lungo l'asse delle x, per essere allora $x = \rho$, $dx = d\rho$, $= 0$, $dy = 0$ si riduce a

$$\int_{x_0}^{\rho} \frac{2\rho^3}{\rho^2(\rho^2+1)}\,d\rho = \log(\rho^2+1) - \log(x^2_0+1),$$

'integrale lungo l'arco di circolo, osservando che su esso è $= -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta$, $dy = \rho\cos\theta\,d\theta$ si riduce, dopo facili riduzioni, $-\int_0^\theta d\theta = -\theta$; cosichè l'integrale generale della nostra espressione fferenziale è

$$= \log(\rho^2+1) - \log(x^2_0+1) - \theta = \log(x^2+y^2+1) - \mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x} + C.$$

172. Consideriamo ora una espressione differenziale con tre riabili

$$M\,dx + N\,dy + P\,dz,$$

ove $M = M(x, y, z)$, $N = N(x, y, z)$, $P = P(x, y, z)$ sono fun- oni continue insieme alle loro derivate prime in un certo campo.

La condizione necessaria e sufficiente affinchè la precedente espressione sia un differenziale esatto, cioè affinchè esista una funzione u il cui differenziale totale la eguagli, *è che siano verificate le tre equazioni*

$$(1) \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

La condizione è sufficiente, perchè se esiste una funzione u tale che

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = P,$$

derivando la prima delle (2) rapporto ad y e a z, la seconda rapporto a x e a z, la terza rapporto a x e a y si ottengono sei equazioni dalle quali si hanno subito le (1).

La condizione è sufficiente. Invero, partiamoci dalla funzione

$$u = \int_{x_0}^{x} M dx + \varphi(y, z),$$

la quale, qualunque sia la funzione φ, soddisfa alla prima delle (2). Proviamo che si può determinare φ in guisa che soddisfaccia anche alla seconda e terza delle (1).

Abbiamo

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial z} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

ossia, per le (2),

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = N(x, y, z) - N(x_0, y, z) + \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = P(x, y, z) - P(x_0, y, z) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

e queste coincideranno colla seconda e terza delle (2) se si ot

determinare φ in guisa che sia

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = N(x_0, y, z) \ , \ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = P(x_0, y, z).$$

Ora questo si può, perchè, per la terza delle (1),

$$N(x_0, y, z)\,dy + P(x_0, y, z)\,dz$$

è un differenziale esatto, il cui integrale è

$$\varphi = \int_{y_0}^{y} N(x_0, y, z)\,dy + \int P(x_0, y_0, z)\,dz.$$

Vediamo quindi che la data espressione è un differenziale esatto e che il suo integrale generale è

$$u = \int_{x_0}^{x} M dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y, z)\,dy + \int P(x_0, y_0, z)\,dz + C;$$

e si intende, senz'altro, come esso si possa anche avere sotto gli aspetti

$$u = \int_{x_0}^{x} M dx + \int_{z_0}^{z} P(x_0, y, z)\,dz + \int N(x_0, y, z_0)\,dy + C,$$

$$u = \int_{y_0}^{y} N dy + \int_{x_0}^{x} M(x, y_0, z)\,dx + \int P(x_0, y_0, z)\,dz + C, \text{ etc.}$$

Esempio. $\frac{y}{y+z}\,dx + \frac{xz}{(y+z)^2}\,dy - \frac{xy}{(y+z)^2}\,dz$. Riconosciuto che sono verificate le condizioni di integrabilità, se si prende $x_0 = 0$ nella prima forma dell'integrale, si ha subito

$$u = \int_{0}^{x} \frac{y}{y+z}\,dx + C = \frac{xy}{y+z} + C.$$

173. In modo completamente analogo si proverebbe che:
La condizione necessaria e sufficiente affinchè la espressione dif-

ferenziale

$$M_1 dx_1 + M_2 dx_2 + \ldots + M_n dx_n,$$

dove le M *sono funzioni continue, colle derivate prime, delle variabili* x *in un certo campo, sia un differenziale esatto è che siano verificat. le* $\frac{n(n-1)}{2}$ *equazioni*

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_2} = \frac{\partial M_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial M_1}{\partial x_3} = \frac{\partial M_3}{\partial x_1}, \ldots\ldots \frac{\partial M_1}{\partial x_n} = \frac{\partial M_n}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial x_3} = \frac{\partial M_3}{\partial x_2}, \ldots\ldots \frac{\partial M_2}{\partial x_n} = \frac{\partial M_n}{\partial x_2},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{\partial M_{n-1}}{\partial x_n} = \frac{\partial M_n}{\partial x_{n-1}};$$

e l' integrale generale è dato da

$$u = \int_{x^0_1}^{x_1} M_1 dx_1 + \int_{x^0_2}^{x_2} M_2(x^0_1, x_2 \ldots x_n)\, dx_2 + \int_{x_3^0}^{x_3} M_3(x^0_1, x^0_2, x_3, \ldots x_n) dx_3 + \ldots$$

$$+ \int M_n(x^0_1, x^0_2, \ldots x^0_{n-1}, x_n)\, dx_n + C,$$

o da formole analoghe facilmente riconoscibili.

Esercizi

1. Se nel differenziale esatto $Mdx + Ndy$ si cambiano le variabili x, y in u, v colle formole $x = x(u, v), y = y(u, v)$, dove le x, y ammettono derivate seconde, la nuova espressione differenziale in u, v è pure un differenziale esatto.

2. $du = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 + y^2}\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right), \quad u = \log\frac{x}{y} + \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} + C;$

$$du = \frac{(x - 2y)dx + ydy}{(y - x)^2}, \quad u = \log(x - y) + \frac{y}{x - y} + C;$$

$$du = \left(\operatorname{tg} y - \frac{y}{\cos^2 x}\right) dx + \left(\frac{x}{\cos^2 y} - \operatorname{tg} x + \operatorname{sen} y\right) dy,$$

$$u = x \operatorname{tg} y - y \operatorname{tg} x - \cos y + C;$$

$$du = \left(\frac{1}{y} + \frac{y}{x^2} e^{\frac{y}{x}} + \frac{2y}{\operatorname{sen}(2xy)}\right) dx - \left(\frac{x}{y^2} - \frac{2x}{\operatorname{sen}(2xy)} + \frac{e^{\frac{y}{x}}}{x}\right) dy,$$

$$u = \frac{x}{y} + \log \operatorname{tg}(xy) - e^{\frac{y}{x}} + C;$$

$$du = \frac{y^2 dx - xy dy}{(x+y)^2 \sqrt{y^2 + 2xy}}, \quad u = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{x+y} + \frac{\sqrt{y^2 + 2xy}}{x+y} + C.$$

3. $du = \frac{a}{y} dx - \frac{ax + bz}{y^2} dy + \frac{b}{y} dz, \; u = \frac{ax + bz}{y} + C;$

$$du = \left[\frac{\sqrt{z+y}}{(x+z)\sqrt{2x-y+z}} - \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{x^2}\right] dx + \left[\frac{y}{x\sqrt{y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{z+y}\sqrt{2x-y+z}}\right] dy$$

$$+ \left[\frac{z}{x\sqrt{y^2+z^2}} - \frac{x-y}{x+z} \frac{1}{\sqrt{z+y}\sqrt{2x-y+z}}\right] dz,$$

$$u = \operatorname{arc\,sen} \frac{x-y}{x+z} + \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{x} + C.$$

4. Se z è funzione di x, y definita dalla equazione

$$z = x\varphi(z) + y\psi(z),$$

l'espressione

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} \frac{\partial z}{\partial x} [\varphi(z) dx + \psi(z) dy]$$

è un differenziale esatto il cui integrale è $u = \int f(z) dz + C$.

5. Se X_0, X_1, X_2 sono funzioni razionali di x_0, x_1, x_2 e si pone $x_0 = (z_0 + z_1 + z_2)^3$, $x_1 = (z_0 + \omega z + \omega^2 z_2)^3$, $x_2 = (z_0 + \omega^2 z_1 + \omega z_2)^3$, dove ω è una radice primitiva terza dell'unità, la espressione differenziale

$$X_0 dx_0 + X_1 dx_1 + X_2 dx_2$$

si trasforma nella espressione

$$\varphi(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2)d\zeta_0 + \varphi(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_0)d\zeta_1 + \varphi(\zeta_2, \zeta_0, \zeta_1)d\zeta_2,$$

dove φ è simbolo di una certa funzione razionale, e la condizione necessaria e sufficiente affinchè sia un differenziale esatto è la sola equazione $\dfrac{\partial\varphi(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2)}{\partial\zeta_1} = \dfrac{\partial\varphi(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_0)}{\partial\zeta_0}$.

In generale: Se $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ sono funzioni razionali di $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$, e si pone

$$x_k = (\zeta_0 + \omega^k\zeta_1 + \omega^{2k}\zeta_2 + \ldots + \omega^{(n-1)k}\zeta_{n-1})^n, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n-1),$$

dove ω è una radice n^{esima} primitiva dell'unità, la espressione differenziale

$$X_0dx_0 + X_1dx_1 + \ldots + X_{n-1}dx_{n-1}$$

si trasforma nella espressione

$$\varphi(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_{n-1})d\zeta_0 + \sum_{m=1}^{m=n-1}\varphi(\zeta_m, \zeta_{m+1}, \ldots \zeta_{n-1}, \zeta_0, \zeta_1, \ldots \zeta_{m-1})d\zeta_m$$

e la condizione necessaria e sufficiente affinchè sia un differenziale esatto è che siano verificate le $\dfrac{n}{2}$ (se n è pari), o le $\dfrac{n-1}{2}$ (se n è dispari), equazioni

$$\frac{\partial\varphi(\zeta_0, \zeta_1, \ldots \zeta_{n-1})}{\partial\zeta_s} = \frac{\partial\varphi(\zeta_s, \zeta_{s+1}, \ldots \zeta_{n-1}, \zeta_0, \zeta_1, \ldots \zeta_{s-1})}{\partial\zeta_0},$$

$$\begin{cases} s = 1, 2, \ldots \dfrac{n}{2} \text{ se } n \text{ è pari} \\ s = 1, 2, \ldots \dfrac{n-1}{2} \text{ se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Equazioni differenziali.

Equazioni differenziali ordinarie di primo ordine.

174. *Equazione differenziale è una relazione tra una o più variabili, una o più funzioni incognite di queste variabili, e le derivate di queste funzioni.*

Distinguiamo due specie di equazioni differenziali.

1. *Equazioni differenziali ordinarie*, o semplicemente *equazioni differenziali;* sono quelle che legano una o più funzioni di una *sola* variabile indipendente e le loro derivate; una equazione differenrenziale dicesi d'ordine n, se contiene derivate d'ordine n, senza contenere delle derivate d'ordine superiore ad n.

2. *Equazioni a derivate parziali*; sono quelle che legano tra loro una o più funzioni di *due* o *più* variabili indipendenti e le loro derivate parziali; una equazione a derivate parziali dicesi d'ordine n se contiene derivate parziali d'ordine n, senza contenere delle derivate parziali d'ordine superiore ad n.

È quasi superfluo notare che una equazione differenziale potrà non contenere esplicitamente alcune o tutte le funzioni, alcune o tutte le variabili indipendenti, ma deve contenere esplicitamente una derivata almeno.

Ad esempio $\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+y^2=0$, che scriveremo anche così: $y''+3xy'+y^2=0$, e $\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}+xy=0$ sono equazioni differenziali di secondo e primo ordine; $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}+u=0$ sono equazioni a derivate parziali di secondo e terzo ordine.

175. Occupiamoci delle equazioni differenziali ordinarie, cominciando da quelle di primo ordine tra due variabili x, y il cui tipo generale è

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0, \text{ o } f(x, y, y')=0.$$

Vediamo primieramente come possano aver origine equazioni di questa forma. Sia $\varphi(x, y, c)=0$ una equazione, dove c indica una costante alla quale si possa attribuire qualunque valore, o almeno qualunque valore appartenente ad un certo campo di valori, e sia φ tale che $\varphi=0$, per ognuno di quei valori di c, definisca, in un certo intervallo, la y come funzione di x, che ammetta derivata y', la quale sarà data dalla $\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y'=0$. E propriamente, se x_0, y_0, c_0 sono valori di x, y, c pei quali sia $\varphi(x_0, y_0, c_0)=0$, noi supponiamo

che in un certo campo C di valori di x, c, cui appartenga (x_0, c_0) come punto interno, la $\varphi = 0$ definisca y come funzione continua e che ammette derivata rapporto ad x, $y = y(x, c)$, di x, c che in (x_0, c_0) prenda il valore y_0; e supponiamo inoltre che in un certo campo C_1 per x, y, cui appartenga (x_0, y_0) come punto interno, la $\varphi = 0$ definisca anche c come funzione $c = \psi(x, y)$ continua di x e y che in (x_0, y_0) prenda il valore c_0. Ora si riconosce subito, stante la continuità delle funzioni $y = y(x, c)$, $c = \psi(x, y)$, che, restringendo ove occorra il campo C_1, i campi C e C_1 sono legati tra loro in guisa che ad un punto (x_1, y_1) di C_1 corrisponde un punto (x_1, c_1) di C, essendo $c_1 = \psi(x_1, y_1)$ e dove $y_1 = y(x_1, c_1)$.

Noi abbiamo scelto arbitrariamente i valori x_1, y_1 nel campo C_1, cosichè, ove siano per la φ soddisfatte le condizioni ora poste, l'arbitrarietà della c porta per conseguenza che si possa scegliere arbitrariamente il valore y_1 della funzione y, definita dalla $\varphi = 0$, che debba corrispondere al valore x_1 di x, ossia, che si possa determinare il valore di c in modo che per $x = x_1$ la y assuma il valore prefissato y_1, entro certi intervalli per x, per y e per c.

Ora se dalle due equazioni

$$\varphi(x, y, c) = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0$$

noi eliminiamo la costante c otterremo una equazione della forma $f(x, y, y') = 0$, così che la y definita dalla $\varphi = 0$, e qualunque sia c, renderà identicamente zero la $f(x, y, y')$ sostituendo in questa per y e y' quella funzione e la sua derivata.

176. Data una equazione differenziale $f(x, y, y') = 0$, *integrarla* o *risolverla* significa trovare la forma che bisogna attribuire alla funzione y di x, affinchè questa equazione si riduca ad una identità; ma più generalmente ed ordinariamente, integrare o risolvere una equazione differenziale significa trovare una relazione $\varphi(x, y, c) = 0$ tra x, y ed una costante c, tale che, soddisfacendo la $\varphi(x, y, c)$ alle condizioni precedentemente poste per la φ, eliminando c tra la $\varphi = 0$ e la $\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0$ si ottenga la equazione proposta $f(x, y, y') = 0$, o una equazione il cui primo membro sia il prodotto di $f(x, y, y')$ per un fattore che non contenga y', e tale che si possa determinare in modo che per un valore arbitrario $x = x_1$ la y assuma un valore

prefissato y_1, intendendo sempre che, secondo la natura della equazione differenziale che si considera, la variabilità di x, y, c potrà essere illimitata o limitata a certi campi. Ed allora la equazione $\varphi(x, y, c) = 0$ chiamasi la *equazione integrale generale o completa*, o la *equazione primitiva generale* o *completa*, o la *soluzione generale* della equazione differenziale proposta, e la funzione y che viene definita dalla $\varphi(x, y, c) = 0$, che in certi casi potrà essere già risoluta rapporto ad y cioè avere la forma $y = \psi(x, c)$, chiamasi l' *integrale generale* o *completo*, o la *primitiva generale* o *completa* o la *soluzione generale* della equazione differenziale proposta; notando che spesso chiamasi semplicemente integrale generale la equazione integrale generale $\varphi(x, y, c) = 0$. E notiamo ancora che una equazione differenziale si ritiene come integrata o risoluta, quando il problema è ridotto alle quadrature, quando, cioè, la funzione $\varphi(x, y, c)$, o la espressione di y per x, contenga degli integrali di differenziali in y o in x, anche se le integrazioni non si sappiano eseguire in termini finiti.

Attribuendo alla costante c valori particolari si hanno degli *integrali particolari* della equazione differenziale proposta.

La equazione $f(x, y, y') = 0$ determina, corrispondentemente ad ogni punto (x, y) del piano o ai punti (x, y) di un certo campo, uno o più valori di y'; cioè, ove si ponga $y' = \operatorname{tg} \alpha$ di guisa che ad ogni valore y' corrisponda una direzione α, ad ognuno di tali punti vengono coordinate una o più direzioni. Il problema della integrazione della equazione differenziale consiste allora nel determinare quelle curve $\varphi(x, y, c) = 0$ tali che in ogni loro punto la tangente abbia una direzione uguale ad una delle direzioni α corrispondenti a quel punto.

Esempio. Mediante la derivazione, dall'equazione $C^2 + Cy^2 - x^2 = 0$ otteniamo $Cyy' = x$, ed eliminando C si ha la equazione differenziale $\frac{x^2}{y^2 y'^2} + \frac{y^2 x}{yy'} - x^2 = 0$ ossia $xy^2y'^2 - y^3y' - x = 0$.

La equazione $C^2 + Cy^2 - x^2 = 0$ ne è la equazione integrale o integrale generale, e i rami della y, $y = \pm \frac{\sqrt{x^2 - C^2}}{\sqrt{C}}$, definiti da essa, costituiscono ciascuno l'integrale generale. Notiamo che la equazione differenziale può ridursi alla forma

$$(2xyy' - y^2 - \sqrt{y^4 + 4x^2})(2xyy' - y^2 + \sqrt{y^4 + 4x^2}) = 0$$

e che $y = \frac{\sqrt{x^2 - C^2}}{\sqrt{C}}$ soddisfa alla equazione $2xyy' - y^2 - \sqrt{y^4 + 4x^2} = 0$,

$y = -\frac{\sqrt{x^2 - C^2}}{\sqrt{C}}$ alla $2xyy' - y^2 + \sqrt{y^4 + 4x^2} = 0$.

Dimostrazione dell' esistenza dell' integrale generale per le equazioni differenziali di primo ordine.

177. Se la equazione differenziale di primo ordine che si considera non è già della forma $y' = \varphi(x, y)$, ma bensì del tipo generale $f(x, y, y') = 0$, supponiamo che la equazione $f = 0$ definisca uno o più rami y' come funzioni di x, y in guisa che si possa considerare f come il prodotto di più fattori della forma $y' - \varphi(x, y)$.

Per dimostrare quindi che ogni equazione differenziale di primo ordine ammette, sotto certe condizioni, l' integrale generale, basterà provarlo per le equazioni della forma $y' - \varphi(x, y) = 0$.

Per dimostrare l' esistenza, sotto certe condizioni, dell' integrale generale delle equazioni della forma $y' = \varphi(x, y)$ seguiremo un metodo dovuto a *Cauchy* e semplicizzato dal *Lipschitz* (1), che si presenta naturale per la analogia con quello relativo alla integrabilità delle funzioni di una variabile in un intervallo.

Supponiamo la $\varphi(x, y)$ assolutamente continua in un certo intorno C del punto (x_0, y_0) formato dai punti le cui coordinate x, y soddisfanno le relazioni $|x - x_0| < a$, $|y - y_0| < b$; inoltre esista una costante positiva k tale che sia verificata la disuguaglianza

$$|\varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_2)| < k\,|y_1 - y_0|$$

dove (x, y_1), (x, y_2) sono punti qualunque di C sulla retta $X = x$, essendo x qualunque ma tale che sia $|x - x_0| < a$. La condizione espressa da questa disuguaglianza è comunemente conosciuta colla denominazione di *condizione del Lipschitz*.

Se M è il massimo di $|\varphi(x, y)|$ nel campo C, sia $A \leq$ tale che risulti $MA \leq b$. Prendiamo un x in modo che sia $|x - x_0| <$ A

---

(1) *Lipschitz* - Lehrbuch der Analysis - pag. 500, §§ 84, 85, 86,

e, per fissare le idee, sia $x > x_0$. Decomponiamo l'intervallo (x, x_0) in tratti h_s, di ampiezza $h_s = x_s - x_{s-1}$, mediante i punti $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ e determiniamo successivamente le quantità $y_1, y_2, y_3, \ldots$ in modo che il punto (x_s, y_s) si trovi sulla retta passante per (x_{s-1}, y_{s-1}) e la cui direzione coincide con quella determinata dalla equazione proposta $y' = \varphi(x, y)$ corrispondentemente al punto (x_{s-1}, y_{s-1}) cioè sulla retta

$$Y - y_{s-1} = (X - x_{s-1})\,\varphi(x_{s-1}, y_{s-1});$$

avremo così

$$(1) \qquad \begin{cases} y_1 - y_0 = h_1\,\varphi(x_0, y_0), \\ y_2 - y_1 = h_2\,\varphi(x_1, y_1), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y - y_{n-1} = h_n\,\varphi(x_{n-1}, y_{n-1}), \end{cases}$$

avendo indicato con y il valore di Y cui si giunge per $X = x$ mediante questa scomposizione di (x_0, x) in tratti h_s.

In questo modo ad ogni scomposizione di (x_0, x) in tratti corrisponde per $X = x$ un valore, che chiameremo genericamente y, di Y. E diremo, come è naturale, che l è il limite di y, quando comunque diminuiscano le ampiezze di tutti i tratti nei quali si decompone (x_0, x), se, assegnato un qualunque σ positivo, esista un δ positivo tale che, per tutte le scomposizioni di (x_0, x) in tratti $h_s \leq \delta$, risulti sempre $|y - l| < \sigma$. Ora dico che y ha appunto limite finito.

Invero, dalle (1) ricaviamo intanto

$$y_s - y_t = h_{t+1}\,\varphi(x_t, y_t) + h_{t+2}\,\varphi(x_{t+1}, y_{t+1}) + \ldots + h_s\,\varphi(x_{s-1}, y_{s-1})$$

da cui

$$(2) \qquad |y_s - y_t| \leq M(x_s - x_t) < MA \leq b.$$

Assegnato poi σ, sia δ_1 quel numero pel quale, in ogni punto (x, y) di C. e per $|\Delta x| \leq \delta_1$, $|\Delta y| \leq \delta_1$, è verificata la disuguaglianza

$$|\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \varphi(x, y)| < \sigma,$$

numero δ_1 che certamente esiste per la supposta continuità, e conseguente equicontinuità, di $\varphi(x, y)$ in C. Indichiamo con δ il più piccolo dei due numeri δ_1 e $\frac{\delta_1}{M}$, e consideriamo una scomposizione

qualunque di (x_0, x) in tratti $h_s \leq \delta$, così che sia ancora $h_s M \leq \varepsilon_1$, e chiamiamo y il valore di Y in x, dipendente da questa scomposizione.

Consideriamo ora una seconda decomposizione dell'intervallo in tratti $h'_r = x'_r - x'_{r-1}$, ottenuta dalla precedente suddividendone ciascun tratto h_s in ulteriori tratti, ed indichiamo con $y'_1, y'_2, \ldots$ i valori di Y che così corrispondono ad $X = x'_1, x'_2, \ldots x$.

Siano $x'_l = x_{s-1}, x'_{l+1}, x'_{l+2}, \ldots x'_m, \ldots x'_n = x_s$ i punti di suddivisione del tratto h_s. Avremo allora, come risulta da considerazioni precedenti,

$$|y'_m - y'_l| < (x'_m - x'_l) M < h_s M \leq \varepsilon_1,$$

ed in conseguenza, poichè è anche $x'_m - x'_l < h_s \leq \varepsilon_1$, sarà

$$|\varphi(x'_m, y'_m) - \varphi(x'_l, y_l)| < \sigma,$$

in virtù della quale, dalle

$$y'_{l+1} - y'_l = h'_{l+1} \varphi(x'_l, y'_l),$$

$$y'_{l+2} - y'_{l+1} = h'_{l+2} \varphi(x'_{l+1}, y'_{l+1}) = h'_{l+2} \varphi(x'_l, y'_l) + h'_{l+2} [\varphi(x'_{l+1}, y'_{l+1}) - \varphi(x'_l, y'_l)],$$

. . . . . .

$$y'_n - y'_{n-1} = h'_n \varphi(x'_{n-1}, y'_{n-1}) = h'_n \varphi(x'_l, y'_l) + h'_n [\varphi(x'_{n-1}, y'_{n-1}) - \varphi(x'_l, y'_l)]$$

si ricava, osservando che $h'_{l+1} + h'_{l+2} + \ldots + h'_n = h_s$,

$$|y'_n - y'_l - h_s \varphi(x'_l, y'_l)| < h_s \sigma,$$

e quindi ancora

$$y'_n - y'_l = h_s [\varphi(x'_l, y_l) + \theta \sigma]$$

essendo θ un numero compreso tra -1 e $+1$. D'altra parte è

$$y_s - y_{s-1} = h_s \varphi(x_{s-1}, y_{s-1})$$

ed in conseguenza

$$y'_n - y_s = y'_l - y_{s-1} + h_s [\varphi(x'_l, y'_l) - \varphi(x_{s-1}, y_{s-1}) + \theta \sigma],$$

dalla quale, poichè è $x'_l = x_{s-1}$ e quindi per la condizione di *Lipschitz* è

$$|\varphi(x'_l, y'_l) - \varphi(x_{s-1}, y_{s-1})| < k |y'_l - y_{s-1}|,$$

ricaviamo

$$|y'_n - y_s| < |y'_l - y_{s-1}| + h_s \{ k |y'_l - y_{s-1}| + \sigma \}$$

formola che dà la differenza assoluta, in un punto x_s, tra il valore y_s di Y determinato in quel punto dalla prima decomposizione e quello y'_n determinato dalla seconda. Indicando con $V_0, V_1, V_2, \ldots V$ le analoghe differenze assolute nei punti $x_0, x_1, x_2, \ldots x$ avremo

$$V_s < V_{s-1} + h_s (k V_{s-1} + \sigma)$$

ossia

$$V_s + \frac{\sigma}{k} < \left(V_{s-1} + \frac{\sigma}{k} \right) (1 + k h_s)$$

e quindi successivamente ancora

$$V_{s-1} + \frac{\sigma}{k} < \left(V_{s-2} + \frac{\sigma}{k} \right) (1 + k h_{s-1}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$V_1 + \frac{\sigma}{k} < \left(V_0 + \frac{\sigma}{k} \right) (1 + k h_1),$$

le quali moltiplicate tra loro, ed osservando che $V_0 = y_0 - y_0 = 0$, danno

$$V_s + \frac{\sigma}{k} < \frac{\sigma}{k} (1 + kh_1)(1 + kh_2) \ldots (1 + kh_s).$$

e perciò altresì

$$V + \frac{\sigma}{k} < \frac{\sigma}{k} (1 + kh_1)(1 + k h_2)(1 + kh_3) \ldots$$

Ma

$$e^{kh_s} = 1 + kh_s + \frac{k^2 h_s^2}{2} + \ldots > 1 + kh_s,$$

e quindi

$$V + \frac{\sigma}{k} < \frac{\sigma}{k} e^{kh_1} e^{kh_2} e^{kh_3} \ldots = \frac{\sigma}{k} e^{k(h_1 + h_2 + \ldots)} = \frac{\sigma}{k} e^{k(x - x_0)}$$

ossia, poichè $V = |y - y'|$,

$$|y - y'| < \frac{\sigma}{k} (e^{k(x - x_0)} - 1).$$

Stabilita questa formola consideriamo due decomposizioni qualunque dell'intervallo (x_0, x) in tratti di ampiezza minore o uguale a δ, e siano y'', y''' i valori di Y che esse danno nel punto x, e sia y' il valore di Y cui si giunge in x colla decomposizione di (x_0, x) che risulta dall'insieme delle due precedenti decomposizioni. Avremo allora, in virtù dell'ultima formola,

$$|y'' - y'| < \frac{\sigma}{k}[e^{k(x-x_0)} - 1], \qquad |y''' - y'| < \frac{\sigma}{k}[e^{k(x-x_0)} - 1]$$

dalle quali

$$|y'' - y'''| < \frac{2\sigma}{k}[e^{k(x-x_0)} - 1]$$

valevole per tutte le coppie di decomposizioni dell'intervallo (x_0, x) in tratti di ampiezza non superiore a δ. Vediamo dunque come, assegnato un numero positivo σ_1 e preso $\sigma = \frac{k\sigma_1}{2[e^{k(x-x_0)} - 1]}$, esista un numero δ tale che pei valori y'', y''' di Y corrispondenti a due qualunque decomposizioni di (x_0, x) in tratti di ampiezza non superiore a δ sia verificata la disuguaglianza $|y'' - y'''| < \sigma_1$; ma questa è la condizione necessaria e sufficiente affinchè la quantità designata con y ammetta un limite finito, limite che indicheremo con $y(x)$. Allo stesso risultato saremmo giunti se si fosse supposto $x < x_0$.

La $y(x)$ è quindi funzione di x, finita e perfettamente determinata nell'intervallo $(x_0 - A,\ x_0 + A)$.

178. Dimostriamo ora che la $y(x)$ soddisfa alla equazione $y' = \varphi(x, y)$, cioè che la $y(x)$ ammette derivata $y'(x)$ e questa è uguale a $\varphi[x, y(x)]$. Consideriamo un valore x di X ed un altro valore $x + h$, e supponiamo, per fissare le idee, h positivo. Assegnato il numero positivo σ, consideriamo il numero $\frac{\sigma}{5}$ e sia δ il numero determinato precedentemente, e fissiamo $h < \delta$. Indichiamo con y il valore di Y in x cui si giunge mediante una qualunque decomposizione di (x_0, x) in tratti, con Y' il valore di Y che si ottiene in $x + h$ assumendo y come valore di Y in x, cosichè sia

$$(1) \qquad Y' - y = h\,\varphi(x, y),$$

e con y' il valore di Y in $x + h$ cui si giunge assumendo y come

valore iniziale in x di Y; allora, poichè è già $h < \delta$, avremo

$$(2) \qquad |Y' - y'| < \frac{\sigma}{5k}(e^{kh} - 1).$$

Poichè y e y' hanno per limite $y(x)$ e $y(x+h)$, potremo supporre le decomposizioni che hanno condotto ad y e y' tali che risulti

$$(3) \qquad |y(x) - y| < \frac{\sigma h}{5}, \qquad |y(x+h) - y'| < \frac{\sigma h}{5}$$

e, stante la continuità di $\varphi(x, y)$, possiamo supporre h_1 in modo che per $h \leq h_1$ la differenza $|y(x) - y|$ sia così piccola che risulti

$$|\varphi[x, y(x)] - \varphi(x, y)| < \frac{\sigma}{5},$$

dalla quale

$$|h\varphi[x, y(x)] - h\varphi(x, y)| < \frac{\sigma h}{5},$$

che in virtù della (1) diviene

$$|h\varphi[x, y(x)] - Y' + y| < \frac{\sigma h}{5}.$$

Da questa disuguaglianza e dalle (2), (3), osservando che

$$|y(x+h) - y(x) - h\varphi[x, y(x)]| =$$

$$|y(x+h) - y(x) - h\varphi[x, y(x)] + Y' - Y' + y - y + y' - y'|$$

$$\leq |y(x+h) - y'| + |y - y(x)| + |y' - Y'| + |Y' - y - h\varphi[x, y(x)]|,$$

ricaviamo

$$|y(x+h) - y(x) - h\varphi[x, y(x)]| < \frac{3\sigma h}{5} + \frac{\sigma}{5k}(e^{kh} - 1),$$

ossia

$$\left| \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \varphi[x, y(x)] \right| < \frac{3\sigma}{5} + \frac{\sigma}{5k} \cdot \frac{e^{kh} - 1}{h},$$

valevole per ogni $h \leq h_1$.

Ma $\lim\limits_{h=0} \dfrac{e^{kh} - 1}{h} = k$, e quindi $\dfrac{e^{kh} - 1}{h} = k + \alpha$, essendo α quantità positiva che ha per limite zero al diminuire di h; cosichè,

ove già non fosse $\alpha < k$, assumeremo h ulteriormente più piccolo in modo che sia $\alpha < k$, cioè esiste un h_2 tale che per $h \leq h_2$ risulterà

$$\left| \frac{y(x+h)-y(x)}{h} - \varphi[x, y(x)] \right| < \frac{3\sigma}{5} + \frac{\sigma}{5k}(k+\alpha) = \frac{3\sigma}{5} + \frac{\sigma}{5} + \frac{\alpha}{k}\frac{\sigma}{5}$$

$$< \frac{3\sigma}{5} + \frac{\sigma}{5} + \frac{\sigma}{5} = \sigma,$$

il che prova che $\lim\limits_{h=+0} \dfrac{y(x+h)-y(x)}{h} = \varphi[x, y(x)]$.

In modo analogo si proverebbe che

$$\lim_{h=-0} \frac{y(x+h)-y(x)}{h} = \varphi[x, y(x)],$$

e perciò

$$\lim_{h=0} \frac{y(x+h)-y(x)}{h} = y'(x) = \varphi[x, y(x)],$$

come volevamo dimostrare.

179. La funzione precedente $y(x)$ prende il valore y_0 per $x = x_0$; proviamo ora che di funzioni soddisfacenti la equazione differenziale $y' = \varphi(x, y)$, e che per $x = x_0$ assumano il valore y_0, non vi è che la sola $y(x)$. Invero, se esistesse un' altra di tali funzioni, $z = z(x)$, posto $u(x) = y(x) - z(x)$, poichè è

$$y'(x) = \varphi[x, y(x)], \qquad z'(x) = \varphi[x, z(x)],$$

avremo

$$u'(x) = \varphi[x, y(x)] - \varphi[x, z(x)]$$

da cui, tenendo conto della condizione del *Lipschitz*

$$|\varphi[x, y(x)] - \varphi[x, z(x)]| \leq k|y(x) - z(x)|$$

ove poniamo anche il segno d' eguaglianza per comprendere anche il caso $y(x) = z(x)$, ricaviamo

$$(1) \qquad \left| \frac{du(x)}{dx} \right| \leq k\,|u(x)|\,.$$

Ora, qualunque sia la funzione $v(x)$ che ammetta derivata in x, $\frac{d|v(x)|}{dx} \leq \left|\frac{dv(x)}{dx}\right|$, perchè se in x la $v(x)$ è diversa da zero esi-
erà un intorno di x, essendo allora la $v(x)$ continua in x, nel quale
$v(x)$ mantiene lo stesso segno, cosichè pei punti $x+h$ di esso è

$$\frac{|v(x+h)| - |v(x)|}{h} \leq \left|\frac{v(x+h) - v(x)}{h}\right|,$$

se $v(x) = 0$ è $\frac{|v(x+h)|}{h} \leq \left|\frac{v(x+h)}{h}\right|$; in ogni caso è dunque
$\frac{|v(x)|}{dx} \leq \left|\frac{dv(x)}{dx}\right|$.

Avremo dunque, per la (1),

$$\frac{d\,|u(x)|}{dx} \leq k\,|u(x)|,$$

da questa, moltiplicata per $e^{-k(x-x_0)}$, ricaviamo

$$\frac{d}{dx}\left\{e^{-k(x-x_0)}\,|u(x)|\right\} \leq 0.$$

La funzione $e^{-k(x-x_0)}|u(x)|$ è quindi mai crescente nell'intervallo
$x_0 - A, x_0 + A)$, ma per $x = x_0$ essa si annulla, quindi nell'inter-
allo $(x_0, x_0 + A)$, ove non sia nulla, è sempre negativa; ma poichè
$e^{-k(x-x_0)}$ è sempre positiva, e $|u(x)|$ è sempre positiva o nulla,
ovrà essere sempre nulla, cosichè $u(x) = y(x) - z(x) = 0$ nell'inter-
allo $(x_0, x_0 + A)$.

Servendoci della formola (2) scritta nella forma

$$\frac{d}{dx}\left\{-e^{-k(x-x_0)}\,|u(x)|\right\} \geq 0$$

i trova, in modo analogo, che deve essere $u(x) = 0$ nell'intervallo
$x_0 - A, x_0)$. Cosichè in tutto l'intervallo $(x_0 - A, x_0 + A)$ avremo
empre $y(x) = z(x)$, come volevasi dimostrare.

Riassumendo abbiamo il teorema fondamentale:

Se in un certo intorno del punto (x_0, y_0) *la funzione* $\varphi(x, y)$ *è continua e soddisfa alla condizione di Lipschitz*

$$|\varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_2)| < k\,|y_1 - y_2|$$

essendo k *una certa costante positiva, la equazione differenziale*

$$y' = \varphi(x, y)$$

ammette in un certo intervallo $(x_0 - A, x_0 + A)$ *un unico integrale* $y = y(x)$ *che per* $x = x_0$ *prende il valore* $y = y_0$.

Esempio. Quantunque il metodo tenuto per dimostrare il teorema precedente non si presti per ottenere, in termini finiti, l'integrale di una equazione $y' = \varphi(x, y)$, diamo qui un esempio di integrale ottenuto seguendo questo metodo. Sia l'equazione

$$y' = \frac{y}{x};$$

e siano x_0, y_0 due valori qualunque, x_0 diverso da zero. Il secondo membro della equazione proposta soddisfacendo in un certo intorno del punto (x_0, y_0) alle condizioni richieste, per calcolare l'integrale $y(x)$ ci serviremo di una speciale decomposizione di (x_0, x) in tratti, cioè divideremo (x_0, x) in n tratti di ampiezza uguale ad h, cosichè $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h, \ldots x = x_0 + nh$.

Avremo allora

$$y_1 = y_0 + h\frac{y_0}{x_0} = \frac{y_0}{x_0}(x_0 + h),$$

$$y_2 = y_1 + h\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_0}{x_0}(x_0 + 2h),$$

$$y_3 = y_2 + h\frac{y_2}{x_2} = \frac{y_0}{x_0}(x_0 + 3h),$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$y = y_{n-1} + h\frac{y_{n-1}}{x_{n-1}} = \frac{y_0}{x_0}(x_0 + nh);$$

ma, qualunque sia n e quindi anche al limite per n crescente indefinitamente, è $x_0 + nh = x$, quindi $y(x) = \frac{y_0}{x_0}x$, cosichè l'integrale della equazione proposta, che per $x = x_0$ assume il valor y_0, è $y = \frac{y_0}{x_0}x$; posto $\frac{y_0}{x_0} = C$, è $y = Cx$.

180. Tra altre dimostrazioni dell'esistenza dell'integrale delle equazioni differenziali $y' = \varphi(x, y)$ sono notevoli quelle dovute ai Proff. *Peano* (1), ed *Arzelà* (2). In esse non occorre supporre verificata la condizione del *Lipschitz*, della quale essi hanno solo bisogno per dimostrare l'unicità dell'integrale. La dimostazione che noi abbiamo data dell'unicità dell'integrale, che per $x = x_0$ assume il valore y_0, è appunto dovuta al Prof. *Peano* (3).

Di una dimostrazione, da cui ha origine un metodo di integrazione delle equazioni differenziali detto delle *approssimazioni* o *integrazioni successive*, terremo cenno altrove.

Un'altra dimostrazione dell'esistenza dell'integrale della equazione $y' = \varphi(x, y)$ nel caso che le variabili x, y siano complesse è pure dovuta a *Cauchy*; noi la daremo, anche perchè storicamente importante, colle semplicizzazioni introdottevi da *Briot* e *Bouquet*.

Abbiamo allora il teorema:

Siano x_0, y_0 *due costanti qualunque, e sia* $\varphi(x, y)$ *funzione univalente continua, monogena rispetto a ciascuna delle variabili* x, y, *per tutti i valori di* x, y *tali che* $|x - x_0| < R$, $|y - y_0| < R_1$; *allora esiste una unica funzione* y *di* x *monodroma e continua entro un certo circolo col centro in* x_0, *che soddisfa ivi alla equazione differenziale* $y' = \varphi(x, y)$, *e che per* $x = x_0$ *assume il valore* y_0.

Infatti, le derivate successive di una funzione $y = y(x)$ che per $x = x_0$ assume il valore $y_0 = y(x_0)$ e che in un intorno di x_0 soddisfa alla equazione $y' = \varphi(x, y)$, si ottengono dalle formole

$$(1) \quad \begin{cases} y' = \varphi(x, y) \\ y'' = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} y' \\ y''' = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} y' + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} y'^2 + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} y'' \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

ponendo in esse $x = x_0$, $y = y_0$; indichiamole con $y'(x_0)$, $y''(x_0)$,

(1) Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, anno 1886.
(2) Memorie dell'Accademia delle Scienze di Bologna 1895, 1896.
(3) Nouvelles Annales de mathématiques, 1892.

$y'''(x_0)\ldots$ Se questa funzione è monodroma continua in quell'intorno essa non potrà essere che l' *unica* funzione

$$(2)\quad y = y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0) + \frac{(x - x_0)}{2}y''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{2.3}y'''(x_0) + \ldots$$

Il teorema rimarrà perciò completamente dimostrato se proveremo che la serie, nel secondo membro della (2), ora costruita, è convergente per tutti i punti x interni ad un certo circolo di raggio r col centro in x_0, e che la funzione y data dalla (2) soddisfa alla equazione $y' = \varphi(x, y)$.

Ora, indicato con M il massimo di $|\varphi(x, y)|$ pei punti x del circolo di raggio R col centro in x_0 e pei punti y del circolo di raggio R_1 col centro in y_0, costruiamo la funzione

$$(3)\qquad \psi(x, Y) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x - x_0}{R}\right)\left(1 - \frac{Y - y_0}{R_1}\right)}$$

e consideriamo la equazione differenziale

$$(4)\qquad Y' = \psi(x, Y),$$

che possiamo anche scrivere così:

$$\left(1 - \frac{Y - y_0}{R_1}\right)Y' - \frac{M}{1 - \frac{x - x_0}{R}} = 0,$$

in modo che si vede come la si ottenga colla derivazione rispetto ad x dalla equazione

$$(Y - y_0) - \frac{1}{2R_1}(Y - y_0)^2 + MR\log\left(1 - \frac{x - x_0}{R}\right) = C,$$

che ne è così la equazione integrale generale. Ponendo $C = 0$, uno dei due valori di Y che essa definisce, cioè

$$(5)\qquad Y = y_0 + R_1 - \sqrt{R_1}\sqrt{R_1 + 2MR\log\left(1 - \frac{x - x_0}{R}\right)}$$

assume per $x = x_0$ il valore $Y = y_0$, ed è funzione *monodroma* e continua di x per tutti i punti x interni ad un circolo

centro in x_0, che non contenga nell' interno alcun punto nel quale la quantità sotto il radicale si annulli, cioè il punto valore $x = x_0 + R\left(1 - e^{-\frac{R_1}{2MR}}\right)$. Cosichè pei punti interni al circolo di raggio $r = R\left(1 - e^{-\frac{R_1}{2MR}}\right)$ col centro in x_0 la (5) è una funzione monodroma e continua di x, che soddisfa alla (4), che per $x = x_0$ assume il valore $Y = y_0$ e che ha in questo circolo lo sviluppo

$$(6)\quad Y = y_0 + (x - x_0)\,Y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}\,Y''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{2.3}\,Y'''(x_0) + \ldots,$$

dove i coefficienti $Y'(x_0)$, $Y''(x_0)$, ... si ricavano dalle equazioni

$$(7)\quad \begin{cases} Y'(x) = \psi(x, Y) \\ Y''(x) = \dfrac{\partial\psi}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi}{\partial Y}\,Y' \\ Y'''(x) = \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial Y}\,Y' + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial Y^2}\,Y'^2 + \dfrac{\partial\psi}{\partial Y}\,Y'' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

ponendovi $x = x_0$, $Y = y_0$.

Osservando che dalla (3) si ha

$$\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n\,\partial Y^m} = \frac{1.2\ldots n}{R^n}\,\frac{1.2\ldots m}{R_1{}^m}\,\frac{M}{\left(1 - \dfrac{x - x_0}{R}\right)^{n+1}\left(1 - \dfrac{Y - y_0}{R_1}\right)^{m+1}},$$

nella quale ove n o m sia zero si intenderà sostituita l' unità in luogo del prodotto $1.2\ldots n$, o $1.2\ldots m$, abbiamo

$$\frac{\partial^{n+m}\psi(x_0, y_0)}{\partial x^n\,\partial Y^m} = \frac{1.2\ldots n}{R^n}\,\frac{1.2\ldots m}{R_1{}^m}\,M;$$

d' altra parte è (Esercizio 2 a pag. 437)

$$\left|\frac{\partial^{n+m}\varphi(x_0, y_0)}{\partial x^n\,\partial y^m}\right| < \frac{1.2\ldots n}{R^n}\,\frac{1.2\ldots m}{R_1{}^n}\,M,$$

quindi

$$(8)\quad \left|\frac{\partial^{n+m}\varphi(x_0, y_0)}{\partial x^n\,\partial y^m}\right| < \frac{\partial^{n+m}\psi(x_0, y_0)}{\partial x^n\,\partial Y^m}.$$

Ora dalla prima delle (1) ricaviamo $|y'(x_0)| = |\mathfrak{F}(x_0, y_0)| < M$ e dalla prima delle (7) $Y'(x_0) = M$, cosichè $|y'(x_0)| < Y'(x_0)$; dalla seconda delle (1)

$$|y''(x_0)| \leq \left|\frac{\partial \mathfrak{F}(x_0, y_0)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \mathfrak{F}(x_0, y_0)}{\partial y}\right| |y'(x_0)|$$

e dalla seconda delle (7)

$$Y''(x_0) = \frac{\partial \Psi(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi(x_0, y_0)}{\partial Y} Y'(x_0),$$

e perciò, in virtù della (8) e poichè $|y'(x_0)| < Y'(x_0)$, risulta $|y''(x_0)| < Y''(x_0)$; e così, analogamente, dalla terza delle (1) e dalle (7) risulterebbe $|y'''(x_0)| < Y'''(x_0)$, ed in generale

$$|y^{(n)}(x_0)| < Y^{(n)}(x_0).$$

Perciò, i moduli dei termini della serie (2) essendo, a partire dal secondo, minori dei moduli dei termini della (6), la quale è convergente finchè $|x - x_0| < r$, risulta che la (2) è assolutamente convergente finchè $|x - x_0| < r$.

Rimane ora solo da provare che la funzione y di x, definita dalla (2), soddisfa alla equazione differenziale $y' = \varphi(x, y)$.

Ora, poichè possiamo derivare termine a termine la (2), è

$$(9) \qquad y' = y'(x_0) + (x - x_0) y''(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} y'''(x_0) + \dots$$

Sostituiamo poi il valore (2) di y nella $\varphi(x, y)$; osserviamo che $r < R$, e che, se, per qualunque valore di x tale che $|x - x_0| < r$ pel valore di y dato dalla (2) non fosse sempre $|y - y_0| < R_1$, esisterà però, essendo la y continua, un valore $r_1 < r$ tale che per $|x - x_0| < r_1$ sarà sempre $|y - y_0| < R_1$; in conseguenza, finchè $|x - x_0| < r_1$, la $\varphi(x, y)$ è funzione monodroma e continua di x e sviluppabile perciò colla serie del Taylor, cioè

$$(10) \quad \varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0) + \varphi'(x_0, y_0)(x - x_0) + \varphi''(x_0, y_0) \frac{(x - x_0)^2}{2} + \dots$$

dove, avendo posto

$$\varphi'(x, y) = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} y',$$

$$\varphi''(x,y) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}y' + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}y'^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}y''$$

. . . . . ,

è $\varphi(x_0, y_0) = y'(x_0)$, $\varphi'(x_0, y_0) = y''(x_0)$, $\varphi''(x_0, y_0) = y'''(x_0)$...

In conseguenza il secondo membro della (10) coincide con quello della (9) e, finchè $|x - x_0| < r_1$, è $y' = \varphi(x, y)$.

Il teorema è così completamente dimostrato.

Integrazione delle equazioni differenziali di primo ordine risolute rapporto alla derivata.

181. Non sappiamo integrare in termini finiti una equazione differenziale di primo ordine nella sua forma generale $f(x, y, y') = 0$, ma solo equazioni di tipi speciali.

Cominciamo dalle equazioni risolute rapporto alla derivata, cioè da quelle che possono ridursi alla forma $y' = \varphi(x, y)$, o $y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$, o $Mdx + Ndy = 0$.

Separazione delle variabili. Se M è funzione della sola x, N funzione della sola y si ha subito l'integrale generale della equazione $Mdx + Ndy = 0$ nella forma $\int Mdx + \int Ndy = C$ od anche $\int_{x_0}^{x} Mdx + \int_{y_0}^{y} Ndy = C_1$.

Si dice allora che nella equazione le variabili sono separate.

La via naturale per la integrazione, in termini finiti, delle equazioni della forma $y' = \varphi(x, y)$ sarebbe di calcolare, in termini finiti, il limite indicato al N. 177, ma tale calcolo praticamente non riesce. Si cerca invece generalmente di trasformare l'equazione proposta in altra, nella quale le variabili siano separate.

Se è $M = XY$, $N = X_1Y_1$ dove X, X_1 sono funzioni della sola x, Y, Y_1 della sola y, allora dalla equazione $XY\,dx + X_1Y_1\,dy = 0$, nella quale le variabili non sono ancora separate, ricaviamo

$\frac{X}{X_1} dx + \frac{Y_1}{Y} dy = 0$, nella quale esse lo sono, e si ha l'integrale generale $\int \frac{X}{X_1} dx + \int \frac{Y_1}{Y} dy = C$.

ESEMPI

1) $(1+x)\,y dx + (1-y)\,x dy = 0$,

ossia

$$\frac{1+x}{x} dx + \frac{1-y}{y} dy = 0;$$

l'integrale è

$$\int \frac{1+x}{x} dx + \int \frac{1-y}{y} dy = C_1, \text{ cioè } \log(xy) + x \quad y = C_1$$

od anche, posto $C_1 = \log C$,

$$xy = Ce^{y-x}.$$

2) Nella equazione $(x+y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$ le variabili non si possono separare, ma, posto $y^2 = u$, essa diviene $xdx + udx + xdu = 0$, ossia $xdx + d(ux) = 0$, nella quale, considerando ux come una nuova variabile, le variabili sono separate. Essa ha l'integrale $\frac{x^2}{2} + ux = C$, ossia $x^2 + 2ux = C$, e quindi si ha l'integrale generale della proposta, $x^2 + 2y^2x = C$.

3) Dalla equazione

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0 \tag{1}$$

ricaviamo subito

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = C$$

ossia

$$\text{arc sen}\, x + \text{arc sen}\, y = C; \tag{2}$$

ma l'integrale generale può trovarsi anche sotto forma algebrica. Invero, dalla equazione differenziale proposta scritta così:

$$dx\sqrt{1-y^2}+dy\sqrt{1-x^2}=0$$

ricaviamo, integrando per parti ciascun termine del primo membro,

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}+\int xy\left(\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)=C_1,$$

ossia, per la (1),

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=C_1, \tag{3}$$

che è l'integrale in forma algebrica.

Se si stabilisce di determinare le costanti C, C_1 in modo che per $x=x_0$ la y assuma uno stesso valore y_0, le (2), (3) esprimono la stessa relazione tra x e y.

Possiamo ricavare dal confronto dell'integrale nelle due forme (2), (3) la nota formola di addizione per la funzione circolare *seno*.

Infatti, posto arc sen $x=u$, arc sen $y=v$, da cui $x=\operatorname{sen} u$, $y=\operatorname{sen} v$, $\sqrt{1-x^2}=\cos u$, $\sqrt{1-y^2}=\cos v$, le (2), (3) divengono

$$u+v=C,\quad \operatorname{sen} u\cos v+\operatorname{sen} v\cos u=C_1; \tag{4}$$

indicando con w il valore di y che corrisponde ad $x=0$, si ha dalla (2) arc sen $w=C$, da cui $w=\operatorname{sen} C=\operatorname{sen}(u+v)$, e dalla (3) $w=C_1=\operatorname{sen}(u+v)$, e la seconda delle (4) diviene perciò

$$\operatorname{sen}(u+v)=\operatorname{sen} u\cos v+\operatorname{sen} v\cos u.$$

4) Anche la equazione

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=0, \tag{5}$$

lella quale si ha subito l'integrale in forma trascendente

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}+\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=C, \tag{6}$$

dove le integrazioni non si sanno eseguire in termini finiti, possiede pure l'integrale in forma algebrica.

Per trovarlo poniamo $\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = d\zeta$ ed in conseguenza, per la (5), $\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = -d\zeta$, da cui, indicate con apici le derivazioni rapporto a ζ, abbiamo

$$x' = \sqrt{1-x^4}\,,\; y' = -\sqrt{1-y^4}\,,$$

e da queste

$$x'' = \frac{-2x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,x' = -2x^3\,,\; y'' = -2y^3\,,\; yx'' - xy'' = 2xy\,(y^2 - x^2),$$

$$y^2x'^2 - x^2y'^2 = (1 + x^2y^2)(y^2 - x^2)\,,\; \frac{yx'' - xy''}{y^2x'^2 - x^2y'^2} = \frac{2xy}{1 + x^2y^2}.$$

dalla quale ultima, scritta nella forma:

$$\frac{yx'' - xy''}{yx' - xy'} = \frac{2xy\,(yx' + xy')}{1 + x^2y^2}\,,$$

si ricava

$$\frac{d}{d\zeta}\log(yx' - xy') = \frac{d}{d\zeta}(1 + x^2y^2)\,,$$

e da questa, integrando,

$$\log(yx' - xy') = \log(1 + x^2y^2) + \log C_1\,,\; \text{ossia } \frac{yx' - xy'}{1 + x^2y^2} = C_1.$$

ovvero

$$(7) \qquad \frac{y\sqrt{1-x^4} + x\sqrt{1-y^4}}{1 + x^2y^2} = C_1\,,$$

che è il cercato integrale in forma algebrica.

Poniamo ora $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = u$, e consideriamo il limite superiore x dell'integrale come funzione dell'integrale stesso, cioè x-

ciamo, come si dice, l'inversione dell'integrale, ed indichiamo con $\varphi(u)$ la funzione x di u, $x=\varphi(u)$; noi veniamo così a definire una nuova trascendente $\varphi(u)$: il confronto dell'integrale nelle due forme (6), (7) ci permette di trovare la formola di addizione relativa a questa trascendente φ, cioè la formola che esprime $\varphi(u+v)$ mediante $\varphi(u)$ e $\varphi(v)$. Infatti posto $\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=v$ da cui $y=\varphi(v)$, le (6), (7) divengono

$$(8)\qquad u+v=C,\quad \frac{\varphi(u)\sqrt{1-\overline{\varphi(v)}^4}+\varphi(u)\sqrt{1-\overline{\varphi(u)}^4}}{1+\overline{\varphi(u)}^2\,\overline{\varphi(v)}^2}=C_1;$$

indicando con w il valore di y che corrisponde ad $x=0$, la (6) ci dà $\int_0^w \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=C$, da cui $w=\varphi(C)=\varphi(u+v)$, e la (7) $v=C_1=\varphi(u+v)$, ed in conseguenza la seconda delle (8) diviene

$$\varphi(u+v)=\frac{\varphi(u)\sqrt{1-\overline{\varphi(v)}^4}+\varphi(v)\sqrt{1-\overline{\varphi(u)}^4}}{1+\overline{\varphi(u)}^2\,\overline{\varphi(v)}^2}$$

he è la formola d'addizione richiesta.

182. *Equazioni omogenee.* — Sono quelle della forma $Mdx+Ndy=0$ ssia $M+Ny'=0$, dove M, N sono funzioni omogenee di x, y ello stesso grado r; cosichè, essendo $M=x^r\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, $N=x^r\psi\left(\frac{y}{x}\right)$, i potrà scrivere la proposta equazione così:

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx+\psi\left(\frac{y}{x}\right)dy=0.$$

Poniamo ora $\frac{y}{x}=z$, da cui $y=zx$, $dy=xdz+zdx$, ed ·remo

$$[\varphi(z)+z\psi(z)]\,dx+x\psi(z)\,dz=0;$$

separando le variabili ed integrando si ha

$$(1) \qquad \log x + \int \frac{\psi(z)\, dz}{\varphi(z) + z\psi(z)} = C,$$

la quale, ove si eseguisca in termini finiti la integrazione e si sostituisca per z il suo valore $\frac{y}{x}$, ci dà l'integrale generale della proposta equazione espresso in x, y.

Esempi

1) La equazione $2xy + y^2 y' = x^2 y'$, che possiamo scrivere: $(y^2 - x^2)\, dy + 2xy\, dx = 0$, è omogenea. Essendo $\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = 2\frac{y}{x}$, $\psi\left(\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1$, la (1) diviene: $\log x + \int \frac{z^2 - 1}{z^2 - z + 2z}\, dz = C_1$, ossia $\log x + \int \frac{z^2 - 1}{z(z^2+1)}\, dz = C_1$, $\log x + \int \left(\frac{2z}{z^2+1} - \frac{1}{z}\right) dz = C_1$, da cui, posto $\log C = C_1$, si ha $\frac{x(z^2+1)}{z} = C$; e da questa, ponendovi $z = \frac{y}{x}$, otteniamo l'integrale generale della proposta equazione, cioè $x^2 + y^2 = Cy$.

2) L'equazione non omogenea

$$(ax + by + c)\, dx + (a'x + b'y + c')\, dy = 0$$

si trasforma in una omogenea nelle variabili x', y' ponendo $x = x_0 + x'$, $y = y_0 + y'$ e poi determinando convenientemente le costanti x_0, y_0. La equazione proposta diviene

$$(ax' + by' + ax_0 + by_0 + c)\, dx' + (a'x' + b'y' + a'x_0 + b'y_0 + c')\, dy' = 0$$

che si riduce alla equazione omogenea

$$(ax' + by')\, dx' + (a'x' + b'y')\, dy' = 0$$

ove si determinino le costanti x_0, y_0 dalle equazioni $ax_0 + by_0 + c = 0$, $a'x_0 + b'y_0 + c' = 0$, il che potrà sempre farsi ove non sia $ab' - a'b = 0$.

Se poi è $ab' - a'b = 0$ cioè $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, ed è $\frac{c}{c'}$ diverso

ste due frazioni, posto $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = m$, la equazione proposta si può scrivere:

$$(a'x + b'y + c')\,dy + m(a'x + b'y)\,dx + c\,dx = 0,$$

che, posto $a'x + b'y = z$, diviene

$$(z + c')\,dz + [(mz + c)b' - (z + c')a']\,dx = 0$$

nella quale si separano subito le variabili.

Se, in ultimo, è $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = m$, la equazione proposta si riduce alla $dy + m\,dx = 0$, il cui integrale è $y + mx = C$.

3) La equazione precedente è caso particolare della

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right),$$

per integrare la quale porremo $ax + by + c = u$, $a'x + b'y + c' = v$, da cui $a\,dx + b\,dy = du$, $a'dx + b'dy = dv$, e se, come supponiamo, è $ab' - a'b$ diverso da zero, $dx = \frac{b'du - bdv}{ab' - a'b}$, $dy = \frac{adv - a'du}{ab' - a'b}$, cosichè la equazione proposta diviene:

$$a - a'\frac{du}{dv} = f\left(\frac{u}{v}\right)\left(b'\frac{du}{dv} - b\right),$$

che si integra, separando le variabili, col porre $\frac{u}{v} = z$.

183. *Equazioni lineari.* Sono quelle di primo grado in y e y', cioè quelle della forma

$$y' + Py = Q$$

dove P, Q sono funzioni della sola x.

Per integrarla moltiplichiamone i due membri per $e^{\int P dx}$, cosichè essa divenga

$$y'e^{\int P dx} + yPe^{\int P dx} = Qe^{\int P dx}, \qquad \text{ossia} \qquad \frac{d}{dx}(ye^{\int P dx}) = Qe^{\int P dx}$$

da cui, integrando,

$$ye^{\int P dx} = \int Q e^{\int P dx} dx + C, \qquad \text{ossia} \quad y = e^{-\int P dx}\left[\int Q e^{\int P dx} dx + C\right],$$

che è appunto l'integrale generale della proposta equazione.

ESEMPI.

1) $y'\sqrt{1-x^4} - y\sqrt{1-x^2} = (x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}$; abbiamo

$$P = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad Q = \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

per cui

$$y = e^{\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}}\left[\int \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}} e^{-\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}} dx + C\right]$$

$$= e^{\log(x+\sqrt{1+x^2})}\left[\int \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}} e^{-\log(x\sqrt{1+x^2})} dx + C\right]$$

$$= (x+\sqrt{1+x^2})[\text{arc sen } x + C].$$

2) $y' + y\varphi'(x) = \varphi(x)\varphi'(x)$,

$$y = e^{-\int \varphi'(x)dx}\left[\int \varphi(x)\varphi'(x) e^{\int \varphi'(x)dx} dx + C\right] = e^{-\varphi(x)}\left[\int \varphi(x) e^{\varphi(x)}\varphi'(x) dx + C\right]$$

$$= e^{-\varphi(x)}[e^{\varphi(x)}\{\varphi(x) - 1\} + C] = \varphi(x) - 1 + Ce^{-\varphi(x)};$$

così ad es.: l'integrale generale della

$$y' + y\cos x = \frac{1}{2}\text{sen } 2x \quad \text{è} \quad y = \text{sen } x - 1 + Ce^{-\text{sen } x}.$$

184. *Equazioni di Bernoulli.* Le equazioni della forma

$$\varphi'(y)y' + \varphi(y)P = Q,$$

dove P, Q indicano funzioni della sola x, si riducono al tipo lineare ponendo $\varphi(y) = z$, giacchè otteniamo così la equazione trasformata $z' + Pz = Q$, che è lineare rapporto a z.

Caso particolare ed importante della precedente è la equazione di Bernoulli

$$y' + Py = Qy^n, \quad \text{ossia} \quad y^{-n}y' + Py^{1-n} = Q,$$

che si scorge essere della forma precedente scrivendola così:

$$y^{-n}y' + (1-n)P\frac{y^{1-n}}{1-n} = Q.$$

Posto quindi $\frac{y^{1-n}}{1-n} = z$ essa diviene $z' + (1-n)Pz = Q$, il cui integrale generale è $z = e^{(n-1)\int Pdx}\left[\int Qe^{(1-n)\int Pdx}dx + C_1\right]$, da cui l'integrale generale della proposta:

$$y^{1-n} = e^{(n-1)\int Pdx}\left[(1-n)\int Qe^{(1-n)\int Pdx}dx + C\right].$$

Qui si è supposto n diverso dall'unità; se fosse $n = 1$, nell'equazione proposta $dy + Pydx = Qydx$ si separano subito le variabili riducendola alla $\frac{dy}{y} + (P - Q)\,dx = 0$, da cui

$$\log y + \int (P - Q)\,dx = C.$$

Esempi

1) $y' + y = x\sqrt{y}$; è $P = 1$, $Q = x$, $n = \frac{1}{2}$, quindi

$$\sqrt{y} = e^{-\frac{1}{2}\int dx}\left[\frac{1}{2}\int xe^{\frac{1}{2}\int dx}dx + C\right] \quad \text{ossia} \quad \sqrt{y} = x - 2 + Ce^{-\frac{x}{2}}.$$

2) $y'\cos y - a\,\text{sen}\,y\cos x = b\,\text{sen}\,2x$; posto $\text{sen}\,y = z$ abbiamo

$$z' - az\cos x = b\,\text{sen}\,2x,$$

il cui integrale è $z = Ce^{a\,\text{sen}\,x} - \frac{2b}{a}\left(\text{sen}\,x + \frac{1}{a}\right)$, e quindi l'integrale generale della proposta è

$$\text{sen}\,y = Ce^{a\,\text{sen}\,x} - \frac{2b}{a}\left(\text{sen}\,x + \frac{1}{a}\right).$$

185. Per integrare le equazioni della forma

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+\psi\left(\frac{y}{x}\right)y'=ax^m(xy'-y)$$

ossia

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx+\psi\left(\frac{y}{x}\right)dy=ax^m(xdy-ydx)$$

si pone $\frac{y}{x}=z$; essa si trasforma allora nella

$$\varphi(z)\,dx+\psi(z)(xdz+zdx)=ax^{m+2}\,dz$$

ossia

$$\frac{dx}{dz}+\frac{\psi(z)}{\varphi(z)+z\psi(z)}\,x=\frac{ax^{m+2}}{\varphi(z)+z\psi(z)},$$

che è lineare in x se $m=-2$, o nella quale si separano senz'altr le variabili se $m=-1$, e che è una equazione di Bernoulli se è diverso da -2 e da -1.

Esempio. $y^2dx+x^2dy=x^2(xdy-ydx)$.
ossia

$$\frac{y^2}{x^2}\,dx+dy=(xdy-ydx).$$

È $\varphi(z)=z^2$, $\psi(z)=1$, $m=0$, quindi la equazione in x e z $\frac{dx}{dz}+\frac{1}{z^2+z}\,x=\frac{x^2}{z^2+z}$, il cui integrale è

$$\frac{1}{x}=e^{\int\frac{dz}{z^2+z}}\left[-\int\frac{e^{-\int\frac{dz}{z^2+z}}}{z^2+z}\,dz+C\right]=\frac{z}{1+z}\left(\frac{1}{z}+C\right);$$

l'integrale generale della proposta equazione è perciò

$$\frac{1}{x}=\frac{x}{x+y}+\frac{Cy}{x+y}\quad\text{ossia}\quad y=\frac{x(x-1)}{1-Cx}.$$

186. *Equazione di Riccati.* Della equazione

$$(1)\qquad y'+Ly^2+My+N=0,$$

dove L, M, N indicano funzioni della sola x, si trova colle q adra

ıre l' integrale generale, quando se ne conosca un integrale particolare $y = u(x)$, cioè quando si conosca la funzione $u(x)$ tale che sia

$$u' + Lu^2 + Mu + N = 0. \tag{2}$$

Infatti, posto $y = u + z$, in virtù della (2) la (1) diviene

$$\frac{dz}{dx} + (2Lu + M)z = Lz^2,$$

he è del tipo della equazione di Bernoulli e che ci dà, integrandola,

$$\frac{1}{z} = e^{\int(2Lu+M)dx}\left[\int Le^{-\int(2Lu+M)dx}\,dx + C\right],$$

ıer cui

$$y = u + \frac{e^{-\int(2Lu+M)dx}}{C + \int Le^{-\int(2Lu+M)dx}\,dx}.$$

Esempio. — Con semplicissimi tentativi si trova che $y = x$ è integrale particolare della equazione

$$y' - xy^2 + 2x^2y - x^3 - 1 = 0;$$

quindi l' integrale generale è

$$y = x + \frac{e^{-\int(-2x^2+2x^2)dx}}{C_1 - \int dx\, xe^{-\int(2x^2-2x^2)dx}} = x + \frac{1}{C_1 - \frac{x^2}{2}},$$

ıd anche $y = x + \dfrac{2}{x^2 + C}$.

Del fattore integrante o moltiplicatore delle equazioni differenziali $Mdx + Ndy = 0$.

187. Un altro metodo per la integrazione delle equazioni differenziali $y' = \varphi(x, y)$ è quello del fattore integrante.

La equazione $Mdx + Ndy = 0$ dicesi equazione differenziale *esatta* e il suo primo membro è un differenziale esatto. Allora, se u è l' inte-

grale della espressione $Mdx + Ndy$, $u = C$ è l' integrale generale della equazione proposta. Così ad es.: si riconosce subito che l' equazione $xdx + ydy + \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$ è una equazione esatta, il cui integrale generale è

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \text{arc tg}\,\frac{y}{x} = C.$$

La equazione $XYdx + X_1Y_1dy = 0$, dove X, X_1 sono funzioni della sola x, Y, Y_1 della sola y, non è esatta, ma lo diviene se la si moltiplica pel fattore $\frac{1}{X_1 Y}$, poichè allora diviene $\frac{X}{X_1}dx + \frac{Y_1}{Y}dy = 0$, il cui integrale generale è

$$\int \frac{X}{X_1}dx + \int \frac{Y_1}{Y}dy = C.$$

Ciò che avviene per questa equazione particolare, avviene in generale, cioè:

Esistono sempre dei fattori μ, *detti moltiplicatori o fattori integranti, tali che moltiplicando per uno di essi la equazione differenziale* $Mdx + Ndy = 0$, *questa si riduce ad una equazione esatta*

$$\mu(Mdx + Ndy) = 0.$$

Infatti, sia $f(x, y, C) = 0$ l' integrale generale della

$$(1) \qquad Mdx + Ndy = 0;$$

risolvendo rispetto a C l' equazione $f = 0$, si ottenga $u(x, y) = C$: differenziando allora quest' ultima si ricava $\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0$, il cui primo membro non può differire da quello della (1) che per un fattore μ funzione di x, y e indipendente da y', cosichè sarà $\frac{\partial u}{\partial x} = \mu M$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \mu N$, e l' espressione $\mu(Mdx + Ndy)$ è perciò un differenziale esatto. Rimane così dimostrata l' esistenza di un fattore integrante, che sarebbe subito conosciuto ove si conoscesse l' integrale generale $u = C$ della (1).

Di questi fattori ne esiste un numero infinito, poichè ogni altro fattore della forma $\mu\varphi(u)$, dove φ è una funzione arbitraria, è pure

un moltiplicatore della (1), giacchè

$$\mu\varphi(u)[Mdx + Ndy] = \varphi(u)du.$$

188. Sia μ un moltiplicatore della $Mdx + Ndy = 0$. Allora avremo $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$, ossia

$$(1) \qquad N\frac{\partial\mu}{\partial x} - M\frac{\partial\mu}{\partial y} = \mu\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right],$$

e questa è una equazione a derivate parziali di primo ordine cui deve soddisfare la funzione μ; ma il determinare la funzione μ, od anche soltanto una funzione μ speciale che la soddisfaccia, costituisce in generale un problema più difficile della integrazione della equaziale differenziale proposta, che noi volevamo risolvere servendoci del fattore integrante. Cosichè è solo in alcuni casi particolari che è utile servirci del metodo del fattore integrante, in quelli cioè nei quali sia facile riconoscere una funzione μ che soddisfaccia alla (1).

Due casi notevoli sono i seguenti:

1) Sia $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ funzione della sola x, $f(x)$; allora la (1) si riduce alla $\frac{\partial\mu}{\partial x} - \frac{M}{N}\frac{\partial\mu}{\partial y} = \mu f(x)$, alla quale si soddisfa supponendo μ indipendente da y, cosichè $\frac{\partial\mu}{\partial y} = 0$, e prendendo per μ quella funzione di x per la quale è $\frac{d\mu}{dx} = \mu f(x)$; cosichè $\mu = e^{\int f(x)dx}$ soddisfa la (1) ed è perciò un moltiplicatore.

In modo analogo si riconosce che se $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \varphi(y)$, $\mu = e^{\int\varphi(y)dy}$ è un moltiplicatore.

2) Se $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = N\varphi(x) - M\psi(y)$, essendo $\varphi(x)$, $\psi(y)$ due certe funzioni di x e di y, la (1) diviene

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x} - M\frac{\partial\mu}{\partial y} = \mu[N\varphi(x) - M\psi(y)],$$

la quale viene soddisfatta se si prende μ in guisa che sia

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} = \mu\varphi(x), \quad \frac{\partial\mu}{\partial y} = \mu\psi(y);$$

e μ risulterà appunto tale, se, posto $\mu = XY$, dove X, Y debbano essere funzioni della sola x e della sola y, si determineranno X, Y dalle equazioni $\frac{dX}{dx} = X\varphi(x)$, $\frac{dY}{dy} = Y\psi(y)$ cioè se $X = e^{\int\varphi(x)dx}$, $Y = e^{\int\psi(y)dy}$. Cosichè il fattore integrante sarà nel nostro caso

$$\mu = e^{\int\varphi(x)dx + \int\psi(y)dy}.$$

Esempi

1) $(1 - x^2y)dx + x^2(y - x)\,dy = 0$; $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = -\frac{2}{x}$, cosichè $\mu = e^{-2\int\frac{dx}{x}} = \frac{1}{x^2}$. La equazione proposta si riduce alla equazione esatta

$$\left(\frac{1}{x^2} - y\right)dx + (y - x)\,dy = 0,$$

il cui integrale generale è

$$y^2x - 2x^2y - 2 = Cx.$$

2) $y^2dx + (xy - 1)\,dy = 0$:
$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = -\frac{1}{y}$, $\mu = \frac{1}{y}$, e l' integrale generale è $xy - \log y = C$.

3) $(x^2y^2 + y)\,dx + (x^2y^2 + x)\,dy = 0$; $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -N\frac{2}{x} + M\frac{2}{y}$, $\varphi(x) = -\frac{2}{x}$, $\psi(y) = -\frac{2}{y}$, $\mu = \frac{1}{x^2y^2}$, e l' integrale generale è $xy(x + y) - 1 = Cxy$.

189. In alcuni casi si riesce con speciali ripieghi a trovare il fattore integrante. Così ad esempio, cerchiamo se si possano determinare le costanti m, n in guisa che x^my^n risulti moltiplicatore della equazione

$$(2ay + 3bxy^2)\,dx + (3ax + 4bx^2y)dy = 0.$$

Dovremo avere

$$x^m[2a(n+1)y^n + 3b(n+2)xy^{n+1}] = y^n[3a(m+1)x^m + 4b(m+2)x^{m+1}]$$

e quindi $2(n+1)=3(m+1)$, $3(n+2)=4(m+2)$ da cui $m=1$, $n=2$; cosichè $\mu=xy^2$ è fattore integrante, e l'integrale generale è $ax^2y^3+bx^3y^4=C$.

190. Se nella equazione

$$(1) \qquad Mdx+Ndy=0$$

poniamo $x+\varepsilon X$ in luogo di x, $y+\varepsilon Y$ in luogo di y, dove X e Y indicano funzioni di x, y ed ε è una costante della quale vogliamo trascurare le potenze superiori alla prima, essa si riduce alla

$$\left(M+\varepsilon X\frac{\partial M}{\partial x}+\varepsilon Y\frac{\partial M}{\partial y}\right)\left(dx+\varepsilon\frac{\partial X}{\partial x}dx+\varepsilon\frac{\partial X}{\partial y}dy\right)$$
$$+\left(N+\varepsilon Y\frac{\partial N}{\partial x}+\varepsilon Y\frac{\partial N}{\partial y}\right)\left(dy+\varepsilon\frac{\partial Y}{\partial x}dx+\varepsilon\frac{\partial Y}{\partial y}dy\right)=0$$

ossia, per la (1),

$$(2) \qquad \begin{aligned}&\left(\frac{\partial M}{\partial x}X+\frac{\partial M}{\partial y}Y\right)dx+M\left(\frac{\partial X}{\partial x}dx+\frac{\partial X}{\partial y}dy\right)\\&+\left(\frac{\partial N}{\partial x}X+\frac{\partial N}{\partial y}Y\right)dy+N\left(\frac{\partial Y}{\partial x}dx+\frac{\partial Y}{\partial y}dy\right)=0.\end{aligned}$$

Se il primo membro di questa equazione è uguale al primo membro della (1) moltiplicato per un fattore indipendente da dx, dy, si dice che la (1) ammette la *trasformazione infinitesimale* X, Y. La condizione necessaria e sufficiente affinchè ciò sia, si ottiene eliminando dx, dy tra le (1), (2); essa è perciò espressa dalla equazione

$$\left(\frac{\partial M}{\partial x}X+\frac{\partial M}{\partial y}Y\right)N+M\left(\frac{\partial X}{\partial x}N-\frac{\partial X}{\partial y}M\right)$$
$$-\left(\frac{\partial N}{\partial x}X+\frac{\partial N}{\partial y}Y\right)M+N\left(\frac{\partial Y}{\partial x}N-\frac{\partial Y}{\partial y}M\right)=0,$$

ossia dalla

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M}{MX+NY}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{N}{MX+NY}\right)=0,$$

la quale mostra che $\dfrac{1}{MX+NY}$ è un moltiplicatore della (1).

E si riconosce subito che, inversamente, se μ è un fattore integrante della (1) e X, Y sono funzioni di x, y tali che $\mu = \frac{1}{MX + NY}$, la (1) ammette la trasformazione infinitesimale X, Y.

Si ha così un mezzo per determinare il fattore integrante di certe equazioni.

Esempi

1) Se la equazione $Mdx + Ndy = 0$ è omogenea, essa ammette la trasformazione infinitesimale x, y, cosichè $\frac{1}{Mx + Ny}$ ne è un fattore integrante.

2) Come facilmente può verificarsi, la equazione

$$(x^4y^2 - a)\, dx + x^4 dy = 0$$

ammette la trasformazione infinitesimale x^2, $1 - 2xy$, cosichè

$$\mu = \frac{1}{(x^4y^2 - a)x^2 + x^4(1 - 2xy)} = \frac{1}{x^4(1 - xy)^2 - ax^2}$$

ne è un fattore integrante. Si troverà allora che l'integrale generale è

$$\log \frac{\sqrt{a} + x(1 - xy)}{\sqrt{a} - x(1 - xy)} = \frac{2\sqrt{a}}{x} + C \qquad \text{se } a > 0,$$

$$y = \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{-a}}{x^2} \operatorname{tg}\left(C - \frac{\sqrt{-a}}{x}\right) \qquad \text{se } a < 0.$$

Se $a = 0$, l'equazione proposta si riduce a $y^2dx + dy = 0$, il cui integrale è $x - \frac{1}{y} = C$.

Esercizi

1. Equazione differenziale $y' + ay - b = 0$, integrale generale $y = \frac{b}{a} + Ce^{-ax}$.

2. $(2x+1)(y^2+y-1)y'+y(2x-1)=0$,
$y^2+2y+2x=2\log[Cy(2x+1)]$.

3. $x\sqrt{1+y^3}+y'y^2\sqrt{1+x^2}=0$, $3\sqrt{1+x^2}+2\sqrt{1+y^3}=C$.

4. $(1-\operatorname{sen} x)(a^4-y^4)+y(x+\cos x)y'=0$,
$(x+\cos x)^{4a^2}(a^2+y^2)=C(a^2-y^2)$.

5. $(x+y)^2\,dy-a\,dx=0$, $x+y=a\operatorname{tg}\left(\frac{y}{a}+C\right)$

6. $a(xy'-y)=(x+yy')\sqrt{x^2+y^2-a^2}$,
$a\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=\sqrt{x^2+y^2-a^2}+a\operatorname{arc\,sen}\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2}}+C$ (si ponga $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\operatorname{sen}\theta$).

7. $x+yy'-y'\sqrt{x^2+y^2-a^2}=0$, $y=\frac{x^2-a^2-C^2}{2C}$.

8. Determinare la funzione y di x tale che sia

$$\int\lambda y\,dx=\frac{x}{n}\int y\,dx;\quad y=Cx^{\frac{2-n}{1-n}}$$

9. Integrare algebricamente l'equazione

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}+\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}=0.$$

Posto $u=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ e chiamata con $\lambda(u)$ la funzione x di u, e posto inoltre $\mu(u)=\sqrt{1-\lambda(u)^2}$, $\nu(u)=\sqrt{1-k^2\lambda(u)^2}$ [$\lambda(u)$, $\mu(u)$, $\nu(u)$ sono le funzioni ellittiche di Abel e Jacobi], si trovi la formola d'addizione per la funzione $\lambda(u)$.

L'integrale algebrico è

$$x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}+y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}=C(1-k^2x^2y^2),$$

e la formola d'addizione è

$$\lambda(u+v)=\frac{\lambda(u)\mu(v)\nu(v)+\lambda(v)\mu(u)\nu(u)}{1-k^2\lambda(u)^2\lambda(v)^2}$$

10. $xdx + ydy = xdy - ydx$, $\log\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = C$.

11. $y + \sqrt{x^2+y^2} = xy'$, $x^2 = 2Cy + C^2$.

12. $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}\,dy = 0$, $x = Ce^{-\operatorname{sen}\frac{y}{x}}$.

13. $xy' - y = y(\log y - \log x)$, $y = xe^{Cx}$.

14. $xdx + ydy = mydx$,

$$\sqrt{y^2 - mxy + x^2}\left(\frac{2y - mx - x\sqrt{m^2-4}}{2y - mx + x\sqrt{m^2-4}}\right)^{\frac{m}{2\sqrt{m^2-4}}} = C \text{ se } |m| > 2,$$

$$\log\sqrt{y^2 - mxy + x^2} + \frac{m}{\sqrt{4-m^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2y - mx}{x\sqrt{4-m^2}} = C \text{ se } |m| < 2.$$

$$\log(y - x) - \frac{x}{y-x} = C \qquad \text{se } m = 2.$$

$$\log(y + x) + \frac{x}{y+x} = C \qquad \text{se } m = -2.$$

15. $(1 - x^2)\,dy + xydx = adx$, $y = ax + C\sqrt{1-x^2}$.

16. $dy + ydx = ax^n dx$,
$y = Ce^{-x} + a[x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \ldots]$
se n è intero positivo.

17. $2x(1 + x^2)y' + 2x^2y = 1$, $2y\sqrt{1+x^2} = \log\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} + C$

18. $(x+1)dy - nydx - e^x(x+1)^{n+1}dx = 0$, $y = (x+1)^n(e^x + C)$

19. $ydy - (1+y^2)dx = \sqrt{1+y^2}\cos ax\,dx$,
$\sqrt{1+y^2}\,\frac{a\operatorname{sen} ax - \cos ax}{1+a^2} + Ce^x$.

20. $y'\cos y + \operatorname{sen} y = x$, $\operatorname{sen} y = x - 1 + Ce^{-x}$.

21. $y' + \frac{ny}{\sqrt{1+x^2}} = a$,

$$y = C[\sqrt{1+x^2} - x]^n + \frac{na}{n^2-1}\sqrt{1+x^2} - \frac{ax}{n^2-1} \text{ se } n \text{ è diverso da } 1.$$

$$y = C[\sqrt{1+x^2} - x] + \frac{ax}{2} + \frac{a}{2}(\sqrt{1+x^2} - x)\log(x + \sqrt{1+x^2}) \text{ se } n = 1,$$

$$y = C[\sqrt{1+x^2} + x] + \frac{ax}{2} + \frac{a}{2}(\sqrt{1+x^2} + x)\log(x + \sqrt{1+x^2}) \text{ se } n = -1.$$

22. $xy' + y - y^2 \log x = 0, y = \dfrac{1}{1 + Cx + \log x}$.

23. $dy + y(\cos x - y^{n-1} \operatorname{sen} 2x)\, dx = 0$,

$$y^{1-n} = 2 \operatorname{sen} x + Ce^{(n-1)\operatorname{sen} x} + \frac{2}{n-1}.$$

24. $\dfrac{dy}{dx}(x^2 y^3 + xy) = 1, \dfrac{1}{x} = 2 - y^2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}}$.

25. Si riduca alle quadrature l' integrazione della equazione $(P + Qx)y' = R + Qy$, ossia $Pdy - Rdx + Q(xdy - ydx) = 0$, dove P, Q, R sono funzioni omogenee di x, y, e P, R dello stesso grado.

26. Equazione di Jacobi:

$$(a + a'x + a''y)(xdy - ydx) - (b + b'x + b''y)dy + (c + c'x + c''y)\, dx = 0,$$

cui si può dare anche la forma

$$(Ax^2 + Bxy + \alpha x + \beta y + \gamma)\, dy = (Axy + By^2 + \alpha' x + \beta' y + \gamma')\, dx.$$

Si ponga $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$ e si determinino α, β in guisa da ridurla alla forma di quella dell' esercizio precedente. Si troverà che i valori di α, β si ricavano da due delle equazioni

$$\begin{aligned} a - \lambda \quad + a'\alpha \quad + a''\beta &= 0, \\ b + (b' - \lambda)\alpha \quad + b''\beta &= 0, \\ c \quad + c'\alpha + (c'' - \lambda)\beta &= 0, \end{aligned}$$

dove λ è una qualunque delle radici della equazione di terzo grado

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & a' & a'' \\ b & b' - \lambda & b'' \\ c & c' & c'' - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Come esempio si troverà che l'integrale della equazione

$$(-2+2x+y)(xdy-ydx)-(-2+2x+y)\,dy+(-4+2x+3y)\,dx=0$$

è $$(x-1)(y-1)=C(y-2x)^2.$$

27. Ridurre alle quadrature l'integrazione delle equazioni

$$y'+Py=Px+Qy^2+1-Qx^2,\quad y'+Py=Qy^2+Pf(x)+f'(x)-Qf(x)^2$$

dove P, Q sono funzioni della sola x.

28. $(x^2+y^2+2x)\,dx+2ydy=0$, moltiplicatore $\mu=e^x$, integrale $(x^2+y^2)\,e^x=C$.

29. $y(3x^2-ay)\,dx-x(3x^2-2ay)dy=0$, $\mu=\dfrac{1}{y^4}$, $x^3+Cy^3-axy=0$.

30. Un moltiplicatore per la equazione di Bernoulli $(Py-y^nQ)\,dx+dy=0$ è $\mu=\dfrac{e^{(1-n)\int P\,dx}}{y^n}$. Si trovi tal moltiplicatore ponendo, nella (1) n. 188, $\mu_1=y^n\mu$, e determinando μ_1.

31. Un moltiplicatore della equazione

$dy+y^2dx=\left(\dfrac{dP}{dx}+P^2\right)dx$, dove P è funzione della sola x, è

$\mu=\dfrac{e^{-2\int P\,dx}}{(y-P)^2}$. Si trovi tal moltiplicatore mediante la (1) n. 188.

32. Data l'equazione $Mdx+Ndy=0$, se $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N-M}=\psi(x+y)$

è $\mu=e^{\int\psi(z)dz}$ dove $z=x+y$; se $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{Ny-Mx}=\psi(xy)$ è $\mu=e^{\int\psi(z)dz}$

dove $z=xy$. Così ad es.:

$$(x^2+x^2y+2xy-y^2-y^3)\,dx+(y^2+y^2x+2xy-x^2-x^3)\,dy=0,$$

$$\mu=\frac{1}{(x+y)^2(x+y+z)^2},\quad x+xy+y=C(x+y)(x+y+2);$$

$$(2x^3y^2-y)\,dx+(2x^2y^3-x)dy=0,\ \mu=\frac{1}{x^2y^2},\ xy(x^2+y^2)+1+C$$

33. Data $Mdx+Ndy=0$, si cerchi il moltiplicatore μ s

nendolo funzione simmetrica di x, y. Se $M_1 dx + N_1 dy = 0$ è la equazione che si ricava dalla proposta scambiando x, y tra loro, μ è pure moltiplicatore di questa equazione. Dalle due equazioni cui deve soddisfare μ si ricavano i valori di $\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x}$, $\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial y}$; chiamate α, β queste funzioni, dovrà essere $\frac{\partial\alpha}{\partial y} = \frac{\partial\beta}{\partial x}$ (altrimenti la supposizione fatta non è ammissibile ed è inutile tentare la ricerca di μ in questo modo). Potremo allora determinare μ. Così, ad es.:

$$(1 - xy)\,dx + (x^2 - y)\,dy = 0, \quad \mu = \frac{1}{x^3 + y^3 - 3xy + 1},$$

$$\log \frac{x + y + 1}{\sqrt{x^2 + y^2 - xy - x - y + 1}} + \sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2x - y - 1}{\sqrt{3}\,(1 - y)} = C.$$

34. La condizione affinchè la equazione $dy + \left(\frac{P}{y} - Q\right)dx = 0$, dove P, Q sono funzioni della sola x, ammetta un moltiplicatore $\mu = \frac{y}{[y + f(x)]^n}$ è che sia $Q = -\frac{n^2}{1-n}\frac{d}{dx}\left(\frac{P}{Q}\right)$, ed allora è $f(x) = -n\frac{P}{Q}$.

35. Data la equazione $(ax + by + c)\,dx + (a'x + b'y + c')\,dy = 0$ si determinino m, n, m', n' in modo che essa ammetta la trasformazione infinitesimale $mx + n$, $m'y + n'$. Si avrà quindi

$$\mu = \frac{1}{(ax + by + c)[(ab' - a'b)x + (bc' - b'c)] + (a'x + b'y + c')[(ab' - a'b)y + (a'c - ac)]}.$$

36. Data la equazione $ydx - xdy + ax^n y\,(x^n + b)^{\frac{1}{n}}\,dy = 0$, la si scriva così: $\frac{ydx - xdy}{(x^n + b)^{\frac{1}{n}}} + ax^n y\,dy = 0$ e si ponga $\frac{x}{(x^n + b)^{\frac{1}{n}}} = v\,y$. Si trova immediatamente il moltiplicatore della equazione trasformata in v, y, dal quale si ottiene il moltiplicatore della equazione proposta,

$$\mu = \frac{y^{n-1}}{x^{n+1} + abx^n y\,(x^n + b)^{\frac{1}{n}}}.$$

37. Il primo membro della equazione

$$\alpha y dx + \beta x dy = x^m y^n (\gamma y dx + \delta x\, dy)$$

ha un moltiplicatore della forma $\frac{\varphi(x^\alpha y^\beta)}{xy}$, il secondo uno della forma $\frac{\psi(x^\gamma y^\delta)}{x^{m+1} y^{n+1}}$, dove φ, ψ sono funzioni qualunque. Le si determinino in modo che quei moltiplicatori diventino uguali. Si ottiene così un moltiplicatore della proposta. Si trova

$$\mu = x^{\lambda\alpha-1} y^{\lambda\beta-1} = x^{\nu\gamma-m-1} y^{\nu\delta-n-1}, \text{ dove } \lambda = \frac{\gamma n - \delta m}{\alpha\delta - \beta\gamma}, \quad \nu = \frac{\alpha n - \beta m}{\alpha\delta - \beta\gamma}.$$

Equazioni differenziali di primo ordine non risolute rapporto alla derivata.

191. Studiamo alcuni tipi di tali equazioni.

Equazioni differenziali di primo ordine e di grado n. Sono quelle della forma

$$(1) \qquad P_0 \left(\frac{dy}{dx}\right)^n + P_1 \left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + \ldots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n = 0,$$

dove le P indicano funzioni univalenti di x, y.

In particolare, si dicono equazioni *algebrico - differenziali* se le P sono funzioni razionali intere di x, y.

Supponiamo di saper risolvere la proposta equazione rapporto a y', cosichè essa assuma la forma, omesso il fattore P_0,

$$(2) \qquad (y' - p_1)\,(y' - p_2) \ldots (y' - p_n) = 0,$$

dove le p sono funzioni di x, y, che potranno anche a gruppi o tutte essere uguali tra loro.

Siano

$$F_1(x, y, c_1) = 0, \quad F_2(x, y, c_2) = 0, \ldots F_n(x, y, c_n) = 0$$

gli integrali generali delle equazioni

$$(3) \qquad y' - p_1 = 0, \quad y' - p_2 = 0, \ldots y' - p_n = 0;$$

dico che

$$(4) \qquad F_1(x, y, c)\, F_2(x, y, c) \ldots F_n(x, y, c) = 0$$

è l'equazione integrale generale della (1), cioè che derivando rapporto ad x la (4) ed eliminando c tra la equazione che così si ricava e la (4), si ottiene la (2) o ciò che è lo stesso la (1), a meno di un fattore indipendente da y'.

Facciamo, per brevità, la dimostrazione nel caso di $n = 3$. Per eliminare c tra la equazione

$$F_1(x, y, c)\, F_2(x, y, c)\, F_3(x, y, c) = 0$$

e la

$$(5) \qquad \frac{dF_1}{dx} F_2 F_3 + \frac{dF_2}{dx} F_1 F_2 + \frac{dF_3}{dx} F_1 F_2 = 0,$$

dove $\frac{dF_1}{dx} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} y', \ldots$ eliminiamo c tra la $F_1(x, y, c) = 0$ e la (5), cosichè, osservando che la eliminazione di c tra $F_1(x, y, c) = 0$, $\frac{dF_1}{dx} = 0$ dà per risultato $\mu_1(y' - p_1) = 0$, dove μ_1 è funzione di x, y, ed indicando con $\psi_1 = 0$ il risultato della eliminazione di c tra $F_1 = 0$ e $F_2 F_3 = 0$, otteniamo

$$\mu_1 \psi_1 (y' - p_1) = 0.$$

Analogamente, eliminando c tra $F_2 = 0$ e la (5), tra $F_3 = 0$ e la (5), avremo equazioni della forma

$$\mu_2 \psi_2 (y' - p_2) = 0, \qquad \mu_3 \psi_3 (y' - p_3) = 0,$$

di guisa che il risultato della eliminazione di c tra la $F_1 F_2 F_3 = 0$ e la (5) sarà

$$\mu_1 \mu_2 \mu_3 \psi_1 \psi_2 \psi_3 (y' - p_1)\,(y' - p_2)\,(y' - p_3) = 0$$

cioè la (2), pel caso $n = 3$, fatta astrazione dal fattore $\mu_1 \mu_2 \mu_3 \psi_1 \psi_2 \psi_3$ che non contiene y'.

Esempi

1) Supponiamo $p_1, p_2 \dots p_n$ costanti, il che avverrà certamente se $P_0, P_1 \dots P_n$ sono costanti. Gli integrali delle (3) sono allora

$$y - p_1 x + c_1 = 0, \quad y - p_2 x + c_2 = 0 \dots y - p_n x + c_n = 0,$$

e quindi l'integrale della (2) è

$$x^n \left(\frac{y+c}{x} - p_1\right) \left(\frac{y+c}{x} - p_2\right) \dots \left(\frac{y+c}{x} - p_n\right)$$

$$= \frac{x^n}{P_0} \left[P_0 \left(\frac{y+c}{x}\right)^n + P_1 \left(\frac{y+c}{x}\right)^{n-1} + \dots + P_n \right] = 0,$$

cosichè si ottiene l'integrale generale della proposta equazione sostituendovi $\frac{y+c}{x}$ in luogo di y'.

Così l'integrale di $y'^4 + 3y'^3 + 2 = 0$ è

$$\left(\frac{y+c}{x}\right)^4 + 3\left(\frac{y+c}{x}\right)^3 + 2 = 0.$$

Ciò vale anche, come si può facilmente riconoscere, per qualunque equazione differenziale di primo ordine che non contenga esplicitamente x, y. Così l'integrale generale della equazione $e^{y'} + 3y'^2 + 1 = 0$ è $e^{\frac{y+c}{x}} + 3\left(\frac{y+c}{x}\right)^2 + 1 = 0.$

2) Si riconosce facilmente, considerando y' come incognita, che $y' = y$ è radice della equazione

$$y'^3 - (\operatorname{sen} x + \cos x + y) y'^2 + (\operatorname{sen} x \cos x + y \operatorname{sen} x + y \cos x) y' - y \operatorname{sen} x \cos x = 0$$

cosichè questa si riduce facilmente alla

$$(y' - \operatorname{sen} x)(y' - \cos x)(y' - y) = 0$$

e si ha allora subito l'integrale generale

$$(y + \cos x + c)\ (y - \operatorname{sen} x + c)\ (y - ce^x) = 0.$$

3) Le $P_0, P_1, \dots P_n$ della equazione (1) siano funzioni omo

dello stesso grado di x, y, cosichè la (1) possa ridursi alla forma

$$\varphi_0\left(\frac{y}{x}\right)y'^n + \varphi_1\left(\frac{y}{x}\right)y'^{n-1} + \ldots + \varphi_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right)y' + \varphi_n\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$

Posto $\frac{y}{x} = z$, da cui $y' = xz' + z$, e sviluppando le potenze di $xz' + z$ ed ordinando rispetto a xz', essa diviene della forma

$$\psi_0(z)x^n z'^n + \psi_1(z)x^{n-1}z'^{n-1} + \ldots + \psi_{n-1}(z)xz' + \psi_n(z) = 0,$$

ossia della forma

$$\psi_0(z_0)\{[xz' - p(z)]\,[xz' - p_2(z)]\ldots[xz' - p_n(z)]\} = 0,$$

il cui integrale generale è

$$\left[\log cx - \int\frac{dz}{p_1(z)}\right]\left[\log cx - \int\frac{dz}{p_2(z)}\right]\ldots\left[\log cx - \int\frac{dz}{p_n(z)}\right] = 0,$$

che è quello della proposta tenendo conto della posizione fatta $z = \frac{y}{x}$.

Sia ad es.: l'equazione

$$y^2y'^3 - y^2y'^2 - x^2y' + x^2 = 0.$$

Posto $z = \frac{y}{z}$ diviene

$$z^2(xz' + z)^3 - z^2(xz' + z)^2 - (xz' + z) + 1 = 0,$$

la quale, riconoscendosi subito che il primo membro ha per fattore $xz' + z - 1$, si riduce alla forma

$$(xz' + z - 1)\left(xz' + z - \frac{1}{z}\right)\left(xz' + z + \frac{1}{z}\right) = 0,$$

e si ha l'integrale generale di questa equazione

$$[x(z - 1) + c]\,[x^2(z^2 - 1) + c]\,[x^2(z^2 + 1) + c] = 0,$$

e quindi l'integrale generale della proposta

$$(y - x + c)\,(y^2 - x^2 + c)\,(y^2 + x^2 + c) = 0,$$

od anche

$$(y - x + c)\ [(y^2 + c)^2 - x^4] = 0.$$

192. *Equazioni differenziali di primo ordine risolute rapporto a una delle variabili.* Le equazioni della forma $x = \varphi(y')$ si integrano ponendo $y' = \frac{dy}{dx} = p$; allora abbiamo

$$(1) \qquad x = \varphi(p),$$

da cui $dx = \frac{dy}{p} = \varphi'(p)$ e da questa

$$(2) \qquad y = \int \varphi'(p)\, p dp + C = p\varphi(p) - \int \varphi(p)\, dp + C.$$

Eliminando p tra le (1), (2) si ottiene una relazione della forma $f(x, y, C) = 0$ che è l'integrale generale richiesto.

Se l'eliminazione di p non si può o non si vuole fare, si ritiene che le equazioni (1), (2) costituiscano l'integrale generale della proposta equazione, come quelle che esprimono x, y mediante il parametro p in guisa che i valori di x, y che corrispondono a qualunque valore di p (o a qualunque valore di p in un certo intervallo) sono tali da soddisfare alla data equazione differenziale.

Le equazioni della forma

$$x = \varphi(y, y')$$

si integrano in modo analogo; posto $y' = p$ si ha

$$(3) \qquad x = \varphi(y, p)$$

e da questa

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dy + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\, dp$$

ossia

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{p}\right) dy + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\, dp = 0.$$

Supponendo di integrare questa equazione, che è della forma $M dy + N dp = 0$, si ottiene una equazione della forma

$$(4) \qquad \psi(y, p, C) = 0.$$

Eliminando p tra le (3), (4) si ha l'integrale generale $f(x, y, C) = 0$ della proposta equazione; oppure si ritiene che le (3), (4), considerato p come un parametro variabile, costituiscano l'integrale generale.

In modo analogo si vedrebbe che le due equazioni

$$y = \varphi(p), \qquad x = \int \frac{\varphi'(p)}{p}\, dp + C$$

costituiscono l'integrale della equazione $y = \varphi(y')$; e che le

$$y = \varphi(x, p), \qquad \psi(x, p, C) = 0,$$

dove la $\psi = 0$ è l'integrale della equazione

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - p\right) dx + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\, dp = 0,$$

costituiscono l'integrale generale della equazione $y = \varphi(x, y')$.

Esempi

1) $x = e^{y'} + y'$.

Le (1), (2) diventano qui

$$x = e^p + p,\ y = p(e^p + p) - \int (e^p + p)\, dp + C_1 = p(e^p + p) - e^p - \frac{p^2}{2} + C_1.$$

Volendo tra queste eliminare p, servendoci della prima di esse la seconda diviene $y = px - (x - p) - \frac{p^2}{2} + C_1$ dalla quale $p = x + 1 \pm \sqrt{x^2 - 2y + C}$, avendo posto $C = 1 - 2C_1$. La prima diviene quindi

$$x = e^{x+1 \pm \sqrt{x^2 - 2y + C}} + x + 1 \pm \sqrt{x^2 - 2y + C},$$

ossia

$$e^{x+1 \pm \sqrt{x^2 - 2y + C}} = \mp \sqrt{x^2 - 2y + C} - 1,$$

che è l'integrale generale. Notiamo che, non volendo introdurre quantità complesse e poichè il valore d'una esponenziale è sempre allora positivo, dovremo dei due segni prendere l'inferiore.

2) $y = yy'^2 + 2y'x$. Risolvendo rispetto ad x e ponendo $y' = p$

è $x = \frac{y(1-p^2)}{2p}$, da cui, differenziando ed osservando che $dx = \frac{dy}{p}$, si ottiene $\frac{dy}{y} = -\frac{dp}{p}$, che, integrata, dà $py = C$. Eliminando p tra questa equazione e la proposta $y = p^2y + 2px$, si ottiene l' integrale generale $y^2 = C^2 + 2Cx$.

3) $y = a\sqrt{1+y'^2}$. Posto $y' = p$, è

$$y = a\sqrt{1+p^2}\ ,\ x = a\int\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} + C = a\log(p+\sqrt{1+p^2}) + C$$

Volendo eliminare p, osserviamo che l' ultima può scriversi così: $p + \sqrt{1+p^2} = e^{\frac{x-C}{a}}$, dalla quale

$$\frac{1}{p+\sqrt{1+p^2}} = -(p-\sqrt{1-p^2}) = e^{-\frac{x-C}{a}}$$

e quindi $p = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x-C}{a}} - e^{-\frac{x-C}{a}}\right)$; in conseguenza abbiamo

$$y = a\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(e^{2\frac{x-C}{a}} + e^{-2\frac{x-C}{a}} - 2\right)} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x-C}{a}} + e^{-\frac{x-C}{a}}\right).$$

4) $y = x\psi(y') + \varphi(y')$, ovvero, posto al solito $y' = p$,

$$y = x\psi(p) + \varphi(p)$$

dalla quale

$$pdx = dx\psi(p) + [x\psi'(p) + \varphi'(p)]\,dp\,,$$

ossia

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\psi'(p)}{\psi(p)-p}x = -\frac{\varphi'(p)}{\psi(p)-p},$$

che, essendo lineare in x, dà, integrata,

$$x = e^{-\int\frac{\psi'(p)dp}{\psi(p)-p}}\left[-\int\frac{\varphi'(p)}{\psi(p)-p}\,e^{\int\frac{\psi'(p)}{\psi(p)-p}dp}\,dp + C\right]$$

Eliminando p tra questa e la proposta equazione ne ottiene l' integrale generale.

Così ad es.: l'integrale generale della equazione $y = xy'^2 + y'^3$ si ottiene eliminando p tra la equazione $y = p^2x + p^3$ e la

$$x = e^{-\int \frac{2p\,dp}{p^2-p}} \left[-\int \frac{3p^2 dp}{p^2-p} e^{\int \frac{2p\,dp}{p^2-p}} + C \right] = \frac{1}{(p-1)^2} \left[-p^3 + \frac{3p^2}{2} + C \right].$$

Ponendo in questa per p^3 il suo valore $y - p^2x$, e poi risolvendola rispetto a p, si ottiene

$$p = \frac{1}{3} [-2x + \sqrt{4x^2 - 3(2C - 2x - 2y)}],$$

e l'integrale generale è $y = p^2x + p^3$, dove p ha questo valore.

193. *Equazione di* Clairaut. Nell'esempio precedente bisogna supporre $\psi(y')$ diverso da y'; se è $\psi(y') = y'$ si ha la equazione

$$y = xy' + \varphi(y'),$$

che chiamasi equazione di Clairaut, e che è meritevole di speciale considerazione.

Posto $y' = p$, abbiamo

$$(1) \qquad y = px + \varphi(p)$$

da cui

$$pdx = pdx + xdp + \varphi'(p)dp \quad \text{ossia} \quad dp[x + \varphi'(p)] = 0.$$

Possiamo soddisfare a questa equazione assumendo $dp = 0$, da cui $p = C$ e quindi si ottiene l'integrale generale

$$(2) \qquad y = Cx + \varphi(C)$$

della equazione di Clairaut.

Ma possiamo pure soddisfare alla stessa equazione assumendo

$$x + \varphi'(p) = 0,$$

ed allora eliminando p tra questa equazione e la (1) abbiamo pure un integrale, che non contiene costante arbitraria e non può neanche ottenersi dall'integrale generale (2) attribuendo alla C un particolare valore costante, poichè si vede che si ottiene dall'integrale generale eliminando C tra la (2) e la equazione $x + \varphi'(C) = 0$, cioè

assumendo nella (2) per C il valore, funzione di x, che ricaviamo dalla $x + \varphi'(C) = 0$.

Questo integrale chiamasi un *integrale singolare*, o *soluzione singolare* della proposta equazione.

Esempio. — $y = px + p^2$. L'integrale generale è $y = Cx + C^2$ e l'integrale singolare si ottiene eliminando p tra la precedente equazione e la $x + 2p = 0$, cioè è $y = -\frac{x^2}{4}$.

194. Se una equazione differenziale non appartiene ad alcuno dei tipi finora considerati si cerca allora di integrarla con speciali artifici e trasformazioni.

Se il primo membro della equazione proposta può scindersi nel prodotto di più funzioni, $f_1(x, y, y') . f_2(x, y, y') \ldots = 0$, e $\varphi_1(x, y, c_1) = 0$, $\varphi_2(x, y, c_2) = 0, \ldots$ sono gli integrali generali delle equazioni $f_1 = 0$, $f_2 = 0 \ldots$, allora $\varphi_1(x, y, c) . \varphi_2(x, y, c) \ldots = 0$ sarà l'integrale generale della proposta.

Esempi

1) L'equazione

$$(1 + x^2)y'^2 - 2xyy' + y^2 - 1 = 0$$

può scriversi così:

$$(y - xy')^2 - (1 - y'^2) = (y - xy' - \sqrt{1 - y'^2})(y - xy' + \sqrt{1 - y'^2}) = 0.$$

Gli integrali generali delle due equazioni (di Clairaut)

$$y - xy' - \sqrt{1 - y'^2} = 0 \ , \ y - xy' + \sqrt{1 - y'^2} = 0$$

essendo

$$y - C_1 x - \sqrt{1 - C_1^2} = 0 \ , \ y - C_2 x + \sqrt{1 - C_2^2} = 0,$$

ed avendo esse l'integrale singolare comune $y = \sqrt{x^2 + 1}$, la equazione proposta ha l'integrale generale

$$(y - Cx - \sqrt{1 - C^2})(y - Cx + \sqrt{1 - C^2}) = (y - Cx)^2 - (1 - C^2) = 0.$$

od anche

$$(1 + x^2)C^2 - 2xyC + y^2 - 1 = 0,$$

e l'integrale singolare $y^2 - x^2 = 1$.

2) $y' + f(x)\operatorname{sen} y + \varphi(x)\cos y + \psi(x) = 0.$

Poniamo $\operatorname{tg}\frac{1}{2}y = z$, ed allora la equazione (Vedi num. 288, vol. I.) si trasforma nella

$$z' + f(x)z + \frac{\varphi(x)}{2}(1 - z^2) + \frac{\psi(x)}{2}(1 + z^2) = 0$$

ossia nella

$$z' + \frac{\psi(x) - \varphi(x)}{2} z^2 + f(x)z + \frac{\varphi(x) + \psi(x)}{2} = 0,$$

che è una equazione di Riccati e della quale perciò si determina colle quadrature l'integrale generale, quando se ne conosca uno particolare.

Così ad es.: se $\psi(x) = -f(x)$, $z = 1$ è integrale particolare della corrispondente equazione in z, e l'integrale generale si trova essere

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}y\left[\int f(x)e^{\int\varphi(x)dx}dx + C\right] - e^{\int\varphi(x)dx} = 1.$$

3) La equazione

$$axyy'^2 + (x^2 - ay^2 - b)y' - xy = 0,$$

posto $x^2 = \xi$, $y^2 = \eta$ da cui $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{\eta}}\frac{d\eta}{d\xi}$, si trasforma nella

$$a\xi\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 + (\xi - a\eta - b)\frac{d\eta}{d\xi} - \eta = 0,$$

$$\eta\left(a\frac{d\eta}{d\xi} + 1\right) = \xi\frac{d\eta}{d\xi}\left(a\frac{d\eta}{d\xi} + 1\right) - b\frac{d\eta}{d\xi},$$

$$\eta = \xi\frac{d\eta}{d\xi} - b\frac{\frac{d\eta}{d\xi}}{a\frac{d\eta}{d\xi} + 1},$$

che è una equazione di Clairaut il cui integrale generale è $\eta = C\xi - \frac{bC}{aC + 1}$, e l'integrale singolare è $a\eta + (\sqrt{b} - \sqrt{\xi})^2 = 0$,

cosichè l' equazione proposta ha l' integrale generale

$$y^2 = Cx^2 - \frac{bC}{aC+1}$$

ed ammette ancora l' integrale singolare $ay^2 + (\sqrt{b} - x)^2 = 0$.

ESERCIZI

1. $y'^3 - (x^2 + xy + y^2)\, y'^2 + (x^3y + x^2y^2 + xy^3)\, y' - x^3y^3 = 0$, l'integrale generale è

$$\left(y - Ce^{\frac{x^2}{2}}\right)\left(y - \frac{1}{C-x}\right)\left(y - \frac{x^3}{3} - C\right) = 0.$$

2. $(a^2 - x^2)\, y'^3 + bx(a^2 - x^2)\, y'^2 - y' - bx = 0$,

$$\left(y + \frac{bx^2}{2} - C\right)\left[(y - C)^2 - \left(\text{arc sen}\,\frac{x}{a}\right)^2\right] = 0.$$

3. $x^3y'^2 + 3xyy' + 3y^2 = 0$,

$$x^3y^2 + 2Cyx^{\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \log x\right) + C^2 = 0.$$

4. $y'^3 + 1 - x = 0, \qquad 64(y + c)^3 - 27(x - 1)^4 = 0.$

5. $y = y' + \sqrt{1 + y'^2}, \qquad y^2 = 1 + Ce^{x}.$

6. $y = x(y' + \sqrt{1 + y'^2}), \qquad x^2 + y^2 = Cx.$

7. $y'^2 + ax - by = 0$,

$$b^2x - 2b\sqrt{by - ax} + C = 2a \log\left[b\sqrt{by - ax} - a\right]$$

8. $ayy'^2 + (2x - b)\, y' = y, \qquad y^2 = aC^2 + (2x - b)\, C.$

9. $xy' = y + \sqrt{1 + y'^2}$, int. generale $x = Cy + \sqrt{1 + C^2}$, int. singolare $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

10. $y\sqrt{1 + y'^2} = f(x + yy')$. Ponendo $x^2 + y^2 = 2z$, si riduce ad una equazione di CLAIRAUT: l'integrale generale è $\sqrt{(x - C)^2 + y^2} =$ ... e l' int. singolare si ottiene eliminando z' tra le equazioni

$$x - z' + \sqrt{(x - z')^2 + y^2} = f'(z') \quad \text{e} \quad \sqrt{(x - z')^2 + y^2} = f($$

11. $f(xy'-y, y')=0$, $\quad f(Cx-y, C)=0$.

12. $y-2xy'=2y'f(yy')$, int. gen. $y^2=2Cx+2Cf(C)$, l'int. sing. si ottiene eliminando z' tra $z=xz'+z'f\left(\frac{z'}{2}\right)$ e $x+f\left(\frac{z'}{2}\right)+\frac{z'}{2}f'(z')=0$.

13. $(xy'-y)(xy'-2y)+x^3=0$, int. gen. $y=Cx^2+\frac{x}{C}$, int. singolare $y=2x^{\frac{3}{2}}$. $\left(\text{Si ponga } \frac{y}{x}=z\right)$.

14. $y'^2+xy'+x^2=0$, $\quad 4(y+C)^2+2x^2(y+C)+x^4=0$.

15. $y'^3+axy'+x^3=0$; posto $y'=tx$, l'intg. generale è formato dalle due equazioni $x=-\frac{at}{1+t^3}$, $y+C=\frac{a^2}{6}\frac{1+4t^3}{(1+t^3)^2}$, considerandovi t come un parametro variabile.

16. $y'^3+y^3y'+y^4=0$; posto $y'=ty$ si trova l'integrale dato dalle due equazioni $x+C=\log\frac{1+t}{t}-\frac{3}{t}$, $y=-\frac{t^3}{1+t}$.

17. $y\sqrt{1+y'^2}=n(x+yy')$. Si risolva rispetto ad x, ed allora si troverà l'integrale generale $(x-C)^2+y^2=n^2C^2$, e, procedendo come per la equazione di Clairaut, l'integrale singolare eliminando p tra le equazioni $y\sqrt{1+p^2}=n(x+py)$, $p-n\sqrt{1+p^2}=0$.

18. $y'^3=y^4(y+xy')$, integ. generale $y=\frac{1}{Cx-C^3}$, integ. singolare $4x^3y^2-27=0$. $\left(\text{Si ponga } y=\frac{1}{z}\right)$.

19. $(1-y')^2-y'^2e^{-2x}=e^{-2y}$. Si ponga $y'=p$, si prendano i logaritmi dei due membri, si derivi rapporto ad x; si ottiene così l'int. gen. $(1-C^2)e^{2y}=(1+Ce^x)^2$, ed il singolare $e^{2x}+e^{2y}=1$.

20. $yy'(x^2+y^2+a^2)+x(x^2+y^2-a^2)=0, (x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)+C$.

21. $(y'^2-y)^2=y(y'^2+y)^2$, (si ponga $y=z^2$),

$$[(x+C)-\{2\operatorname{arcsen}\sqrt{y}+2\sqrt{1-y}\}^2][(x+C)^2-\{2\operatorname{arc\,sen}\sqrt{y}-2\sqrt{1-y}\}^2]=0.$$

22. $y'^3-\frac{3}{2}y'^2=(y-x)^2$,

$$\left[\left(\frac{x+C}{3}\right)^2+\frac{3}{2}\right]^2\left(\frac{x+C}{3}\right)^2=(y-x)^2.$$

Equazioni differenziali d'ordine superiore al primo.

195. Il tipo generale delle equazioni differenziali d'ordine n è

$$f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

Qui valgono considerazioni analoghe a quelle dei n. 175, 176. Sia una equazione finita tra x, y ed n costanti $C_1, C_2 \ldots C_n$,

$$\varphi(x, y, C_1, C_2, \ldots C_n) = 0.$$

Derivando successivamente n volte rapporto ad x, abbiamo

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} y' = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} y' + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} y'^2 + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} y'' = 0, \\[2ex] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[2ex] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right. \tag{2}$$

Eliminando tra le (2) e la $\varphi = 0$ le costanti C, otteniamo una equazione del tipo (1).

La $\varphi = 0$ dicesi allora la *equazione generale integrale* o l'*integrale generale* della (1); ed il valore di y espresso per x e per le C, che si ricava dalla $\varphi = 0$, o un ramo della funzione y definita dalla $\varphi = 0$, dicesi l'integrale generale della (1) se si possano determinare le costanti C in guisa che, per un certo valore x_0 di x (appartenente ad un certo campo o qualunque), le $y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}$ assumano valori prefissati $y_0, y'_0, y''_0, \ldots y_0^{(n-1)}$. Gli integrali particolari sono quelli che ottengonsi dall'integrale generale, attribuendovi alle costanti particolari valori.

Integrare l'equazione differenziale significa trovarne l'integrale generale.

Se tra la $\varphi = 0$ e tra le prime $n - 1$ delle equazioni (2) eliminiamo successivamente tutte le costanti, eccetto successivamente le $C_1, C_2, \ldots C_n$, otteniamo n equazioni differenziali di ordine $n - 1$

della forma

$$(3)\qquad \begin{cases} \varphi_1(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}, C_1) = 0, \\ \varphi_2(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}, C_2) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}, C_n) = 0, \end{cases}$$

ciascuna delle quali dicesi un *integrale primo* o *di primo ordine* della equazione proposta, ed il loro insieme forma il sistema degli integrali primi. La conoscenza di un integrale primo è un primo passo alla integrazione della equazione, che è così ridotta a quella di una equazione di ordine $n - 1$.

Se tutto il sistema è conosciuto, eliminando tra le (3) le $y', y'' \ldots y^{(n-1)}$ si ottiene l'integrale generale della proposta equazione.

Se tra la $\varphi = 0$ e le prime $n - 2$ delle equazioni (2) eliminiamo tutte le costanti ad eccezione delle C_r, C_s otteniamo una equazione della forma

$$\psi(x, y, y', \ldots y^{(n-2)}, C_r, C_s) = 0,$$

che dicesi un *integrale secondo* o *di secondo ordine*; di queste equazioni se ne ottengono $\frac{n(n-1)}{2}$, il cui insieme forma il sistema degli integrali secondi. E così di seguito, si ottegono gli integrali terzi, quarti etc.

Posto

$$(4)\qquad \frac{dy}{dx} = p_1, \quad \frac{dp_1}{dx} = p_2, \ldots \frac{dp_{n-2}}{dx} = p_{n-1},$$

la equazione differenziale proposta diviene

$$(5)\qquad f\left(x, y, p_1, p_2 \ldots p_{n-1}, \frac{dp_{n-1}}{dx}\right) = 0,$$

cosichè ad essa si può sostituire il sistema formato dalle equazioni di primo ordine (4), (5) tra la variabile x e le funzioni incognite $y, p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$. Si sarà perciò provata l'esistenza dell'integrale generale per la equazione proposta, se si dimostrerà che le equazioni (4), (5) ammettono un sistema di equazioni integrali, cioè n equazioni tra le $y, p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$ con n costanti arbitrarie.

La dimostrazione dell' esistenza del sistema integrale per le equazioni della forma

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y, p_1, p_2 \ldots p_{n-1}),$$

$$\frac{dp_1}{dx} = f_2(x, y, p_1, \ldots p_{n-1}), \ldots \frac{dp_{n-1}}{dx} = f_n(x, y, p_1 \ldots p_{n-1}),$$

delle quali le (4), sono casi particolari, e all' ultima delle quali si riduce la (5) risolvendola rispetto a $\frac{dp_{n-1}}{dx}$. si fa, sotto certe condizioni cui debbano soddisfare le funzioni $f_1, f_2, \ldots f_n$, in modo analogo a quello dei n. 177, 180 per le funzioni di due variabili; ma noi ommetteremo qui tale dimostrazione, riservandoci più tardi di dare quella che risulta dal metodo di integrazione per integrazioni successive.

Passeremo ora invece alla effettiva integrazione di equazioni differenziali d' ordine n appartenenti a tipi speciali.

Alcune operazioni coi simboli D e xD.

196. Premettiamo alcune proprietà dei simboli D e xD, dove $Du = \frac{du}{dx}$, $xDu = x\frac{du}{dx}$.

Con $D^2, D^3, \ldots$ intenderemo $\frac{d^2}{dx^2}, \frac{d^3}{dx^3} \ldots$ Valgono, come è noto le formole (r, n interi positivi)

$$(1) \quad \begin{cases} D(u+v) = Du + Dv, \\ (D^r + D^n)u = (D^n + D^r)u = D^n u + D^r u, \; D^n D^r u = D^r D^n u = D^{r+n} u. \end{cases}$$

Con $D^{-1} = \frac{1}{D}$ intenderemo l' operazione inversa di D cio tale che $D^{-1}(Du) = u$, cioè $D^{-1} = \int u dx + C$ o semplicemente, astraendo

dalla costante, $D^{-1}u = \int u dx$. Con D^{-2} si intende $D^{-1}(D^{-1}u)$ cioè $\int dx \int u dx = \int u dx^2, ..$

$$D^{-n}u = \frac{1}{D^n}u = \int dx \int \ldots \int u dx = \int u dx^n.$$

Le formole (1) valgono quindi anche per esponenti r, n interi positivi o negativi.

Sia

$$\psi(D) = A_0 + A_1 D + A_2 D^2 + \ldots + A_r D^r + \ldots + B_1 D^{-1} + B_2 D^{-2} + \ldots$$

una funzione del simbolo D ordinata per le potenze positive e negative di D, i coefficienti A, B essendo costanti o funzioni di x; si intende subito il significato di $\psi(D)u$, cioè

$$A_0 u + A_1 D u + A_2 D^2 u + \ldots$$

Allora ha luogo la formola

$$\psi(D)e^{ax} = \psi(a)e^{ax}. \tag{2}$$

Infatti $De^{ax} = ae^{ax}$, $D^2e^{ax} = a^2e^{ax}, \ldots$; $D^{-1}e^{ax} = D^{-1}(a^{-1}De^{ax}) = a^{-1}D^{-1}De^{ax} = a^{-1}e^{ax}$, (come risulta subito anche da

$$D^{-1}e^{ax} = \int e^{ax}dx = a^{-1}e^{ax}) \text{ e quindi } D^{-2}e^{ax} = a^{-2}e^{ax}, \ldots$$

ed in generale $D^n e^{ax} = a^n e^{ax}$, dove n è numero intero qualunque.

In conseguenza

$$\psi(D)e^{ax} = A_0 e^{ax} + A_1 a e^{ax} + A_2 a^2 e^{ax} + \ldots + B_1 a^{-1} e^{ax} + B_2 a^{-2} e^{ax} + \ldots$$

$$= e^{ax}(A_0 + A_1 a + A_2 a^2 + \ldots + B_1 a^{-1} + B^2 a^{-2} + \ldots) = \psi(a)e^{ax}.$$

Se u è funzione qualunque di x abbiamo la formula

$$\psi(D)(e^{ax}u) = e^{ax}\psi(D+a)u. \tag{3}$$

Invero $D(e^{ax}u) = e^{ax}(Du + au) = e^{ax}(D+a)u$, da cui $e^{-ax}D(e^{ax}u) = (D+a)u$, formola che trasforma il simbolo $D+a$ nel simbolo $e^{-ax}D(e^{ax})$; cosichè dalla formola precedente si ricava

$$e^{-ax}D[e^{ax}e^{-ax}D(e^{ax}u)] = e^{-ax}D^2(e^{ax}u) = (D+a)^2 u,$$

intendendo che $(D+a)^2$ indichi $(D+a)(D+a)$; e così di seguito otterremo

$$e^{-ax} D^n(e^{ax} u) = (D+a)^n u, \text{ cioè}$$

$$(4) \qquad D^n(e^{ax}u) = e^{ax}(D+a)^n u.$$

Relativamente al simbolo $(D+a)^n$, si riconosce subito che

$$(D+a)^n u = (D^n + na D^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} a^2 D^{n-2} + \ldots)u.$$

Poniamo $(D+a)^n u = u_1$, cosichè, intendendo con $(D+a)^{-n}$ l'operazione inversa di $(D+a)^{-n}$, sia $u = (D+a)^{-n} u_1$.

La formola (4) diviene

$$D^n[e^{ax}(D+a)^{-n} u_1] = e^{ax} u_1,$$

da cui

$$(5) \qquad e^{ax}(D+a)^{-n} u_1 = D^{-n}(e^{ax} u_1),$$

cioè

$$(D+a)^{-n} u_1 = e^{-ax} D^{-n}(e^{ax} u_1),$$

formola che definisce il simbolo $(D+a)^{-n}$. La (5) mostra che la (4) sussiste anche per valori interi negativi di n. Servendoci della (4) si ottiene immediatamente la (3).

Relativamente al simbolo $(D+a)^{-n}$ osserviamo che

$$(D+a)^{-1} u = \frac{1}{D+a} u = e^{-ax} D^{-1}(e^{ax} u) = e^{-ax} \int e^{ax} u dx.$$

Nell'ultimo membro integrando successivamente per parti, prendendo sempre $e^{ax} dx$ per fattore differenziale, e prescindendo dalla convergenza della serie che nasce in tal guisa, si ottiene

$$\frac{1}{D+a} u = e^{-ax} \left[\frac{e^{ax}}{a} - e^{ax} \frac{Du}{a^2} + e^{ax} \frac{D^2 u}{a^3} - \frac{e^{ax} D^3 u}{a^4} + \ldots \right]$$

$$= \frac{1}{a}\left(1 - \frac{D}{a} + \frac{D^2}{a^2} - \frac{D^3}{a^3} + \ldots\right) u,$$

che è lo sviluppo che si otterrebbe se, considerando D come una quantità e non come un simbolo, si sviluppasse $\frac{1}{D+a} = \frac{1}{a} \frac{1}{1+\ldots}$ in serie ordinata per le potenze di $\frac{D}{a}$. Non ci preoccupiamo dell

vergenza della serie perchè la formola precedente sarà esclusivamente adoperata quando u è funzione razionale intera di x, nel qual caso essa si riduce ad un polinomio.

Integrando successivamente per parti, prendendo sempre udx per fattore differenziale, si arriva, analogamente, alla formola

$$(6)\quad \frac{1}{D+a}u=\left(\frac{1}{D}-\frac{a}{D^2}+\frac{a^2}{D^3}-\frac{a^3}{D^4}+\ldots\right)u=\frac{1}{D\left(1+\frac{a}{D}\right)}u.$$

Possiamo intanto dire che operare col simbolo $\frac{1}{D+a}$ equivale ad operare col simbolo che si ottiene sviluppando $\frac{1}{D+a}$ per potenze ascendenti di D, o di $\frac{1}{D}$. Così analogamente si vedrebbe che

$$(D+a)^{-n}=\frac{1}{(D+a)^n}=\frac{1}{a^n}\left(1-\frac{D}{a}+\frac{D^2}{a^2}-\frac{D^3}{a^3}+\ldots\right)^n.$$

Sia $\psi(D)$ funzione razionale intera di D; il simbolo $\frac{1}{\psi(D)}$ deve essere definito in guisa, che operando col simbolo $\psi(D)$, di cui è noto il significato, sul risultato, ottenuto operando con $\frac{1}{\psi(D)}$ sopra una funzione u, si ottenga la funzione primitiva u. Ora sviluppiamo $\frac{1}{\psi(D)}$ in frazioni semplici, considerando D come una quantità, così che risulti una somma di termini della forma $\frac{A_m}{(D-a)^m}$,

$$\frac{1}{\psi(D)}=\Sigma\frac{A_m}{(D-a)^m},$$

ed assumiamo quest'ultima formola come definizione del simbolo $\frac{1}{\psi(D)}$. Si riconosce allora subito che $\psi(D)\frac{1}{\psi(D)}u=u$; perchè essendo $\psi(D)$ il prodotto di termini della forma $(D-a)^m$,

$$\psi(D)=A(D-a_1)^{m_1}(D-a_2)^{m_2}\ldots,$$

abbiamo

$$\psi(D)\frac{1}{\psi(D)}u=A\left(\Sigma\frac{A_m(D-a_1)^{m_1}(D-a_2)^{m_2}\ldots}{(D-a)^m}\right)u=1\,.\,u=u.$$

In luogo poi di $\frac{1}{(D-a)^m}$ nello sviluppo di $\frac{1}{\psi(D)}$ si potranno sostituire gli sviluppi in serie per potenze di D, od anche sviluppare in serie $\frac{1}{\psi(D)}$, come ad es:

$$\frac{1}{AD^2+BD+C}=\frac{1}{C}\,\frac{1}{1+\frac{AD^2+BD}{C}}$$

$$=\frac{1}{C}\left\{1-\frac{AD^2+BD}{C}+\left(\frac{AD^2+BD}{C}\right)^2-\dots\right\},$$

$$\frac{1}{AD^2+BD}=\frac{1}{BD}\left(1-\frac{AD}{B}+\left(\frac{AD}{B}\right)^2-\dots\right)$$

$$=\frac{1}{B}\left(\frac{1}{D}-\frac{A}{B}+\frac{A^2D}{B^2}\dots\right).$$

Le formole (2), (3) ora dimostrate valgono quindi se in esse $\psi(D)$ è funzione razionale qualunque di D.

Se nella (3) poniamo $e^{ax}u=v$, abbiamo

$$\psi(D)v=e^{ax}\psi(D+a)(e^{-ax}v).$$

197. La formola di Leibniz è

$$(1)\quad D^n(uv)=uD^nv+nDuD^{n-1}v+\frac{n(n-1)}{2}D^2uD^{n-2}v+\dots$$

Questa formola vale anche se n è intero negativo. Invero, con successive integrazioni per parti, abbiamo

$$D^{-1}(uv)=uD^{-1}v-D^{-1}(DuD^{-1}v)=uD^{-1}v-DuD^{-2}v+D^{-1}(D^2uD^{-2}$$

$$=uD^{-1}v-DuD^{-2}v+D^2uD^{-3}v-D^{-1}(D^3uD^{-3}v)=\dots$$

$$=uD^{-1}v-DuD^{-2}v+D^2uD^{-3}v-D^3uD^{-4}v+D^4uD^{-5}v-\dots$$

cosichè, per provare la formola in generale, basterà, ammessala vera per $n=-m$, dimostrarla per $n=-(m+1)$, la qual cosa si può far facilmente, come il lettore potrà, senz'altro, verificare.

In seguito a ciò osservando la forma del secondo membro della (1), se $\psi(D)$ indica funzione di D ordinata per potenze positive e

egative di D avremo la formola seguente, che è la generalizzazione i quella di *Leibniz*,

$$(D)(uv) = u\psi(D)v + Du\psi'(D)v + \frac{D^2u}{2!}\psi''(D)v + \frac{D^3u}{3!}\psi'''(D)v + \dots,$$

ove $\psi'(D)$, $\psi''(D)$,.... indicano le derivate di $\psi(D)$ rapporto a D.

Questa formola vale anche, se, come del resto si suppose, i coefcienti di D in $\psi(D)$ contengono la variabile x e se $\psi(D)$ è funzione ızionale qualunque di D.

198. Consideriamo ora il simbolo d'operazione xD. Con $(xD)^n$ ıtenderemo $(xD)(xD)\dots(xD)$, non già $x^n D^n$. Per definire il simbolo $(xD)^{-1}$, poniamo $(xD)u = v$, da cui $u = (xD)^{-1}v$; ma $Du = \frac{v}{x}$, $= D^{-1}\frac{v}{x} = \int \frac{v}{x}dx$, cosichè $(xD)^{-1}v = D^{-1}\frac{v}{x} = \int \frac{dx}{x}$ e quindi $(xD)^{-n}v = \int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\dots\int\frac{dx}{x}v$.

Posto $x = e^t$, abbiamo

$$xDu = x\frac{du}{dx} = e^t\frac{du}{e^t dt} = \frac{du}{dt} = D_t u,$$

ıichè il simbolo xD si trasforma in questo modo in D_t.

Se ψ indica la solita funzione, abbiamo le formole

$$\psi(xD)x^a = \psi(a)x^a,\ \psi(xD)(x^a u) = x^a\psi(xD + a)u.$$

Invero, posto $x = e^t$, dalle (2), (3) N. 196 ricaviamo

$$\psi(D_t)e^{at} = \psi(a)e^{at},\ \psi(D_t)(e^{at}u) = e^{at}\psi(D_t + a)u,$$

ıe si trasformano nelle precedenti, sostituendo per D_t il suo vare xD e x per e^t.

Tra il simbolo xD e il simbolo D passa la relazione (n intero ısitivo)

$$x^n D^n = xD(xD - 1)(xD - 2)\dots(xD - n + 1),$$

Infatti è

$$xDu = xDu,\ xD(xD - 1)u = xD(xDu - u) = x^2 D^2 u,$$

cosichè la formola vale per $n = 1, 2$. Ammettiamola vera per $n = m$ e dimostriamola per $n = m + 1$: nella

$$x^m D^m u = xD(xD - 1) \ldots (xD - m + 1)u,$$

poniamo $u = (xD - m)v$ cosichè

$$D^m u = D^m(xD - m)v = xD^{m+1} v,$$

ed otterremo appunto

$$x^{m+1} D^{m+1} v = xD(xD - 1) \ldots (xD - m + 1)(xD - m)v.$$

Equazioni differenziali lineari d'ordine n.

199. Sono quelle della forma

$$(1) \qquad a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots a_{n-1} y' + a_n y = X,$$

dove le $a_0, a_1 \ldots a_n, X$ sono funzioni della sola x, che potranno anche in parte o tutte essere delle costanti. La integrazione della (1), che dicesi *completa*, si riduce, come vedremo in seguito, a quella delle equazioni della forma

$$(2) \qquad a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

che diconsi *omogenee* o *senza secondo membro*, delle quali ora ci occuperemo.

Posto $\varphi(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n$, la (2) può scriversi

$$(2) \qquad \varphi(D) y = 0.$$

Siano $y_1, y_2 \ldots y_m$ integrali particolari di questa equazione cioè tali che $\varphi(D) y_r = 0$. Avremo

$$\varphi(D)(C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_m y_m) = C_1 \varphi(D) y_1 + C_2 \varphi(D) y_2 + \ldots + C_m \varphi(D) y_m$$

dove le C sono costanti, cosichè $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_m y_m$ è integrale della (2).

Supposto si conoscano n integrali particolari $y_1, y_2, \ldots y_n$ la

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \quad (1)$$

à integrale della (2), e sarà ancora l'integrale generale qualora si ssano determinare le costanti C in modo che per $x = x_0$ la y e $y', y'', y^{(n-1)}$ acquistino valori prefissati; la qual cosa, ponendo mente a (3) ed alle

$$y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + \ldots + C_n y'_n,$$

$$y'' = C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + \ldots + C_n y''_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n y_n^{(n-1)},$$

ie da quella si ricavano, si vede aver luogo, se il determinante, che chiama il *Wronskiano* del sistema delle $y_1, y_2 \ldots y_n$, dal nome del atematico *Wronski*,

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots y_n \\ y'_1 & y'_2 & \ldots y'_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

er $x = x_0$ sia diverso da zero; il che succederà quando Δ non riilti nullo identicamente, escludendo il caso speciale che x_0 sia raice della equazione in x, $\Delta = 0$.

Se dunque Δ è diverso da zero, la (3) è l'integrale generale, ed llora si dice che $y_1, y_2 \ldots y_n$ costituiscono un *sistema fondamentale* i integrali particolari o un *sistema di integrali particolari distinti.*

200. *Se della equazione* $\varphi(D)y = 0$ *si conoscono* m *integrali particolari, la sua integrazione è ridotta alle quadrature ed a quella di una equazione differenziale d'ordine* n — m (nel nostro caso pure lineare); cioè, come suol dirsi, l'ordine della equazione si può abbassare di m unità.

Sia, infatti, y_1 un integrale particolare, cosichè $\varphi(D) y_1 = 0$.

Posto $y = y_1 u$ abbiamo, per la formola di Leibniz generalizzata,

$$\varphi(D)(y_1 u) = u\varphi(D)y_1 + Du\varphi'(D)y_1 + D^2 u \frac{\varphi''(D)y_1}{2!} + \dots$$

$$= Du\varphi'(D)y_1 + D^2 u \frac{\varphi''(D)y_1}{2} + \dots + D^n u \frac{\varphi^{(n)}(D)y_1}{n!} = 0,$$

che è pure lineare in u, ma non contiene esplicitamente u.

Ponendo $Du = v$ essa diviene la equazione lineare di ordine $n - 1$ in v,

$$v\varphi'(D)y_1 + Dv \frac{\varphi''(D)}{2} y_1 + D^2 v \frac{\varphi'''(D)}{3!} y_1 + \dots + D^{n-1} v \frac{\varphi^{(n)}(D)}{n!} y_1.$$

Indichiamo con v il suo integrale generale; allora $u = \int v dx + C_1$ è l'integrale generale della equazione in u, e

$$(1) \qquad y = C_1 y_1 + y_1 \int v dx$$

è l'integrale generale della proposta equazione in y; cosichè il teorema è dimostrato per $m = 1$.

Se della equazione in y si conoscono due integrali particolari y_1, y_2, allora, poichè se y è integrale della proposta è $\frac{y}{y_1}$ integrale della equazione in u, sarà $\frac{y_2}{y_1}$ integrale particolare di questa equazione (è escluso il caso in cui, per essere $c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$, sia $y_2 = c y_1$), e quindi $D \frac{y_2}{y_1}$ è integrale particolare della equazione di ordine $n - 1$ in v. La integrazione di questa, procedendo come ora abbiamo visto, si riduce a quella di una equazione di ordine $n - 2$ in una variabile w, della quale equazione indicato con w l'integrale generale, sarà, per la (1),

$$v = C_2 D \frac{y_2}{y_1} + D \frac{y_2}{y_1} \int w dx$$

l'integrale generale della equazione in v, e quindi

$$u = C_1 + C_2 \frac{y_2}{y_1} + \int D \frac{y_2}{y_1} dx \int w dx = C_1 + C_2 \frac{y_2}{y_1} + \frac{y_2}{y_1} \int w dx - \int \frac{y_2}{y_1}$$

e perciò

$$(2) \qquad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_2 \int w\,dx - y_1 \int \frac{y_2}{y_1} w\,dx;$$

il teorema è così dimostrato per $m = 2$.

Se si conoscono tre integrali particolari y_1, y_2, y_3 della equazione proposta, saranno $D\frac{y_2}{y_1}$, $D\frac{y_3}{y_1}$ integrali particolari della equazione in v, il cui integrale generale sarà in virtù della (2)

$$v = C_2 D\frac{y_2}{y_1} + C_3 D\frac{y_3}{y_1} \quad D\frac{y_3}{y_1}\int z\,dx - D\frac{y_2}{y_1}\int \frac{D\frac{y_3}{y_1}}{D\frac{y_2}{y_1}} z\,dx,$$

indicando con z l'integrale generale della equazione d'ordine $n-2$ cui si riduce la integrazione della equazione in v. In conseguenza

$$u = C_1 + C_2\frac{y_2}{y_1} + C_3\frac{y_3}{y_1} + \int D\frac{y_3}{y_1}\,dx \int z\,dx - \int D\frac{y_2}{y_1}\,dx \int \frac{D\frac{y_3}{y_1}}{D\frac{y_2}{y_1}} z\,dx$$

e quindi

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + y_3 \int z\,dx - y_2 \int \frac{D\frac{y_3}{y_1}}{D\frac{y_2}{y_1}} z\,dx + y_1 \int \left(\frac{y_2}{y_1}\frac{D\frac{y_3}{y_1}}{D\frac{y_2}{y_1}} - \frac{y_3}{y_1} \right) z\,dx$$

che dimostra il teorema per $m = 3$. E così di seguito.

Ad esempio, se della equazione lineare di 2° ordine

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad \text{ossia} \qquad \varphi(D) y = (a_0 D^2 + a_1 D + a_2) y = 0$$

conosciamo un integrale particolare y_1, osservando che

$$\varphi'(D) = 2a_0 D + a_1, \qquad \varphi''(D) = 2a_0,$$

l'equazione in v risulta la

$$v(2a_0 D + a_1) y_1 + D v a_0 y_1 = 0 \quad \text{ossia} \quad \frac{Dv}{v} = -2\frac{Dy_1}{y_1} - \frac{a_1}{a_0},$$

da cui $v = C_2 \dfrac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{y_1^2}$, e quindi $y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \displaystyle\int \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{y_1^2} dx.$

Così pure se della equazione lineare omogenea di 3° ordine

$$\varphi(D)y = (a_0D^3 + a_1D^2 + a_2D + a_3)y = 0$$

si conoscono due integrali particolari y_1, y_2, si trova facilmente l'integrale generale

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_2\int\frac{y_1\, e^{-\int\frac{a_1}{a_0}dx}\, dx}{(y_1y'_2 - y_2y'_1)^2} - C_3y_1\int\frac{y_2\, e^{-\int\frac{a_1}{a_0}dx}\, dx}{(y_1y'_2 - y_2y'_1)^2}.$$

201. Come abbiamo accennato precedentemente, si trova mediante sole quadrature l'integrale generale della equazione completa $\varphi(D)y = X$, quando si conosca quello della $\varphi(D)y = 0$. Invero, se y_0 indica un integrale particolare della equazione completa cosicchè sia $\varphi(D)y_0 = X$ e y è l'integrale generale della corrispondente equazione omogenea, $y + y_0$ è l'integrale generale della proposta equazione, giacchè

$$\varphi(D)(y + y_0) = \varphi(D)y + \varphi(D)y_0 = X.$$

L'integrale y si chiama anche la *funzione complementare* nell'integrale generale della equazione completa.

Ora per trovare questo integrale particolare procediamo col seguente metodo, conosciuto col nome di *metodo della variazione delle costanti arbitrarie*, e dovuto a Lagrange.

Sia

$$(1) \qquad y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$$

la funzione complementare. Vediamo se sia possibile assumere per le C funzioni di x tali che y sia integrale della $\varphi(D)y = X$.

Derivando la (1), nell'ipotesi che le C siano funzioni, abbiamo

$$y' = C_1y'_1 + C_2y'_2 + \ldots + C_ny'_n$$
$$+ C'_1y_1 + C'_2y_2 + \ldots + C'_ny_n,$$

intendendo con C' la derivata di C rapporto ad x. Supponiamo le C tali che sia

$$(2) \qquad C'_1y_1 + C'_2y_2 + \ldots + C'_ny_n = 0,$$

cosichè allora risulterà

$$y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + \ldots + C_n y'_n.$$

Derivando e supponendo le C tali che

$$C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + \ldots + C'_n y'_n = 0, \tag{3}$$

avremo

$$y'' = C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + \ldots + C_n y''_n.$$

Così proseguendo fino ad avere $n-1$ equazioni come le (2), (3) tra le $C'_1, C'_2, \ldots C_n$, si ottengono le seguenti equazioni

$$(4) \quad \begin{cases} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + \ldots + C'_n y_n = 0, \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + \ldots + C'_n y'_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C'_1 y_1^{(n-2)} + C'_2 y_2^{(n-2)} + \ldots + C'_n y_n^{(n-2)} = 0, \end{cases}$$

e successivamente

$$\begin{aligned} y' &= C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + \ldots + C_n y'_n, \\ y'' &= C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + \ldots + C_n y''_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)} &= C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}, \\ y^{(n)} &= C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \ldots + C_n y_n^{(n)}, \\ &\quad + C'_1 y_1^{(n-1)} + C'_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + C'_n y_n^{(n-1)}; \end{aligned}$$

cosichè, come si riconosce subito sostituendo il valore di y dato dalla (1) e questi valori delle sue derivate nel primo membro della $f(D)y = X$, la (1) ne sarà integrale, se determineremo $n-1$ delle C' in guisa che soddisfacciano alle (4) e la restante di esse in modo che sia

$$a_0(C'_1 y_1^{(n-1)} + C'_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + C'_n y_n^{(n-1)}) = X, \tag{5}$$

ossia se per le C' prenderemo le radici delle equazioni (4), (5).

Risolvendole abbiamo

$$C'_r = \frac{X}{a_0}\frac{\Delta_r}{\Delta}, \ (r = 1, 2, \ldots n),$$

dove Δ_r indica il complemento algebrico di $y_r^{(n-1)}$ nel Wronskiano Δ del sistema delle $y_1, y_2, \ldots y_n$.

In conseguenza è

$$C_r = \int \frac{X}{a_0}\frac{\Delta_r}{\Delta}dx + c_r, \ (r = 1, 2, \ldots n),$$

dove le c_r indicano delle costanti, e

$$y = \sum_{r=1}^{r=n} y_1\left(c_r + \int \frac{X}{a_0}\frac{\Delta_r}{\Delta}dx\right)$$

è l'integrale generale della $\varphi(D)y = X$, e $\sum_{r=1}^{r=n} y_1 \int \frac{X}{a_0}\frac{\Delta_r}{\Delta}dx$ ne è il richiesto integrale particolare ottenuto con semplici quadrature.

Così ad es.: se conosciamo l'integrale generale, ossia due integrali particolari distinti y_1, y_2, della equazione di secondo ordine

$$\varphi(D)y = a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0,$$

l'integrale generale della $\varphi(D)y = X$ sarà

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 - y_1 \int \frac{X y_2 dx}{a_0(y_1 y'_2 - y_2 y'_1)} + y_2 \int \frac{X y_1 dx}{a_0(y_1 y'_2 - y_2 y'_1)}.$$

Se della $\varphi(D)y = 0$ si conosce un solo integrale particolare y_1, se ne ha subito un altro $y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0}dx}}{y_1^2}dx$, come si è visto alla fine del n. 200. In conseguenza

$$y'_2 = y'_1 \int \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0}dx}}{y_1^2}dx + \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0}dx}}{y_1},$$

$\Delta = y_1 y'_2 - y_2 y'_1 = e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}$, e l'integrale generale è

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_1 \int \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{y_1^2} dx - y_1 \int \frac{e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{a_0} X y_1 dx \int \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{y_1^2} dx$$

$$+ y_1 \left[\int \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{y_1^2} dx \right] \left[\int \frac{e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{a_0} X y_1 dx \right]$$

ossia, integrando per parti l'integrale nel terzo termine del secondo membro,

$$y = c_1 y_1 + y_1 \int \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{y_1^2} \left[\int \frac{e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{a_0} X y_1 dx + c_2 \right] dx.$$

Equazioni differenziali lineari d'ordine n a coefficienti costanti o a coefficienti funzioni speciali di x.

202. Sia la equazione

$$\varphi(D) y = (a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n) y = 0,$$

dove i coefficienti a_r sono tutti costanti. Per integrarla, vediamo se si possa determinare la costante a e la funzione v di x in guisa che $y = e^{ax} v$ risulti integrale particolare. Ora per la formola di Leibniz generalizzata e per la (2) del n. 196, abbiamo

$$\varphi(D)(e^{ax} v) = v\varphi(D) e^{ax} + Dv\varphi'(D) e^{ax} + D^2 v \frac{\varphi''(D)}{2} e^{ax} + \ldots + D^n v \frac{\varphi^{(n)}(D)}{n!} e^{ax}$$

(1)

$$= e^{ax} \left[v\varphi(a) + Dv\varphi'(a) + D^2 v \frac{\varphi''(a)}{2} + \ldots + D^n v \frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!} \right],$$

cosichè, se α è una radice semplice della equazione di grado n,

$\varphi(a) = 0$, o, se si vuole, dalla equazione $\varphi(D) = 0$, dove D si intenda essere una incognita e non un simbolo, equazione detta *equazione caratteristica* della equazione lineare $\varphi(D)y = 0$, allora risulterà $\varphi(D)(e^{\alpha x} v) = 0$ prendendo per v tale funzione che sia $Dv = 0$, cioè prendendo per v una costante C; quindi $Ce^{\alpha x}$ è un integrale particolare. Se α è radice doppia della $\varphi(D) = 0$, cosichè allora $\varphi(\alpha) = 0$, $\varphi'(\alpha) = 0$, in virtù della (1) risulterà $\varphi(D)(e^{\alpha x} v) = 0$ se prenderemo v tale che $D^2 v = 0$, cioè $\frac{d^2 v}{dx^2} = 0$, da cui $\frac{dv}{dx} = C_1$, $v = C_1 x + C_2$, ed allora $e^{\alpha x}(C_1 x + C_2)$ è integrale particolare, contenente due costanti arbitrarie; e così di seguito si vedrebbe che se α è radice r^{upla} della equazione caratteristica, nasce da essa l'integrale particolare

$$e^{\alpha x}(C_1 x^{r-1} + C_2 x^{r-2} + \ldots + C_{r-1} x + C_r)$$

con r costanti arbitrarie.

Indicando con $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m$ le radici della equazione caratteristica, con $r_1, r_2 \ldots r_m$ i loro gradi di moltiplicità, l'integrale generale è perciò

$$y = \sum_{s=1}^{s=m} e^{\alpha_s x}[C_{1_s} x^{r_s - 1} + C_{2_s} x^{r_s - 2} + \ldots + C_{r_s}].$$

Questa formola vale, di qualunque natura siano le radici α della equazione caratteristica. Ma se i coefficienti della $\varphi(D)y = 0$ sono reali, possiamo evitare gli immaginari che in essa compariscono se vi sono delle radici α complesse, nel modo seguente. Sia $\alpha_1 = \alpha + i\beta$ radice semplice complessa, cosichè vi sia anche la sua coniugata $\alpha_2 = \alpha - i\beta$. La parte di integrale $C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}$, che proviene da queste due radici, si riduce a

$$e^{\alpha x}(C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}) = e^{\alpha x}[C_1(\cos\beta x + i \operatorname{sen}\beta x) + C_2(\cos\beta x - i \operatorname{sen}\beta x)]$$

$$= e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \operatorname{sen}\beta x),$$

(avendo posto $C_1 + C_2 = c_1$, $i(C_1 - C_2) = c_2$ da cui $C_1 = \frac{c_1 + ic_2}{2}$, $C_2 = \frac{c_1 - ic_2}{2}$), che è priva di immaginari e dove c_1, c_2 sono costanti arbitrarie qualunque. Alla espressione precedente si può anche

dare la forma

$$A_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x + A_2)\,, \text{ o la forma } B_1 e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x + B_2),$$

dove tra le costanti c_1, c_2, A_1, A_2 e B_1, B_2 passano le relazioni

$$c_1 = A_1 \cos A_2\,,\ c_2 = -A_1 \operatorname{sen} A_2\ ;\ c_1 = B_1 \operatorname{sen} B_2\,,\ c_2 = B_1 \cos B_2\,,$$

cosichè le A_1, A_2 oppure le B_1, B_2 sono costanti arbitrarie.

In modo completamente analogo si troverebbe che, se α_1, α_2 sono radici doppie complesse coniugate, la parte di integrale che proviene da esse può ridursi alla forma

$$e^{\alpha x}[(c_1 x + c_2)\cos\beta x + (c_3 x + c_4)\operatorname{sen}\beta x]$$

o alla forma

$$e^{\alpha x}[c_1 x \cos\beta x + c_2) + c_3 \cos(\beta x + c_4)] \text{ etc.}$$

E così di seguito se α_1, α_2 sono radici triple etc.

Esempi

1) $y'' - n^2 y = 0$ ossia $(D^2 - n^2)y = 0$.

Equazione caratteristica $D^2 - n^2 = 0$, quindi $y = C_1 e^{nx} + C_2 e^{-nx}$ è l'integrale generale.

2) $y'' - 2my' + (m^2 + n^2)y = 0$ ossia $(D^2 - 2mD + m^2 + n^2)y = 0$.

Equaz. caratt. $D^2 - 2mD + m^2 + n^2 = 0$ le cui radici sono $m \pm in$; quindi $y = e^{mx}(C_1 \cos nx + C_2 \operatorname{sen} nx)$ od anche $y = C_1 e^{mx} \cos(nx + C_2)$ od anche $y = C_1 e^{mx} \operatorname{sen}(nx + C_2)$ è l'integrale generale.

In particolare, se $m = 0$, si ha l'integrale $y = C_1 \cos nx + C_2 \operatorname{sen} nx$ della equazione $y'' + n^2 y = 0$.

3) $(D^3 - 4D^2 + 5D - 2)y = 0$.

Equaz. caratt. $D^3 - 4D^2 + 5D - 2 = (D-1)^2(D-2)$, quindi $y = e^x(C_1 x + C_2) + C_3 e^{2x}$ è l'integrale generale.

4) $(D^3 - D - 6)y = 0$; le radici della equazione caratt. sono $2, -1 + i\sqrt{2}, -1 - i\sqrt{2}$, quindi

$$y = C_1 e^{2x} + e^{-x}[C_2 \cos(x\sqrt{2}) + C_3 \operatorname{sen}(x\sqrt{2})]$$

è l'integrale generale.

5) $(D^4 + 2D^2 + 1)y = 0$; la equaz. caratt. ha le radici doppie

i, $-i$, cosichè l'integrale generale è

$$y = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\operatorname{sen} x,$$

od anche

$$y = C_1 \cos(x + C_2) + C_3 x \cos(x + C_4).$$

6) Potrà avvenire che, essendo i coefficienti della equazione lineare funzioni di x, la equazione caratteristica ammetta una radice α costante r^{pla}. Allora, come si riconosce facilmente, $e^{\alpha x}(C_1 + C_2 x + \ldots + C_r x^{r-1})$ è integrale della proposta equazione. Così, sia la equazione

$$y''' - (3x + 2)y'' + (6x + 1)y' - 3xy = 0.$$

La equaz. caratteristica

$$D^3 - (3x + 2)D^2 + (6x + 1)D - 3x = 0$$

ha l'unità per radice doppia; quindi la equaz. proposta ha l'integrale particolare $e^x(C_1 + C_2 x)$. Si potrebbe poi calcolare l'integrale generale colla formola alla fine del n. 200

203. Sia ora la equazione completa $\varphi(D)y = X$, dove i coefficienti di D in $\varphi(D)$ sono costanti e X è funzione di x o costante. Conosciuto l'integrale generale della equazione $\varphi(D)y = 0$, sappiamo, colle formole del n. 201, trovare l'integrale generale della equazione completa. Ma per forme speciali di X giova invece cercare di calcolare un integrale particolare della equazione $\varphi(D)y = X$, operando sopra X col simbolo $\frac{1}{\varphi(D)}$, cioè determinando y colla formola $y = \frac{1}{\varphi(D)} X$. Queste forme speciali di X sono le seguenti.

I. Sia X funzione razionale intera di x. Si sviluppi $\frac{1}{\varphi(D)}$ secondo le potenze intere di D, trascurando, fino da principio, le potenze D^{k+1}, D^{k+2}, ... di D, se X è di grado k, giacchè allora $D^{k+1}X = 0$, $D^{k+2}X = 0, \ldots$ Se in $\varphi(D)$ la più piccola potenza di D è la r^{esima}, si raccolga D^r nel denominatore, $\frac{1}{\varphi(D)} = \frac{1}{D^r} \frac{1}{\psi(}$ e nello sviluppo di $\frac{1}{\psi(D)}$ si trascurino le potenze $D^{k+1}, \ldots$

ESEMPI

1) $(D^2 - n^2)y = m$; $y = \frac{1}{D^2 - n^2} m = \frac{1}{-n^2} m$, e l'integrale generale è $y = -\frac{m}{n^2} + C_1 \cos nx + C_2 \operatorname{sen} nx$.

2) $(D^2 - 2D + 1)y = x^2$; $y = \frac{1}{(1-D)^2} x^2 = (1 + D + D^2)^2 x^2$

$$= (1 + 2D + 3D^2)x^2 = x^2 + 4x + 6,$$

e l'integrale generale è

$$y = x^2 + 4x + 6 + (C_1 x + C_2)e^x.$$

3) $(D^4 - 2D^3 + D^2)y = x^3$;

$$y = \frac{1}{D^2(1-D)^2} x^3 = \frac{1}{D^2}(1 + D + D^2 + D^3)^2 x^3 = \frac{1}{D^2}(1 + 2D + 3D^2 + 4D^3)x^3$$

$$= \left(\frac{1}{D^2} + \frac{2}{D} + 3 + 4D\right) x^3 = \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{2} + 3x^3 + 12x^2,$$

e l'integrale generale è

$$y = C_1 x + C_2 + e^x(C_3 x + C_4) + \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{2} + 3x^3 + 12x^2.$$

4) $(D^4 - 2D^3 + 2D^2 - 2D + 1)y = 1 + x + x^2$;

$$y = \frac{1}{1 - 2D + 2D^2}(1 + x + x^2) = (1 + 2D + 2D^2)(1 + x + x^2) = 7 + 5x + x^2$$

e l'integrale generale è

$$y = e^x(C_1 x + C_2) + C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x + x^2 + 5x + 7.$$

II. Sia X un aggregato di termini della forma $e^{ax} V$; allora abbiamo

$$\varphi(D)y = \Sigma e^{ax} V, \quad y = \Sigma \frac{1}{\varphi(D)} e^{ax} V = \Sigma e^{ax} \frac{1}{\varphi(D + a)} V.$$

In particolare se V è una costante C, e a è radice r^{pla} della equazione caratteristica $\varphi(D) = 0$ ($r = 1$ radice semplice, $r = 0$ non

Se $a = n$,

$$y = \mathrm{R}\left[e^{inx}\frac{1}{\mathrm{D}^2 + 2in\mathrm{D}}\right] = \mathrm{R}\left[e^{inx}\frac{1}{2in\mathrm{D}}\right] = \mathrm{R}\left[\frac{e^{inx}x}{2in}\right] = \frac{x \operatorname{sen} nx}{2n}$$

2) $(\mathrm{D}^4 + 2\mathrm{D}^2 + 1)y = x^2 \cos ax$.

$$y = \mathrm{R}\left\{e^{iax}\frac{1}{[(\mathrm{D}+ia)^2+1]^2}x^2\right\} = \mathrm{R}\left\{e^{iax}\frac{1}{(1-a^2+2ia\mathrm{D}+\mathrm{D}^2)^2}x^2\right\}$$

$$= \mathrm{R}\left\{\frac{e^{iax}}{(1-a^2)^2}\left(1-\frac{2ia\mathrm{D}+\mathrm{D}^2}{1-a^2}-\frac{4a^2\mathrm{D}^2}{(1-a^2)^2}\right)^2 x^2\right\} = \mathrm{R}\left\{\frac{e^{iax}}{(1-a^2)^2}\left(1-\frac{4ia\mathrm{D}}{1-a^2}-\frac{(10a^2+2)\mathrm{D}^2}{(1-a^2)^2}\right)x^2\right\}$$

$$= \mathrm{R}\left\{\frac{e^{iax}}{(1-a^2)^2}\left(x^2-\frac{8iax}{1-a^2}-\frac{4(5a^2+1)}{(1-a^2)^2}\right)\right\} = \frac{\cos ax}{(1-a^2)^2}\left[x^2-\frac{4(5a^2+1)}{(1-a^2)^2}\right] + \frac{8ax \operatorname{sen} x}{(1-a^2)^3};$$

la funzione complementare è $(\mathrm{C}_1 x + \mathrm{C}_2)\cos x + (\mathrm{C}_3 x + \mathrm{C}_4)\operatorname{sen} x$.

Se $a^2 = 1$, poniamo sia $a = 1$, è

$$y = \mathrm{R}\left\{e^{ix}\frac{1}{(2i\mathrm{D}+\mathrm{D}^2)^2}x^2\right\} = \mathrm{R}\left\{e^{ix}\frac{1}{-4\mathrm{D}^2}\left(1-\frac{\mathrm{D}}{2i}-\frac{\mathrm{D}^2}{4}\right)^2 x^2\right\}$$

$$= \mathrm{R}\left\{-\frac{e^{ix}}{4}\frac{1}{\mathrm{D}^2}\left(1+i\mathrm{D}-\frac{3}{4}\mathrm{D}^2\right)x^2\right\} = \mathrm{R}\left\{-\frac{e^{ix}}{4}\left(\frac{1}{\mathrm{D}^2}+\frac{i}{\mathrm{D}}-\frac{3}{4}\right)x^2\right\}$$

$$= \mathrm{R}\left\{-\frac{e^{ix}}{4}\left(\frac{x^4}{12}+\frac{ix^3}{3}-\frac{3}{4}x^2\right)\right\} = -\frac{1}{4}\left[\left(\frac{x^4}{12}-\frac{3}{4}x^2\right)\cos x - \frac{x^3}{3}\operatorname{sen} x\right].$$

3) $(\mathrm{D}^2 + 4)y = x \operatorname{sen}^2 x$; osservando che $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ abbiamo

$$y = \frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{D}^2+4}x - \frac{1}{2}\mathrm{R}\left\{e^{2ix}\frac{1}{(\mathrm{D}+2i)^2+4}x\right\} = \frac{x}{8} - \frac{1}{2}\mathrm{R}\left\{e^{2ix}\frac{1}{4i\mathrm{D}}\frac{1}{1+\frac{\mathrm{D}}{4i}}x\right\}$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{1}{2}\mathrm{R}\left\{\frac{e^{2ix}}{4i}\left(\frac{1}{\mathrm{D}}-\frac{1}{4i}\right)x\right\} = \frac{x}{8} - \frac{x}{32}\cos 2x - \frac{x^2}{16}\operatorname{sen} 2x$$

int. gen. $y = \mathrm{C}_1 \cos 2x + \mathrm{C}_2 \operatorname{sen} 2x + \frac{x}{8} - \frac{x}{32}\cos 2x - \frac{x^2}{16}\operatorname{sen} 2x$

4) $(D^2-1)y = xe^x \operatorname{sen} 2x$,

$$=I\left\{e^{2ix}\frac{1}{(D+2i)^2-1}(xe^x)\right\}=I\left\{e^x e^{2ix}\frac{1}{(D+2i+1)^2-1}x\right\}=I\left\{\frac{e^x e^{2ix}}{2(2i-2)}\frac{1}{1+\frac{2i+1}{2i-2}}x\right\}$$

$$I\left\{\frac{e^x e^{2ix}}{2(2i-2)}\left(x-\frac{2i+1}{2i-2}\right)\right\}=-\frac{e^x}{8}\left[(x-1)\operatorname{sen} 2x+\left(x+\frac{1}{2}\right)\cos 2x\right];$$

int. gen. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - \frac{e^x}{8}\left[(x-1)\operatorname{sen} 2x+\left(x+\frac{1}{2}\right)\cos 2x\right]$.

IV. Il caso generale in cui X sia funzione qualunque di x si può pure trattare con questo metodo. Sia $\varphi(D)y = X$, da cui $y = \frac{1}{\varphi(D)}X$. Sviluppando $\frac{1}{\varphi(D)}$ in frazioni semplici abbiamo

$$=\frac{1}{\varphi(D)}X=\Sigma\frac{A_m}{(D-a)^m}X=\Sigma A_m e^{ax}\frac{1}{D^m}e^{-ax}X=\Sigma A_m e^{ax}\int\int\ldots\int e^{-ax}X\,dx^m.$$

ESEMPI.

1) $y^{(n)} = f(x)$; integrale particolare

$$y=\frac{1}{D^n}f(x)=\int dx\int\ldots\int f(x)dx=\int f(x)dx^n;$$

e la funzione complementare è

$$C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\ldots+C_{n-1}x+C_n.$$

2) $(D^2+3D+2)y=\frac{x}{(1+x)^2}$; $y=e^{-x}\int\frac{e^x x\,dx}{(1+x)^2}-e^{-2x}\int\frac{e^{2x}x\,dx}{(1+x)^2}$,

$\frac{e^x x\,dx}{(1+x)^2}=\frac{e^x}{1+x}$ (es. 18, pag. 459 vol. I), $\int\frac{e^{2x}x\,dx}{(1+x)^2}=\int\frac{e^{2x}dx}{1+x}-\int\frac{e^{2x}dx}{(1+x)^2}$,

e, dopo aver integrato per parti l'ultimo integrale,

$$\int\frac{e^{2x}x\,dx}{(1+x)^2}=\frac{e^{2x}}{1+x}-\int\frac{e^{2x}dx}{1+x},$$

cosichè

$$y = e^{-2x}\int\frac{e^{2x}dx}{1+x};$$

l' integrale generale è

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + e^{-2x}\int\frac{e^{2x}dx}{1+x}.$$

3) $(D^2-1)y = x\log x;\ y = \frac{1}{2}\frac{1}{D-1}x\log x - \frac{1}{2}\frac{1}{D+1}x\log x.$

e, adoperando la formola di Leibniz,

$$y = \frac{1}{2}x\frac{1}{D-1}\log x - \frac{1}{2}\frac{1}{(D-1)^2}\log x - \frac{1}{2}x\frac{1}{D+1}\log x + \frac{1}{2}\frac{1}{(D+1)^2}\log x$$

$$= \frac{xe^x}{2}\int e^{-x}\log x dx - \frac{e^x}{2}\int dx\int e^{-x}\log x dx$$

$$-\frac{xe^{-x}}{2}\int e^x\log x dx + \frac{e^{-x}}{2}\int dx\int e^x\log x dx;$$

la funzione complementare è $C_1e^x + C_2e^{-x}$.

4) $(D^2-2)y = 4x^2e^{x^2};\ y = \sqrt{2}\left(\frac{1}{D-\sqrt{2}} - \frac{1}{D+\sqrt{2}}\right)x^2e^{x^2}$

$$= \sqrt{2}\left\{e^{x\sqrt{2}}\int x^2e^{x^2-x\sqrt{2}}dx - e^{-x\sqrt{2}}\int x^2e^{x^2+x\sqrt{2}}dx\right\}.$$

Per calcolare il primo integrale poniamo $x = u + \frac{1}{\sqrt{2}}$, cosichè esso diventa $e^{-\frac{1}{2}}\int\left(u^2 + \frac{1}{2} + u\sqrt{2}\right)e^{u^2}du$, e poichè $\int u^2du - u\frac{e^{u^2}}{2} = \frac{1}{2}\int e^{u^2}du$, si riduce a

$$e^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{ue^{u^2}}{2} + \sqrt{2}\int ue^{u^2}du\right] = \frac{e^{-\frac{1}{2}}e^{u^2}}{2}(u+\sqrt{2}) = \frac{e^{-\frac{1}{2}+\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}{2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)$$

posto $x = v - \frac{1}{\sqrt{2}}$, si trova analogamente, pel valore del secondo

tegrale, $\frac{e^{-\frac{1}{2}+\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}{2}\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right)$, e perciò

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{e^{x\sqrt{2}-\frac{1}{2}+\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)\right.$$

$$\left.-e^{-x\sqrt{2}-\frac{1}{2}+\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right)\right\}=e^{x^2}.$$

l' integrale generale è

$$y=C_1e^{x\sqrt{2}}+C_2e^{-x\sqrt{2}}+e^{x^2}.$$

204. Anche le equazioni lineari della forma

$$a_0x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}xy'+a_ny=X,$$

ove le $a_0, a_1 \ldots a_n$ sono costanti, si integrano con metodo analogo quello per le equazioni a coefficienti costanti.

Per integrare la equazione

$$a_0x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}xy'+a_ny=0,$$

ndicando con ϑ il simbolo d'operazione $x\frac{d}{dx}=x\mathrm{D}$, trasformiamola ıediante la relazione (n. 198)

$$x^m\mathrm{D}^m=\vartheta(\vartheta-1)(\vartheta-2)\ldots(\vartheta-m+1),$$

osichè essa diventerà

$$\{a_0\vartheta(\vartheta-1)\ldots(\vartheta-n+1)+a_1\vartheta(\vartheta-1)\ldots(\vartheta-n+2)+\ldots+a_{n-1}\vartheta+a_n\}y$$
$$=\varphi(\vartheta)y=0.$$

Vediamo di determinare la costante α e la funzione v di x in ıodo che $y=x^\alpha v$ riesca integrale della equazione proposta. Osserando che

$$\varphi(\vartheta)(x^\alpha v)=x^\alpha\varphi(\vartheta+\alpha)v=x^\alpha\left\{\varphi(\alpha)+\varphi'(\alpha)\vartheta+\frac{\varphi''(\alpha)}{2}\vartheta^2+\ldots\right\}v,$$

: α è radice semplice della equazione $\varphi(\vartheta)=0$, che chiameremo, eguendo il Fuchs, *equazione determinante*, basterà prendere v uguale

ad una costante C, perchè $y = Cx^{\alpha}$ risulti integrale della proposta equazione; se α è radice doppia della equazione determinante, prenderemo v in modo che sia $\vartheta^2 v = 0$, $\vartheta^3 v = 0 \ldots$, cosichè, osservando che $\vartheta \log x = 1$ e quindi $\vartheta^2 \log x = 0 \ldots$, prenderemo $v = C_1 \log x + C_2$ ed allora $y = x^{\alpha}(C_1 \log x + C_2)$ è integrale particolare con due costanti arbitrarie; e così se α è radice tripla della equazione determinante, si riconosce che $y = x^{\alpha}[C_1(\log x)^2 + C_2 \log x + C_3]$ è integrale con tre costanti arbitrarie, e così di seguito. Cosichè se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ sono le radici della equazione determinante, $r_1, r_2, \ldots r_m$ i loro gradi di moltiplicità, l' integrale generale della equazione proposta è

$$y = \sum_{s=1}^{s=m} x^{\alpha_s}[C_{1s}(\log x)^{r_s - 1} + C_{2s}(\log x)^{r_s - 2} + \ldots + C_{r_s s}].$$

Se, essendo $a_0, a_1, \ldots$ reali, α_1, α_2 sono radici complesse coniugate semplici, $\alpha_1 = \alpha + i\beta$, $\alpha_2 = \alpha - i\beta$, della eqnazione determinante la parte di integrale generale che da esse proviene

$$C_1 x^{\alpha + i\beta} + C_2 x^{\alpha - i\beta} = x^{\alpha}[C_1 x^{i\beta} + C_2 x^{-i\beta}] = x^{\alpha}[C_1 e^{i\beta \log x} + C_2 e^{-i\beta \log x}]$$

si riduce, come immediatamente si riconosce, alla forma

$$x^{\alpha}[c_1 \cos(\beta \log x) + c_2 \operatorname{sen}(\beta \log x)];$$

e così, analogamente, se α_1, α_2 sono radici doppie complesse coniugate, la parte di integrale,

$$x^{\alpha + i\beta}(C_1 + C_2 \log x) + x^{\alpha - i\beta}(C_3 + C_4 \log x),$$

che da esse proviene, si riduce alla forma

$$x^{\alpha}\{(c_1 + c_2 \log x)\cos(\beta \log x) + (c_3 + c_4 \log x)\operatorname{sen}(\beta \log x)\}.$$

e così di seguito.

Determinata così la funzione complementare della equazione $\varphi(\vartheta) y = X$, per averne un integrale particolare nel caso che X sia una funzione razionale intera di $\log x$, o della forma $x^m X$, si opera analogamente a quanto abbiamo visto, nel n. 203, col simbolo $\frac{1}{\varphi(\vartheta)}$ sopra X.

Le equazioni della forma

$$a'_0(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = X$$

si riducono alle precedenti col porre $ax + b = z$.

Notiamo ancora che le equazioni che abbiamo studiate ora si riducono a quelle a coefficienti costanti ponendo $x = e^z$.

Esempi

1) $x^2y'' + xy' - y = \log x$, $\varphi(\vartheta) = \vartheta(\vartheta - 1) + \vartheta - 1 = \vartheta^2 - 1$, $y = \frac{1}{\vartheta^2 - 1} \log x$, e siccome possiamo subito trascurare le potenze seconde di ϑ perchè $\vartheta^{n+1}(\log x)^n = 0$, abbiamo $y = -\log x$; le radici della equazione determinante essendo ± 1, la funzione complementare è $C_1x + C_2x^{-1}$, e quindi l'integrale generale è

$$y = C_1x + \frac{C_2}{x} - \log x.$$

2) $x^2y'' - xy' + 2y = x \log x$, $\varphi(\vartheta) = \vartheta^2 - 2\vartheta + 2$,

$$= \frac{1}{\vartheta^2 - 2\vartheta + 2} x \log x = x \frac{1}{(\vartheta + 1)^2 - 2(\vartheta + 1) + 2} \log x = x \frac{1}{\vartheta^2 + 1} \log x = x \log x,$$

e l'integrale generale è

$$y = x[C_1 \cos(\log x) + C_2 \operatorname{sen}(\log x)] + x \log x.$$

3) $x^4y^{IV} + 6x^3y''' + 9x^2y'' + 2xy' + y = (1 + \log x)^2$, $\varphi(\vartheta) = (\vartheta^2 + 1)^2$,

$$= \frac{1}{(\vartheta^2 + 1)^2}(1 + \log x)^2 = (1 - \vartheta^2)^2(1 + \log x)^2 = (1 - 2\vartheta^2)(1 + \log x)^2 = (1 + \log x)^2 - 4;$$

int. gen.

$$y = (C_1 + C_2 \log x) \cos(\log x) + (C_2 + C_3 \log x) \operatorname{sen}(\log x) + (1 + \log x)^2 - 4.$$

4) $x^2y'' - 2y = x + \cos x$, $\varphi(\vartheta) = \vartheta^2 - \vartheta - 2$,

$$y = \frac{1}{\vartheta^2 - \vartheta - 2}(x + \cos x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{\vartheta^2 - \vartheta - 2} \cos x = -\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\vartheta - 2} - \frac{1}{\vartheta - 1}\right) \cos x$$

$$= -\frac{x}{2} + \frac{1}{3} x^2 \frac{1}{\vartheta} x^{-2} \cos x - \frac{1}{3} x^{-1} \frac{1}{\vartheta} x \cos x$$

$$= -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} \int \frac{\cos x dx}{x^3} - \frac{1}{3x} \int \cos x dx,$$

e, poichè

$$\int\frac{\cos x}{x^3}dx=-\frac{\cos x}{2x^2}-\frac{1}{2}\int\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}dx=-\frac{\cos x}{2x^2}+\frac{\operatorname{sen} x}{2x}-\frac{1}{2}\int\frac{\cos x dx}{x},$$

sarà

$$y=-\frac{x}{2}-\frac{\operatorname{sen} x}{3x}-\frac{\cos x}{6}+\frac{x\operatorname{sen} x}{6}-\frac{x^2}{6}\int\frac{\cos x dx}{x};$$

la funzione complementare è $C_1x^2+\frac{C_2}{x}$.

Esercizi

1. $y'''-7y'+6y=x^2$,

int. gen. $y=C_1e^x+e^{3x}(C_2e^{x\sqrt{15}}+C_3e^{-x\sqrt{15}})+\frac{x^2}{6}+\frac{7}{18}$.

2. $y^{IV}-y=e^x$, $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\operatorname{sen} x+\frac{1}{4}xe^x$.

3. $y^V-2y^{IV}+5y'''-10y''-36y'+72y=e^{mx}$,

$$y=\frac{e^{mx}}{(m-2)^2(m+2)(m^2+9)}+e^{2x}(C_1+C_2x)+C_3e^{-2x}+C_4\cos 3x+C_5\operatorname{sen} 3x;$$

se $m=-2$ l'integrale particolare è $\frac{xe^{-2x}}{52}$, se $m=2$ è $\frac{x^2e^{2x}}{104}$.

4. $y^{IV}+5y''-14y=\operatorname{sen}(ax)$,

$$y=C_1e^{x\sqrt{2}}+C_2e^{-x\sqrt{2}}+C_3\cos(x\sqrt{7})+C_4\operatorname{sen}(x\sqrt{7})+\frac{\operatorname{sen} ax}{a^4-5a^2-14};$$

se $a=\pm\sqrt{7}$ l'int. particolare è $\pm\frac{x\cos(x\sqrt{7})}{18\sqrt{7}}$.

5. $y''-9y'+20y=x^2$, $y=\frac{x^2}{20}+\frac{9x}{200}+\frac{61}{4000}+C_1e^{4x}+C_2e^{5x}$.

6. $(D-a)^ny=e^{ax}$, $y=e^{ax}\left(C_1+C_2x+\ldots+C_nx^{n-1}+\frac{x^n}{1\,2\ldots n}\right)$.

7. Sia la equazione $\varphi(D)y=e^{a_1x}+e^{a_2x}+\ldots+e^{a_nx}$, dove $a_1, a_2\ldots a_n$ sono le radici di $\varphi(D)=0$. L'integrale generale è

le radici a sono tutte diverse,

$$y = C_1 e^{a_1 x} + \ldots + C_n e^{a_n x} + x \left\{ \frac{e^{a_1 x}}{\varphi'(a_1)} + \frac{e^{a_2 x}}{\varphi'(a_2)} + \ldots + \frac{e^{a_n x}}{\varphi'(a_n)} \right\};$$

se $a_1 = a_2$, è

$$y = e^{a_1 x}(C_1 + C_2 x) + \ldots + x \left\{ \frac{x e^{a_1 x}}{\varphi''(a_1)} + \frac{e^{a_3 x}}{\varphi'(a_3)} + \ldots + \frac{e^{a_n x}}{\varphi'(a_n)} \right\}$$

e così di seguito.

8. $(D^4 - 1)^2 y = x^4 e^x$,

$$= e^x(C_1 + C_2 x) + e^{-x}(C_3 + C_4 x) + (C_5 + C_6 x)\cos x + (C_7 + C_8)\operatorname{sen} x$$

$$+ \frac{e^x}{16} \left\{ \frac{x^6}{30} - \frac{3x^5}{5} + \frac{19x^4}{4} - 20x^3 + \frac{171x^2}{4} \right\}.$$

9. $(D^4 + n^4) y = \operatorname{sen}(\lambda x) + \rho^{\mu x} + x^5$,

$$y = \frac{x^5}{n^4} - \frac{120x}{n^8} + \frac{\rho^{\mu x}}{(\mu \log \rho)^4 + n^4} + \frac{\operatorname{sen}(\lambda x)}{n^4 + \lambda^4}$$

$$+ (C_1 e^{\frac{nx}{\sqrt{2}}} + C_2 e^{-\frac{nx}{\sqrt{2}}}) \cos \frac{nx}{\sqrt{2}} + (C_3 e^{\frac{nx}{\sqrt{2}}} + C_4 e^{-\frac{nx}{\sqrt{2}}}) \operatorname{sen} \frac{nx}{\sqrt{2}}.$$

10. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1 + e^x}$,

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + e^{-x}(1 + e^{-x}) \log(1 + e^x).$$

11. $x^3 y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = 3x + x^3$,

$$y = x(C_1 \log x + C_2) + C_3 x^2 + \frac{x^3}{4} - \frac{3}{2} x (\log x)^2.$$

12. $x^2 y'' - (2m - 1) xy' + (m^2 + n^2) y = n^2 x^m \log x$,

$$y = x^m [C_1 \cos(n \log x) + C_2 \operatorname{sen}(n \log x)] + x^m \log x.$$

13. $(1 + x)^3 y''' + (1 + x)^2 y'' + 3(1 + x) y' - 8y = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x}}$,

$$y = C_1 (1 + x)^2 + C_2 \cos[2 \log(1 + x)] + C_3 \operatorname{sen}[2 \log(1 + x)]$$

$$- \frac{8}{51} \sqrt{1 + x} + \frac{8}{85} \frac{1}{\sqrt{1 + x}}.$$

14. $x^2(\log x - 1)y'' - xy' + y = 0$, $y = C_1 x + C_2 \log x$.

15. $(1+x^3)x^2y'' + (1+2x^3)xy' - (4+2x^3)y = 0$; si determini un integrale particolare della forma x^m; l'integrale generale è

$$y = \frac{C_1}{x^2} + \frac{C_2}{x^2}\left\{3x(1+x^3)^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2}\log\frac{x^2 + x(1+x^3)^{\frac{1}{3}} + (1+x^3)^{\frac{2}{3}}}{[(1+x^3)^{\frac{1}{3}} - x]^2}\right.$$

$$\left. + \sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2(1+x^3)^{\frac{1}{3}} + x}{x\sqrt{3}}\right\}.$$

16. $y'' + 2(X+a)y' + \left(\frac{dX}{dx} + X^2 + 2aX + b\right)y = 0$, dove X è funzione della sola x;

$$y = e^{-\int(X+a)dx}(C_1 e^{x\sqrt{a^2-b}} + C_2 e^{-x\sqrt{a^2-b}}) \text{ se } a^2 - b > 0 \text{ etc.}$$

(Si ponga $y = ve^{-\int(X+a)dx}$).

17. $xy'' + \frac{1}{2}y' - y = 0$, $y = C_1 e^{2\sqrt{x}} + C_2 e^{-2\sqrt{x}}$. (Si faccia un cambiamento di variabile molto semplice).

18. $x^2y'' - (1+ax)y' + ay = bx^2$, $y = C_1 e^{ax} + C_2(1+ax) - \frac{b}{a}x^2$ (La equaz. caratt. relativa alla equazione senza secondo membro ha la radice a).

19. $y'' + (a+2bx)y' + 2abxy = 0$, $y = e^{-ax}\{C_1 + C_2\int e^{ax-bx^2}dx\}$.

20. Se y_1 è integrale particolare della equazione

$$y'' + Py' + Qy = 0,$$

$y_1 e^{\int P dx}$ sarà integrale particolare della equazione

$$y'' - Py' + \left(Q - \frac{dP}{dx}\right)y = 0.$$

21. $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$, $y = \frac{1}{x}(C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x)$ (la equazione ammette l'int. par. $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$).

22. $y'' - \frac{2}{x}y' + \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) = 0,\ y = x(C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x).$

23. $y''' + P(x^2y'' - 2xy' + 2y) = 0$; si determinino due integrali particolari, e si calcoli poi l'integrale generale

$$y = C_1x + C_2x^2 + C_3x\int\frac{e^{-\int Px^2dx}\,dx}{x^2} - C_3x^2\int\frac{e^{-\int Px^2dx}\,dx}{x^3}.$$

24. $(x^2+2)y''' - 2xy'' + (x^2+2)y' - 2xy = x^2+2,$

$$y = \left(C_1 + 2\int\frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^2+2}\,dx\right)\operatorname{sen} x + \left(C_2 + 2\int\frac{\cos x + x\operatorname{sen} x}{x^2+2}\,dx\right)\cos x$$
$$+ x^2\left[C_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right].$$

Integrazione di alcune equazioni differenziali d'ordine superiore al primo.

205. *Equazioni della forma* $\frac{d^ny}{dx^n} = f(x)$. Sono già state integrate (Vedi pag. 525) col metodo delle equazioni lineari; ma si possono integrare direttamente. Si osservi che la equazione essendo $d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = f(x)\,dx$, si ha un integrale primo

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int f(x)\,dx + c'_1,$$

e da questo analogamente

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int dx\int f(x)\,dx + c'x + c_2,$$

il quale dà, allo stesso modo,

$$\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = \int dx\int dx\int f(x)\,dx + c_1x^2 + c_2x + c_3,$$

e così di seguito finchè si ottiene l'integrale generale

$$y = \int dx \int dx \ldots \int f(x)\, dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n .$$

L'integrale multiplo si può ridurre ad integrali semplici. Invero, integrando per parti, è

$$\int dx \int f(x)\, dx = x \int f(x)\, dx - \int x f(x)\, dx ,$$

ed analogamente, da questa,

$$\int dx \int dx \int f(x)\, dx = 2\left[x^2 \int f(x)\, dx - 2x \int x f(x)\, dx + \int x^2 f(x)\, dx\right]$$

e poi

$$\int dx \int dx \int dx \int f(x) dx = 2.3\left[x^3 \int f(x) dx - 3x^2 \int x f(x) dx + 3x \int x^2 f(x) dx - \int x^3 f(x) dx\right],$$

ed in generale, se sono n le integrazioni successive nel primo membro,

$$\int dx \int dx \ldots \int f(x)\, dx = 2.3 \ldots (n-1)\left[x^{n-1} \int f(x) dx - \binom{n-1}{1} x^{n-2} \int x f(x)\, dx\right.$$
$$\left. + \binom{n-1}{2} x^{n-3} \int x^2 f(x)\, dx - \ldots + (-1)^{n-1} \int x^{n-1} f(x)\, dx\right].$$

206. *Equazioni della forma* $\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$. Se $n = 2$, cioè se si ha la equazione $\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right)$, si pone $\frac{dy}{dx} = p$, ed allora $\frac{dp}{dx} = f(p)$, da cui

$$(1) \qquad x = \int \frac{dp}{f(p)} + C_1 ;$$

inoltre dalla $dy = p dx = \frac{p dp}{f(p)}$ si ricava

$$(2) \qquad y = \int \frac{p dp}{f(p)} + C_2 .$$

Le (1), (2) costituiscono l'integrale generale della equazione proposta, ed eliminando p tra esse si ottiene l'integrale stesso sotto la forma $\varphi(x, y, C_1, C_2) = 0$.

Trovata la (1), se da essa si può ricavare p espresso per x, $p = \psi(x, C_1)$, si può terminare l'integrazione osservando che quest'ultima equazione ci dà

$$y = \int \psi(x, C_1)\, dx + C_2,$$

che è il richiesto integrale.

Nel caso generale si pone $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = p$, ed allora la equazione proposta diviene $\frac{dp}{dx} = f(p)$ dalla quale si ha la (1). Se da questa si può ricavare p espresso per x, $p = \psi(x, C_1)$, si avrà, per compiere la integrazione, da integrare l'equazione lineare $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \psi(x, C_1)$.

Se dalla (1) non si può ricavare p espresso per x, si osservi che essendo $dx = \frac{dp}{f(p)}$, dalla $y^{(n-1)} = p$ ricaviamo

$$y^{(n-1)}\, dx = dy^{(n-2)} = p\, \frac{dp}{f(p)},$$

dalla quale

$$y^{(n-2)} = \int p\, \frac{dp}{f(p)} + C_2,$$

ed, in modo analogo, da questa,

$$y^{(n-3)} = \int \frac{dp}{f(p)} \int p\, \frac{dp}{f(p)} + C_2 x + C_3$$

e così di seguito, finchè si ottiene

$$(3)\quad y = \int \frac{dp}{f(p)} \int \frac{dp}{f(p)} \cdots \int p\, \frac{dp}{f(p)} + C_2 x^{n-2} + C_3 x^{n-3} + \ldots + C_{n-2} x + C_n$$

e le (1), (3) costituiscono l'integrale generale, che, eliminando p tra esse, assume la forma $\psi(x, y, C_1, C_2 \ldots C_n) = 0$.

Esempio. — $y''y''' = \sqrt{b^2 + y''^2}$.

Posto $y''=p$, è $f(p)=\frac{\sqrt{b^2+p^2}}{p}$ e la (1) ci dà

$x=\sqrt{b^2+p^2}+C_1$, dalla quale $p=y''=\sqrt{(x-C_1)^2-b^2}$, equazione lineare, il cui integrale è

$$y=C_2x+C_3+\int dx\int dx\sqrt{(x-C_1)^2+b^2};$$

posto $x-C_1=z$ è

$$\int dx\int dx\sqrt{(x-C_1)^2-b^2}=\int dz\int dz\sqrt{z^2-b^2}$$

$$=\int\frac{dz}{2}\left\{z\sqrt{z^2-b^2}-b^2\log(z+\sqrt{z^2-b^2})\right\}$$

$$=\frac{1}{6}(z^2-b^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{b}{2}\int dz\log(z+\sqrt{z^2-b^2})$$

$$=\frac{1}{6}(z^2-b^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{b^2}{2}\left[2\log(z+\sqrt{z^2-b^2})-\int\frac{zdz}{\sqrt{z^2-b^2}}\right]$$

$$=\frac{z^2-2b^2}{6}\sqrt{z^2-b^2}-\frac{b^2}{2}z\log(z+\sqrt{z^2-b^2}),$$

e l'integrale generale è

$$y=\frac{1}{6}[(x-C_1)^2-2b^2]\sqrt{(x-C_1)^2-b^2}$$

$$-\frac{b^2}{2}(x-C_1)\log[x-C_1+\sqrt{(x-C_1)^2-b^2}]+C_2x+C_3.$$

207. *Equazioni della forma* $\frac{d^ny}{dx^n}=f\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)$. Se $n=2$, abbiamo $\frac{d^2y}{dx^2}=f(y)$, che possiamo scrivere così

$$2\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx}dx=2f(y)dy \quad \text{ossia} \quad d\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=2f(y)dy,$$

da cui $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\int f(y)dy + C_1$, dalla quale

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2\int f(y)dy + C_1},$$

e da questa

$$(1) \qquad x = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + C_1}} + C_2,$$

che è l'integrale generale della proposta equazione.

Nel caso generale, posto $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = p$, l'equazione proposta diviene $\frac{d^2p}{dx^2} = f(p)$, che, in virtù della (1), dà

$$(2) \qquad x = \int \frac{dp}{\sqrt{2\int f(p)dp + C_1}} + C_2.$$

Se da questa si potrà ottenere $p = \psi(x, C_1, C_2)$, rimarrà da integrare la equazione differenziale lineare $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \psi(x, C_1, C_2)$. Se non può ottenersi questo valore di p, procedendo in modo analogo a quello del n. precedente ed osservando che

$$dx = \frac{dp}{\sqrt{2\int f(p)\,dp + C_1}} = \frac{dp}{\varphi(p)}.$$

si arriva alla formola

$$y = \int \frac{dp}{\varphi\, p)} \int \ldots \int \frac{pdp}{\varphi(p)} + C_3x^{n-3} + C_4x^{n-4} + \ldots C_{n-1}x + C_n.$$

Esempio. $y''' = \frac{1}{y'^3}$. Posto $y' = p$, la (2) diviene

$$x = \frac{1}{C_1}\sqrt{C_1p^2 - 1} + C_2,$$

da cui

$$p = y' = \frac{1}{\sqrt{C_1}} \sqrt{(C_1 x + C_2)^2 + 1},$$

avendo scritto C_2 in luogo di $-C_1 C_2$, la quale integrata dà

$$y = \frac{1}{2C_1\sqrt{C_1}} \{(C_1 x + C_2)\sqrt{(C_1 x + C_2)^2 + 1} + \log[C_1 x + C_2 + \sqrt{(C_1 x + C_2)^2 + 1}]\} + C_3$$

208. *Equazioni della forma* $f(x, y^{(m)}, y^{(m+1)}, \ldots y^{(n)}) = 0$. L'ordine di queste equazioni si abbassa di m unità ponendo $y^{(m)} = p$, giacchè esse si riducono così alla forma

$$f(x, p, p', \ldots p^{(n-m)}) = 0.$$

Se da questa si può ricavare p, $p = \varphi(x, C_1, C_2 \ldots C_{n-m})$, la integrazione della equazione lineare $y^{(n)} = p = \varphi(x, C_1, C_2 \ldots C_{n-m})$ ci darà l'integrale generale della proposta.

Esempio. — Posto $y'' = p$, la $y'' = xy''' + f(y''')$ diviene $p = xp' + f(p')$, che è una equazione di Clairaut, il cui integrale generale è $p = C_1 x + f(C_1)$; in conseguenza $y'' = C_1 x + f(C_1)$, da cui successivamente,

$$y' = C_1 \frac{x^2}{2} + f(C_1)x + C_2, \quad y = C_1 \frac{x^3}{6} + f(C_1)\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

che è l'integrale generale della equazione proposta.

La equazione di Clairaut ammette anche l'integrale singolare ottenuto eliminando p' tra la $p = xp' + f(p')$ e la $x + f'(p') = 0$, che, posto $p = y''$, può considerarsi come un integrale *primo singolare* della equazione proposta, da cui poi si ricaverà un integrale, con due costanti arbitrarie, della equazione proposta. Così, ad es.: l'integrale generale della equazione $y'' = xy''' + y'''^2$ è $y = C_1 \frac{x^3}{6} + C_1^2 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$, e l'integrale primo singolare è $y'' = -\frac{x^2}{4}$, da cui si ottiene l'integrale della proposta, con due costanti, $y = -\frac{x^4}{48} + C_1 x + C_2$

209. *Equazioni della forma* $f(y, y', y'' \ldots y^{(n)}) = 0$. L'ordine di queste equazioni, non contenenti esplicitamente la variabile indipen-

dente x, si abbassa di una unità ponendo $y' = \frac{dy}{dx} = p$ e prendendo y come variabile indipendente.

Infatti, osservando che dalla posizione precedente risulta $\frac{d}{dx} = p\frac{d}{dy}$, avremo

$$y'' = p\frac{dp}{dy},\ y''' = p\left\{p\frac{d^2p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right\},$$

$$y^{IV} = p\left\{p^2\frac{d^3p}{dy^3} + 3(p+1)\frac{dp}{dy}\frac{d^2p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy}\right)^3\right\},\ldots$$

dalle quali si vede che y'' è espresso per $\frac{dp}{dy}$, y''' è espresso mediante la derivata prima e seconda di p rapporto ad y, e così via; cosichè la nostra equazione assumerà la forma $\varphi\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \ldots \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0$, che è di ordine $n-1$.

Esempio. — Della equazione $5\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - 3\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^4y}{dx^4} = 0$ si abbassa l'ordine di due unità, perchè non contiene y e y', ponendo $\frac{d^2y}{dx^2} = z$; essa diviene allora $5\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 - 3z\frac{d^2z}{dx^2} = 0$, il cui ordine, non contenendo essa x esplicitamente, si abbassa di una unità ponendo $\frac{dz}{dx} = p$ e prendendo z per variabile indipendente. In virtù della prima delle (1) essa diviene $5p^2 - 3zp\frac{dp}{dz} = 0$, dalla quale, separando le variabili e integrando, si ottiene $z^5 = C'_1 p^3$, $p = \frac{1}{C_1} z^{\frac{5}{3}}$ ed in conseguenza $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{C_1} z^{\frac{5}{3}}$ da cui $x + C_2 = \frac{C_1}{z^{\frac{2}{3}}}$ (avendo ora scritto C_1 in luogo di $-\frac{3}{2}C_1$), e, da questa, $z = \frac{C_1}{(x+C_2)^{\frac{3}{2}}}$, (dove C_1 è in luogo di $C_1^{\frac{3}{2}}$); ed in ul-

timo dalla $y'' = \zeta = \dfrac{C_1}{(x+C_2)^{\frac{3}{2}}}$ ricaviamo $y = C_1\sqrt{x+C_2} + C_3x + C_4$.

(dove per $-4C_1$ abbiamo scritto C_1), e questo è l'integrale generale, che può anche ridursi alla forma

$$(y - C_3x - C_4)^2 = C_1x + C_2,$$

ponendo C_1 in luogo di C_1^2 e C_2 in luogo di C_1C_2.

210. *Equazioni differenziali omogenee.* Attribuiamo alla variabile indipendente x la dimensione *uno*, alla y la dimensione n, alla y' la dimensione $n-1$, alla y'' la dimensione $n-2$, e così di seguito. Se tutti i termini d'una equazione differenziale risultano allora di una stessa dimensione k, diremo che la equazione è omogenea di grado k e di *indice* n. Per riconoscere se una equazione è omogenea si cercherà se vi è un numero n che possa rendere tutti i suoi termini dello stesso grado di omogeneità. Così ad es.: sia la equazione

$$x^4y'' - x^3y' - x^2y'^2 + 4y^2 = 0.$$

In seguito alla convenzione fatta, il primo ed il secondo termine sono di grado $n+2$, il terzo e quarto di grado $2n$, cosichè, se si determina n tale che $n+2 = 2n$, cioè se si prende $n = 2$, si vede che la nostra equazione è omogenea di grado 4 e di indice 2. Così si riconosce che la equazione $x^3y''' + x^4yy'y'' = y$ è omogenea di indice $-\dfrac{1}{2}$.

L'ordine delle equazioni omogenee si abbassa di una unità. Infatti, se n è l'indice di omogeneità, poniamo

$$x = e^t\ ,\quad y = x^n\zeta = e^{nt}\zeta;$$

osservando che $\dfrac{d}{dx} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{dt}{dx} = e^{-t}\dfrac{d}{dt}$, abbiamo

$$(1)\quad \begin{cases} y' = \left(\dfrac{d\zeta}{dt} + n\zeta\right)e^{(n-1)t},\ y'' = \left\{\dfrac{d^2\zeta}{dt^2} + (2n-1)\dfrac{d\zeta}{dt} + n(n-1)\zeta\right\}e^{(n-2)t}, \\ y''' = \left\{\dfrac{d^3\zeta}{dt^3} + (3n-3)\dfrac{d^2\zeta}{dt^2} + (3n^2-6n+2)\dfrac{d\zeta}{dt} + n(n-1)(n-2)\zeta\right\}e^{(n-3)t}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

dalle quali si vede che $y^{(r)}$, che è di dimensione $n-r$, contiene come fattore $e^{(n-r)t}$, e t non comparisce esplicitamente altro che come esponente di e. Così chè, se la equazione è omogenea di grado k, si raccoglierà in ogni suo termine e^{kt}, e la equazione, liberata dal fattore e^{kt}, non conterrà esplicitamente la variabile indipendente t; il suo ordine quindi si abbassa di una unità come si è visto nel numero precedente.

È notevole il seguente caso particolare. Supponiamo che le dimensioni dei termini della equazione $f(x, y, y', y''\ldots) = 0$ siano $kn + k_1$, $kn + k_3, \ldots$ Non vi è allora che il solo valore $n = \infty$ che renda eguali le dimensioni dei suoi termini e la equazione è così omogenea di indice infinito. Il numero kn che comparisce nella dimensione di ciascun termine indica che essa contiene in ciascun termine le quantità $y, y', y'', y'''\ldots$ elevate a degli esponenti la cui somma è k, cioè che la funzione $f(x, y, y', y'', \ldots)$ è omogenea di grado k nelle quantità $y, y', y'', \ldots$ Diremo allora che la equazione proposta è *omogenea in* y *e nelle sue derivate*, e queste equazioni sono omogenee di indice infinito. Ma ad esse non si può applicare il precedente procedimento per le equazioni omogenee di indice n. Per abbassarne l'ordine di una unità si pone $y = e^{\int z dx}$, da cui

$$(2) \quad y' = z e^{\int z dx},\ y'' = (z' + z^2) e^{\int z dx},\ y''' = (z'' + 3zz' + z^3) e^{\int z dx}, \ldots$$

dalle quali si scorge che la derivata $y^{(r)}$ contiene solo la derivata $z^{(r-1)}$. Sostituendo nella equazione proposta, si raccoglie un fattore $e^{k\int z dx}$ in ogni termine, e la equazione in z che si ottiene, liberata da questo fattore, è di ordine inferiore di una unità a quello della equazione in y.

Se poi $k_1 = k_2 = k_3 \ldots$, tutti i termini della equazione hanno la stessa dimensione $kn + k_1$ qualunque sia l'indice n; gioverà allora, in generale, prendere $n = 0$, e trasformare perciò la equazione colle formole $x = e^t$, $y = z e^{0t} = z$, ossia cambiare la sola variabile indipendente da x in t.

Si potrà anche far uso della sostituzione $y = e^{\int z dx}$, che corrisponde al supporre $n = \infty$.

Esempi

1) $ax^3 y'' = (y - xy')^2$. Come si trova subito, è omogenea di indice *uno*. Posto $x = e^t$, $y = e^t z$ ed usando le formole (1), essa di-

viene $a\left(\frac{d\zeta^2}{dt^2}+\frac{d\zeta}{dt}\right)=\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)$, che si integra ponendo $\frac{d\zeta}{dt}=p$, perchè diventa $adp=(p^2-ap)\,dt$, da cui

$dt=\frac{adp}{p^2-ap}$, $\frac{p-a}{p}=C_1e^t$, $p=\frac{a}{1-C_1e^t}$, e quindi

$\zeta=a\int\frac{dt}{1-C_1e^t}=a\log\frac{C_2e^t}{1-C_1e^t}$, e perciò in ultimo

$$y=ax\log\frac{C_2x}{1-C_1x}.$$

2) $xy''-2xyy'-2y^2+2y'=0$

Questa equazione è omogenea di indice -1. Posto, perciò, $x=e^t$, $y=x^{-1}\zeta=e^{-t}\zeta$, essa diventa, in virtù delle (1),

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\frac{d\zeta}{dt}(1+2\zeta)=0,$$

che, posto $\frac{d\zeta}{dt}=p$ e presa ζ come variabile indipendente, si riduce alla $\frac{dp}{d\zeta}=1+2\zeta$, da cui $p=\zeta+\zeta^2+C$, ed in conseguenza $dt=\frac{d\zeta}{\zeta^2+\zeta+C}$, dalla quale $t+\log C_2=\frac{1}{C_1}\log\frac{2\zeta+1-C_1}{2\zeta+1+C_1}$, avendo posto $C_1=\sqrt{1-4C}$; ed in ultimo

$$\log(C_2x)=\frac{1}{C_1}\log\frac{2xy+1-C_1}{2xy+1+C_1},\ \text{ossia}\ C_2x^{C_1}=\frac{2xy+1-C_1}{2xy+1+C_1}.$$

avendo scritto C_2 in luogo di $C_2^{C_1}$, e questo è l'integrale generale della equazione proposta, il quale può anche porsi sotto la forma

$$y=\frac{1-C_1+(1+C_1)x^{C_1}}{2x(C_2x^{C_1}-1)}.$$

3) $xyy''+axy'^2+yy'=0$. Qualunque sia l'indice n è equazione omogenea di grado $2n-1$. Prendiamo perciò $n=0$, ed in conseguenza poniamo $x=e^t$. La equazione diventa $y\frac{d^2y}{dt^2}+a\frac{dy}{dt}=0$, e posto $\frac{dy}{dt}=p$ e presa y per variabile indipendente, $y\frac{dp}{dy}+ap=0$,

:ui $py^a = C_1$ e perciò

3) $$\frac{dy}{dt} = C_1 y^{-a},$$

lalla quale $\frac{y^{a+1}}{a+1} = C'_1 t + C'_2$ od anche $y^{a+1} = C_1 t + C_2$; l'integrale generale della equazione proposta è quindi

$$y^{a+1} = C_1 \log x + C_2,$$

e a è diverso da -1. Se $a = -1$, allora l'integrale della (3) è $\log y = C_1 t + \log C_2$, e perciò $\log y = C_1 \log x + \log C_2$ ossia $y = C_2 x^{C_1}$ è l'integrale generale della equaz. $xyy'' - xy'^2 + yy' = 0$.

4) $xyy'' = yy' + xy'^2 + \frac{bxy'^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. È omogenea rispetto ad y ed alle sue derivate; poniamo perciò $y = e^{\int z dx}$, ed in virtù delle (2) abbiamo

$$x\frac{dz}{dx} = z + \frac{bxz^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \text{ossia} \quad \frac{xdz - zdx}{z^2} = \frac{bx\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

la cui $C_1 - \frac{x}{z} = -b\sqrt{a^2 - x^2}$, $z = \frac{x}{b\sqrt{a^2 - x^2} + C}$, e, posto $\sqrt{a^2 - x^2} = \theta$,

$$\int z dx = -\int \frac{\theta d\theta}{C + b\theta} = -\frac{\theta}{b} + \frac{C}{b^2}\log(C + b\theta) + C_1$$

$$= -\frac{1}{b}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{C}{b^2}\log[C + b\sqrt{a^2 - x^2}] + C'_1,$$

: quindi l'integrale generale della proposta equazione è

$$y = e^{C'_1} e^{\frac{-\sqrt{a^2 - x^2}}{b}} (C + b\sqrt{a^2 - x^2})^{\frac{C}{b^2}},$$

ssia, posto $\frac{C}{b^2} = C_1$, $e^{C'_1} b^{C_1} = C_2$,

$$y = C_2 (bC_1 + \sqrt{a^2 - x^2})^{C_1} e^{-\frac{1}{b}\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

211. *Equazioni differenziali esatte.* — Una equazione $f(x, y, y', y'' \ldots y^{(n)}) = 0$ dicesi *esatta* se la funzione f è la derivata rapporto ad x di una funzione $f_1(x, y, y', \ldots y^{(n-1)})$ presa considerandovi y come funzione qualunque di x. Allora $f_1 = C$ sarà un integrale primo della equazione $f = 0$. Così ad esempio, la equazione $2x(y'+1)y'' + y'^2 + 3y' = 0$ è esatta perchè il suo primo membro è la derivata rapporto ad x della funzione $xy'^2 + 2xy' + y$, e quindi $xy'^2 + 2xy' + y = C$ ne è un integrale primo.

Cominciamo dalle equazioni lineari

$$(1) \qquad P_n y^{(n)} + P_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + P_1 y' + P_0 y + P = 0,$$

Osservando che, in virtù della formola al n. 205 vol. I, è

$$\int P_r y^{(r)} dx = P_r y^{(r-1)} - P'_r y^{(r-2)} + P''_r y^{(r-3)} - \ldots + (-1)^{r-1} P_r^{(r-1)} y + (-1)^r \int y P_r^{(r)} dx$$

l'integrale del primo membro della (1) si riduce alla forma

$$(2) \qquad \int P dx + \int Q_0 y dx + Q_1 y + Q_2 y' + \ldots + Q_n y^{(n-1)},$$

dove

$$Q_0 = P_0 - P'_1 + P''_2 - P'''_3 + \ldots + (-1)^n P_n^{(n)},$$

$$Q_r = P_r - P'_{r+1} + P''_{r+2} - \ldots + (-1)^{n-r} P_n^{n-r}.$$

Ora la espressione (2) è sempre integrale del primo membro della (1), ma il modo con cui dipende esplicitamente da x varia al variare della funzione y di x, ed affinchè, qualunque sia questa funzione, rimanga sempre la stessa funzione esplicita di x e di $y, y', \ldots$ occorre che sia $\int Q_0 y dx = 0$ e perciò, affinchè ciò avvenga qualunque sia la funzione y di x, occorre che sia $Q_0 = 0$. In tal caso, e solo allora, la equazione proposta è esatta, e

$$\int P dx + Q_1 y + Q_2 y' + \ldots + Q_n y^{(n-1)} = C$$

è un suo integrale primo.

Esempio. Si riconosce subito, col procedimento precedente che la equazione

$$xy''' + 3y'' + xy' + y = 0$$

è esatta e che

$$xy'' + 2y' + xy = C_1$$

è un integrale primo. Questa ultima equazione non è esatta; ma della equazione $xy'' + 2y' + xy = 0$ è integrale particolare $y_1 = \frac{\cos x}{x}$ (Es. 21 a pag. 532), cosichè, servendoci della formola della fine del n. 201, si ha il suo integrale generale

$$y = C_2 \frac{\cos x}{x} + C_3 \frac{\operatorname{sen} x}{x} + \frac{C_1}{x},$$

che è l'integrale generale della equazione proposta.

Consideriamo ora una equazione differenziale qualunque. Si intende subito come, affinchè essa possa essere esatta, fa bisogno che la più alta derivata comparisca al primo grado. Sia quindi

$$\varphi(x, y, y' \ldots y^{n-1}) + \psi(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}) y^{(n)} = 0$$

la nostra equazione, che porremo nella forma

$$V dx = \varphi(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}) dx + \psi(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}) dy^{(n-1)} = 0.$$

Poniamo

$$U = \int \psi(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}) dy^{(n-1)},$$

l'integrazione intendendosi eseguita considerando $x, y, y' \ldots y^{(n-2)}$ come costanti, cosichè sia

$$dU = \left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} y' + \frac{\partial U}{\partial y'} y'' + \ldots + \frac{\partial U}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)}\right] dx + \psi(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}) dy^{(n-1)}$$

e quindi

$$V dx - dU = \left[\varphi(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}) - \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} y' - \ldots - \frac{\partial U}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)}\right] dx.$$

Se si riconosce che il secondo membro è il differenziale di una funzione U_1 di $x, y, y' \ldots y^{(n-2)}$, allora la equazione proposta è esatta e un suo integrale primo è $U + U_1 = C$. Se il secondo membro non è un differenziale esatto, la equazione proposta non è esatta. Per riconoscere poi se avvenga il primo o il secondo caso si applica al secondo membro lo stesso procedimento che si è adoperato per $V dx$, e così successivamente.

Come per le equazioni differenziali di primo ordine della forma $M\,dx + N\,dy = 0$, così per quelle di ordine n della forma $M dx + N dy^{(n-1)} = 0$, dove M, N sono funzioni di $x, y, y', y'' \ldots y^{(n-1)}$, esistono dei *fattori integranti o moltiplicatori* μ, funzioni di $x, y, y', \ldots y^{(n-1)}$, tali che $\mu(M dx + N dy^{(n-1)}) = 0$ è una equazione esatta. Indicando con $\varphi(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}) = C$ un integrale primo della proposta equazione risoluto rapporto alla costante, la dimostrazione è la stessa di quella per le equazioni di primo ordine (Vedi n. 187).

ESEMPI

1) Sia l' equazione

$$yy' - xy'^2 - xyy'' = 0 \quad \text{ossia} \quad V dx = (yy' - xy'^2) dx - xy dy' = 0:$$

posto $U = -xy \int dy' = -xyy'$ abbiamo $V dx - dU = 2yy' = d(y^2)$; quindi

$$y^2 - xyy' = C_1$$

è un integrale primo, il quale, integrato separando le variabili, dà l'integrale generale della proposta equazione, $x = C_2 \sqrt{y^2 - C_1}$, che può anche porsi sotto la forma

$$y^2 + c_2 x^2 = C_1 .$$

2) $V = (2x + y')y''' + (2 + y'' + 2yy' + 3x)y'' + y'^3 + 3y' + x^2 = 0.$

Posto

$$U_1 = \int (2x + y') dy'' = (2x + y')y'',$$

è $\quad V dx - dU_1 = \{(2yy' + 3x)y'' + (y'^3 + 3y' + x^2)\} dx = V_1 dx;$

per riconoscere se il secondo membro $V_1 dx$ è un differenziale esatto poniamo

$$U_2 = \int (2yy' + 3x) dy' = yy'^2 + 3xy'.$$

ed allora è

$$V_1 dx - dU_2 = x^2 dx = d \frac{x^3}{3},$$

e quindi la equazione proposta è esatta, e poichè

$$V dx = dU_1 + dU_2 + d\frac{x^3}{3}, \text{ sarà } U_1 + U_2 + \frac{x^3}{3} = C, \text{ cioè}$$

$$(2x + y')y'' + (yy' + 2x)y' + \frac{x^3}{3} = C$$

un suo integrale primo.

3) Proponiamoci di determinare la forma della funzione R di x, y, e le funzioni P, Q di x in modo che la equazione $y'' + \frac{R}{Q^{\frac{3}{2}}} = 0$, ossia $V dx = dy + \frac{R}{Q^{\frac{3}{2}}} dx = 0$ ammetta un moltiplicatore della forma $\mu = Py + Qy'$ (Eulero).

Dovendo essere allora

$$\mu V dx = dy'(Py + Qy') + \frac{R}{Q^{\frac{3}{2}}}(Py + Qy') = 0$$

una equazione esatta, posto

$$U = \int (Py + Qy')\, dy' = Pyy' + Q\frac{y'^2}{2},$$

dovrà essere

$$\mu V dx - dU = \left[\frac{R}{Q^{\frac{3}{2}}}(Py + Qy') - P'yy' - Py'^2 - Q'\frac{y'^2}{2}\right] dx$$

un differenziale esatto, e quindi dovrà essere intanto

(3) $$2P + Q' = 0,$$

cosichè, essendo allora

$$\mu V dx - dU = \frac{RPy}{Q^{\frac{3}{2}}} dx + \left(\frac{R}{\sqrt{Q}} - P'y\right) dy,$$

dovremo avere ancora

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{RPy}{Q^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{R}{\sqrt{Q}} - P'y\right) \text{ ossia}$$

$$\frac{RP}{Q^{\frac{3}{2}}} + \frac{Py}{Q^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{Q}}\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{RQ'}{2Q^{\frac{3}{2}}} - P''y;$$

la quale, ove si prenda per P tale funzione che sia $P'=0$ cioè $P=-\gamma x-\beta$, γ e β costanti qualunque, e in virtù della (3), si riduce alla

$$\frac{Py}{Q}\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial R}{\partial x} \text{ od anche (4) } \frac{\partial R}{\partial x}+\frac{Q'y}{2Q}\frac{\partial R}{\partial y}=0;$$

e questa, essendo, per la (3), $Q=\alpha+2\beta x+\gamma x^2$, α costante qualunque, serve a determinare R. Perciò si osservi che, posto $y=\zeta\sqrt{Q}$, abbiamo $R(x,y)=R(x,\zeta\sqrt{Q})$ da cui, indicata con $\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)$ la derivata totale di R rapporto ad x, si ha

$$\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)=\frac{\partial R}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial R}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\zeta Q'}{2\sqrt{Q}}=\frac{\partial R}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial y}\frac{Q'y}{2Q}=0;$$

quindi R è funzione della sola ζ cioè di $\frac{y}{\sqrt{Q}}$, vale a dire che soddisfacciamo alla (4) prendendo $R=\varphi\left(\frac{y}{\sqrt{Q}}\right)$, dove φ indica una funzione qualunque.

Da tutto questo si raccoglie che l'equazione

$$y''+\frac{1}{Q^{\frac{3}{2}}}\varphi\left(\frac{y}{\sqrt{Q}}\right)=0,$$

ammette il fattore integrante $Py+Qy'$, dove $P=-\gamma x-\beta$, $Q=\alpha+2\beta x+\gamma x^2$, ed un suo integrale primo è

$$U+\int\left[\frac{RPy}{Q^{\frac{3}{2}}}dx+\left(\frac{R}{\sqrt{Q}}-P'y\right)dy\right]=C_1,$$

ossia, per la (3) e se la funzione $\varphi\left(\frac{y}{\sqrt{Q}}\right)$ non presenta singolarità per $y=0$, (formola (5) a pag. 444),

$$-Q'yy'+Qy'^2+\gamma y^2+\frac{2}{\sqrt{Q}}\int_0^y\varphi\left(\frac{y}{\sqrt{Q}}\right)dy=C.$$

Un caso particolare notevole è quello in cui

$$\varphi\left(\frac{y}{\sqrt{Q}}\right)=\frac{a\dfrac{y}{\sqrt{Q}}}{\left(1+b\dfrac{y^2}{Q}\right)^2}=\frac{ayQ^{\frac{3}{2}}}{(by^2+Q)^2},$$ al quale corrisponde la

equazione

$$y''+\frac{ay}{(by^2+Q^2)}=0,$$

che ha perciò l'integrale primo

$$-Q'yy'+Qy'^2+\gamma y^2-\frac{Qa}{b(by^2+Q)}=C.$$

212. Quando una equazione differenziale non rientri in alcuno dei tipi precedenti bisognerà, per integrarla, ricorrere a speciali artifizi e trasformazioni come nei seguenti

ESEMPI

1) $y''+f(x)y'+\varphi(y)y'^2=0$ (*Equazione di* LIOUVILLE).
Ponendola nella forma

$$\frac{y''\,dx}{y'}+f(x)\,dx+\varphi(y)\,dy=0$$

se ne ricava l'integrale primo

$$\log y+\int f(x)\,dx+\int\varphi(y)\,dy=\log C_1,\ \text{ossia}\ y'=C_1\,e^{-\int f(x)dx}\,e^{-\int\varphi(y)dy}$$

da cui si ha l'integrale generale

$$\int dy\,e^{\int\varphi(y)dy}=C_1\int dx\,e^{-\int f(x\,dx}+C_2.$$

2) $(1+x^2)^2y''+2x(1+x^2)y'+y=0.$

L'ordine di tutte le equazioni lineari omogenee si può abbassare di una unità ponendo $y=e^{\int z dx}$; ma la integrazione effettiva riesce allora raramente. Nel nostro caso giova porre $x=\operatorname{tg} t$, ed allora la equa-

zione diventa (Vol. I, pag. 218) $\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$, il cui integrale è $y=C_1\cos t+C_2\operatorname{sen} t$, e quindi

$$y=C_1\cos(\operatorname{arc\,tg} x)+C_2\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,tg} x)$$

$$=C_1\cos\left(\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)+C_2\operatorname{sen}\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}(C_1+C_2x)$$

è l'integrale generale della equazione proposta.

3) $y''+(e^y-x)y'^3=0$. Prendendo y per variabile indipendente la equazione diventa $\frac{d^2x}{dy^2}+x=e^y$ (Vol. I, eserc. 4° a pag. 229), il cui integrale generale

$$x=C_1\cos y+C_2\operatorname{sen} y+\frac{e^y}{2}$$

è l'integrale generale della equazione proposta.

4) $(x^2+y^2)y''+(y-xy')(1+y'^2)=0$. Preparando la equazione in modo che la variabile indipendente sia qualunque, abbiamo (Vedi cambiamento di variabili Vol. I)

$$(x^2+y^2)(dxd^2y-dyd^2x)+(ydx-xdy)(dx^2+dy^2)=0.$$

Ponendo $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\operatorname{sen}\theta$, essa diventa (Vedi Vol. I pag. 221)

$$\rho^2(2d\rho^2d\theta-\rho d^2\rho d\theta+\rho^2d\theta^3+\rho d\rho d^2\theta)-\rho^2d\rho(d\rho^2+\rho^2d\theta^2)=0.$$

ossia $d\rho^2d\theta-\rho d^2\rho d\theta+\rho d\rho d^2\theta=0$, la quale, prendendo ρ come variabile indipendente, diventa $\frac{d\theta}{d\rho}+\rho\frac{d^2\theta}{d\rho^2}=0$, che, integrata col porre $\frac{d\theta}{d\rho}=p$, dà $\rho^2=C_2\,e^{C_1\theta}$, da cui si ottiene l'integrale

$$x^2+y^2=C_1\,e^{C_1\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}$$

della equazione proposta.

5) $\alpha yy'' + \beta y'^2 = \dfrac{yy'}{\sqrt{a^2+x^2}}$ (Eulero). È equazione omogenea in y e nelle derivate; posto perciò $y = e^{\int z dx}$, essa diventa

$$(1) \qquad \frac{dz}{dx} - \frac{z}{\alpha\sqrt{a^2+x^2}} = -z^2\,\frac{\alpha+\beta}{\alpha},$$

che è una equazione di Bernoulli, il cui integrale, posto $t = [x+\sqrt{a^2+x^2}]^{\frac{1}{\alpha}}$, si trova essere

$$(2) \qquad \frac{1}{z} = \frac{1}{t}\left\{\frac{\beta+\alpha}{2}\left(\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{a^2 t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) + C_1\right\}.$$

Per calcolare $\int z dx$ osserviamo che la (1) ci dà

$$\frac{dz}{z} - \frac{dx}{\alpha\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\, z dx,$$

da cui, integrando,

$$-\log C_2 + \log z - \frac{1}{\alpha}\log(x+\sqrt{a^2+x^2}) = -\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\int z dx,$$

ossia $\log C_2 \dfrac{t}{z} = \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha}\int z dx$, e quindi $y = e^{\int z dx} = \left(C_2 \dfrac{t}{z}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$, cioè, per la (1),

$$y = \left[C_2\left\{\frac{\beta+\alpha}{2}\left(\frac{t^{1+\alpha}}{1+\alpha} + \frac{a^2 t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) + C_1\right\}\right]^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

ossia, modificando le costanti,

$$y = C_2\left[\frac{t^{1+\alpha}}{1+\alpha} + \frac{a^2 t^{1-\alpha}}{1-\alpha} + C_1\right]^{\alpha+\beta}$$

questo è l'integrale della proposta equazione.

213. Le equazioni differenziali che abbiamo fin qui studiate esprimevano, salvo poche eccezioni, una relazione tra le derivate di una

funzione, la funzione stessa e la variabile indipendente, ed esse si potevano ridurre subito ad equazioni tra i differenziali delle variabili. Molte volte la equazione differenziale è data sotto quest'ultima forma. Essa deve essere allora omogenea complessivamente rispetto al grado ed all'ordine dei differenziali che in essa compariscono, altrimenti ogni somma di termini omogenei, dovendosi annullare da sè, perchè ogni tal somma è un infinitesimo di ordine diverso da quello delle altre somme analoghe, la equazione si scinderebbe in varie equazioni differenziali. Data poi una equazione in tal forma bisogna che sia fissata quale è la variabile che si considera come indipendente, giacchè la relazione finita tra le variabili, cioè l'integrale, cambierà al cambiare della variabile indipendente, a meno che la equazione non rappresenti una relazione tra i differenziali, che rimanga inalterata qualunque sia la variabile che si prenda come indipendente, ciò che avviene quando la proposta equazione sia ciò che diventa una certa equazione quando la si prepara in modo che la variabile indipendente possa essere qualunque. Allora la equazione proposta, fissata che sia la variabile indipendente, è sempre la trasformata di quella certa equazione in questa nuova variabile indipendente, e l'integrale rimane sempre l'integrale di quest'ultima equazione. Tutto ciò verrà compreso meglio coi seguenti

Esempi

1) Sia la equazione $d^2y = Xdx^2$, dove X è funzione della sola x. Se la variabile indipendente è la x, il suo integrale è

$$y = \int dx \int Xdx + C_1x + C_2.$$

Supponiamo invece che la variabile indipendente debba essere s, essendo s tale che $ds^2 = dx^2 + dy^2$, cioè supponiamo ds costante. Per integrarla in questa ipotesi, integreremo la sua trasformata quando per variabile indipendente si assuma x. Preparando l'equazione in modo che la variabile indipendente possa essere qualunque, e ricordando che la variabile indipendente nella $d^2y = Xdx^2$ era [illegible] essa diviene $dsd^2y - dyd^2s = Xdx^2ds$; ma $dsd^2s = dxd^2x + dyd^2y$ [illegible] poichè prendiamo ora x per variabile indipendente, $dsd^2s =$ [illegible] $ds^2 = dx^2(1 + y'^2)$, indicando con apici le derivazioni rapporto [illegible]

e quindi

$$ds d^2y - \frac{dy^2 d^2y}{ds} = X dx^2\, ds \text{ ossia } (ds^2 - dy^2) d^2y = X dx^2\, ds^2,$$

$$d^2y = X dx^2 (1 + y'^2),\ y'' = X(1 + y'^2),$$

il cui integrale generale è

$$y = \int dx \operatorname{tg} \left\{ \int X dx + C_1 \right\} + C_2,$$

che è così l'integrale generale della equazione $d^2y = X dx^2$, quando si supponga ds costante, il quale è ben diverso da quello della stessa equazione $d^2y = X dx^2$ nell'ipotesi di dx costante.

Invece, qualunque sia la variabile indipendente che si scelga, l'integrale della equazione

$$(1) \qquad dx d^2y - dy d^2x = X dx^3$$

è sempre lo stesso, quello cioè della equazione $y'' = X$, perchè la (1) è ciò che diviene questa ultima equazione preparandola per una variabile indipendente qualunque.

2) Si voglia trovare la relazione tra x e y affinchè sia

$$(2) \qquad \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} dx = \frac{x dy^2 + xy d^2y + y dy dx}{y dy}$$

nell'ipotesi di $y dx$ costante. Per eseguire la integrazione, integreremo la trasformata quando si supponga dx costante.

Per una variabile indipendente qualunque, posto $y dx = dh$, osserviamo che, indicato con $d_h^2 y$ il d^2y che comparisce nella (2), è $d_h^2 y = \dfrac{dh\, d^2y - dy d^2h}{dh}$, ossia, poichè $dy dx + y d^2x = d^2h$, è $d_h^2 y = d^2y - \dfrac{dy(dy dx + y d^2x)}{y dx}$, che, supposto dx costante, diviene $d_h^2 y = dy - \dfrac{dy^2}{y}$. La trasformata della (2) quando dx è costante è perciò

$$\frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} dx = \frac{x d^2y + dy\, dx}{dy}, \text{ ossia } \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} y' = x y'' + y',$$

$xy'' = -\dfrac{2a^2}{x^2+a^2}y'$, che si integra ponendo $\dfrac{dy}{dx} = p$; si trova così

$$y = C_1 x - \frac{C_1 a^2}{x} + C_2,$$

che è perciò l'integrale generale della (2) nell'ipotesi di ydx costante.

L'integrale della stessa equazione nell'ipotesi di dy costante è

$$y = C\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{a^2}\right).$$

ESERCIZI

1. $ay'' = y'^2$, l'integrale è $y = C_2 - a\log(x + C_1)$.

2. $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{ay}}$, $\dfrac{9(x+C_1)^2}{4\sqrt{a}} = y\sqrt{y} - 3y\sqrt{C_2} + 4C_2\sqrt{C_2}$.

3. $(x+a)y'' + xy'^2 = y$, $y = \log(x^2 + C_1^2) + \dfrac{2a}{C_1}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{C_1} + C_2$

4. $yy'' - y'^2 = \dfrac{yy'}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $y = C_2[x + \sqrt{a^2+x^2}]^{C_1 a^2} e^{C_1 x(x+\sqrt{a^2+x^2})}$.

5. $x^4y'' - x^3y' = x^2y'^2 - 4y^2$, $\log x + C_2 = \displaystyle\int \frac{d\zeta}{C_1 e^{\zeta} - 4\zeta - 2}$, $\zeta = \dfrac{y}{x^2}$.

6. $yy'' - y'^2 = y^2\log y$. $\log y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

7. $(x+2y)y'' + 2y'^2 + 2y' + 2 = 0$, $x^2 + y^2 + xy = C_1 x + C_2$.

8. $dx^3dy - xds^2\,d^2y = adx\,ds\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2}$, supposto

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ costante; $C_1 y = x^2 + 2ax + C_2$.

9. $dx^3\,dy - xds^2\,d^2y = \dfrac{bdx^4\,ds^2\,d^2y}{\sqrt{dx^8 + a^2\,ds^4\,d^2y}}$ (ds costante),

$y = \dfrac{x^2}{2C_1} + \dfrac{bx}{\sqrt{C_1^2 + a^2}} + C_2$ integrale generale: vi è ancora un integrale singolare costituito dalle due equazioni $x = -\dfrac{b}{(1+a^2q^2)^2}$,

$$y = -\frac{b^2q(1+2a^2q^2)}{2(1+a^2q^2)^3} + \frac{b^2q}{8(1+a^2q^2)^2} + \frac{3b^2q}{16(1+a^2q^2)} + \frac{3b^2}{16a}\operatorname{arc\,tg}(aq) + C$$

10. $y''(yy'+a)=y'(1+y'^2)$;

$x=a\log p+C_1\log(p+\sqrt{1+p^2})+C_2,\ y=ap+C_1\sqrt{1+p^2}$.

11. $y'^2-yy''=n\sqrt{y'^2+a^2y''^2}$,

integrale generale $C_1x+\log(C_1y+n\sqrt{1+a^2C_1^2})+C_2$,

int. singolare $y=na\,\mathrm{sen}\,\dfrac{x+C}{a}$.

12. $y(1-\log y)y''+(1+\log y)y'^2=9,\ y=e^{\frac{x+C_1}{x+C_2}}$.

13. $(y-xy')y''=4y'^2,\ x=C_1[\sqrt{1+C_2xy}-1]\,e^{\sqrt{1+C_2xy}}$

(La equaz. è omogenea d' indice qualunque, giova assumere l' indice uguale a -1).

14. $ds\,dy+3y\,d^2s=0$ (dy costante), $(x+C_1)^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=C_2$.

15. $a^2y''\sqrt{a^2+x^2}+a^2y'=x^2,\ a^2y=-\dfrac{x^3}{9}-\dfrac{2}{3}a^2x+\dfrac{2}{9}(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}$

$+C_1[x\sqrt{a^2+x^2}-x^2+a^2\log(x+\sqrt{a^2+x^2}]+C_2$.

16. $Xdy^3=dx^2\,dy-xdyd^2x+xdx\,d^2y,\ X=X(x)$: si suppongano successivamente costanti $dx, dy, xdy, xdy, \dfrac{dx}{x}$; si ha sempre lo stesso integrale $y+C_2=\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{C_1-2\int\frac{X}{x^3}dx}}$; perchè?

17. $xyy''+(x-1)yy'+(y^2+1)xy'^2=0,\ e^{\frac{y^2}{2}}=C_1e^x(x+1)+C_2$.

18. $\dfrac{ds\,dy}{d^2x}=a\dfrac{dx}{dy}$. Se si suppone ds costante l' integrale è

$y=C_1-\dfrac{ap}{\sqrt{1+p^2}},\ x=C-\dfrac{a}{\sqrt{1+p^2}}+a\log\dfrac{1+\sqrt{1+p^2}}{p}$; se si suppone dy costante l' integrale è $y=a\sqrt{1+p^2}+C_1$,

$$x=\frac{a}{2}[p\sqrt{1+p^2}-\log(p+\sqrt{1+p^2})]+C_2.$$

19. $\dfrac{ds^2\,d^2y}{dx^4}=\dfrac{1}{a}\cos\dfrac{x}{c}$ (ds costante),

$$y=-\frac{c^2}{a}\cos\frac{x}{c}+C_1x+C_2.$$

20. $1 + y'^2 + xy'y'' = ay''\sqrt{1+y'^2}$,

$$y = C_1 \log \frac{C_2(C_1 + \sqrt{C_1^2 + a^2 - x^2})}{a - x} - \sqrt{C_1^2 + a^2 - x^2}.$$

21. $yd^2x - dx\,dy + y^2d^2y = 0$; se si suppone $\frac{dx}{y}$ costante l'integrale è $y^2 = C_1x + C_2$; se si suppone ydx costante è $1 + C_1y^2 = C_2e^{-2x}$.

22. $y''\left(\cos y + \frac{1}{x+y}\right) - \left(\frac{1+y'}{x+y}\right)^2 - y'^2 \operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x = 0$, $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \log(x+y) = C_1x + C_2$.

23. $y''(x+y) + y'(1+y') = 0$, $y = C_1 \log(x + y + C_1) + C_2$.

24. $(a^2y'^2 + x^2)\,y'' = xy'$; $x = a\sqrt{2p} \log \frac{p}{C_1}$,

$$y = \frac{ap^2}{\sqrt{2}} \log \frac{p}{C_1} + \frac{ap^2}{2\sqrt{2}} + C_2.$$

25. $x^4y'' = x^3y' + 2xyy' - 4y^2$; l'integrale, a seconda del valore di una costante che si presenta nel corso dell'integrazione, ha le tre forme seguenti: $x^2 = (x^2 - y^2)\log \frac{x}{C_1}$,

$$x = C_1 \left[\frac{(C_2 + 1)x^2 - y}{(C_2 - 1)x^2 + y}\right]^{\frac{1}{2C_2}}, \quad y = x^2 + C_2x^2 \operatorname{tg}\left(C_2 \log \frac{x}{C_1}\right):$$

vi è pure un integrale singolare $y = Cx^2$.

26. $(x^2 + y^2)\,y'' - yy'^2 + xy'^3 + xy' - y = 0$, $y^2 - x^2 + C_1xy = C_2$.

Applicazioni Geometriche.

214. Abbiamo già accennato nel n. 176 ad una interpretazione geometrica di una equazione differenziale di primo ordine. Ora p. es. vi sono elementi di una curva, data da una equazione $f(x, y) = 0$ in coordinate cartesiane, che contengono nella loro espressione le derivate di y rapporto ad x, come ad es.: gli angoli della tangente con

unto della curva cogli assi, la sottonormale, la sottotangente, il raggio li curvatura et., si intende come il problema di determinare una curva che goda di date proprietà riferentesi a tali elementi, darà uogo ad una equazione differenziale, che sarà la traduzione analitica li quelle proprietà geometriche; si avrà così *la equazione differenziale lella curva*, la cui integrazione ci permetterà di arrivare alla equazione della curva.

Analogamente se la curva sia riferita ad un sistema di coordinate polari o ad un altro qualunque sistema di coordinate, la cui celta opportuna dipenderà poi dalla natura del problema proposto.

215. Risolviamo ora appunto alcuni di tali problemi.

1) *Trovare una curva tale che in ogni suo punto la sottotangente tia all' ordinata come una costante* a *sta alla differenza tra l' ordinata e l' ascissa* (Problema proposto ai geometri trent' anni prima lella scoperta del calcolo infinitesimate da De Beaune, amico di Cartesio. Questi ne trovò la soluzione, senza indicare come vi arrivasse. l problema era allora di un genere nuovo, perchè non richiedeva li dimostrare qualche proprietà di una data curva, ma da una proprietà di una curva incognita domandava di risalire alla curva stessa. l problema fu poi risoluto da l' Hôpital e da Giovanni Bernoulli col calcolo integrale).

Ricordando che la sottotangente in un punto di coordinate (x, y) è $y\frac{dx}{dy}$, l' enunciato del problema proposto si traduce nella equazione differenziale

$$\frac{1}{y}\, y\frac{dx}{dy} = \frac{a}{y-x} \quad \text{ossia} \quad \frac{dy}{dx} - \frac{y}{a} = -\frac{x}{a},$$

che è una equazione lineare, il cui integrale generale è

$$y = x + a + \mathrm{C}e^{\frac{x}{a}}.$$

Abbiamo così un numero infinito di curve che risolvono il problema, quelle che si ottengono dalla precedente equazione attribuendovi alla costante C tutti i valori.

In particolare per $\mathrm{C} = 0$ abbiamo la retta $y = x + a$.

2) *Trovare la curva per la quale il punto di mezzo della normale geometrica è sul circolo* $\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 = \mathrm{a}^2$.

Le coordinate di un punto M della curva cercata siano (x, y), la ascissa del punto N nel quale la normale in M alla curva taglia l'asse delle x è, come si ricava subito dalla equazione $Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x)$ della normale in M, $x + yy'$, e l'ordinata è zero, cosichè le coordinate del punto P di mezzo della retta MN sono $x + \frac{1}{2}yy', \frac{1}{2}y$. Esprimendo che il punto P, qualunque sia il punto M cioè qualunque siano x, y, è sul circolo $X^2 + Y^2 = a^2$, abbiamo l'equazione differenziale della curva richiesta

$$\left(x + \frac{1}{2}yy'\right)^2 + \frac{1}{4}y^2 = a^2 \quad \text{ossia} \quad 2x + y'y = \sqrt{4a^2 - y^2},$$

dove al radicale si sottintende preposto il segno $\pm$. Per integrarla poniamo $\sqrt{4a^2 - y^2} = u$; essa si trasforma nella $uu' = 2x - u$, che è omogenea, il cui integrale è $(u - x)(u + 2x)^2 = C$, e quindi quello della equazione in x, y è

$$(\sqrt{4a^2 - y^2} - x)(\sqrt{4a^2 - y^2} + 2x) = C$$

od anche $$(4a^2 - y^2 - 2x^2 - C)^2 = x^2(4x^2 - y^2).$$

Le curve rappresentate da questa equazione risolvono il problema. In particolare per $C = 0$ abbiamo la curva

$$(\sqrt{4a^2 - y^2} - x)\ (\sqrt{4a^2 - y^2} + 2x) = 0$$

che si compone del circolo $x^2 + y^2 = 4a^2$, e della ellisse $4x^2 + y^2 = 4a^2$, circolo ed ellisse che soddisfanno ciascuno alle condizioni del problema.

3) *Determinare le curve per le quali il raggio di curvatura è uguale in ogni punto alla normale geometrica.*

La equazione del problema è

$$\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \pm y(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} \quad \text{ossia} \quad (1 + y'^2)^2 \mp y^2 y''^2 = 0,$$

e quindi ancora

$$(1 + y'^2 + yy'')\ (1 + y'^2 - yy'') = 0.$$

Integriamo ciascuna delle equazioni

$$1+y'^2+yy''=0, \quad 1+y'^2-yy''=0.$$

La prima ammette l'integrale primo $yy'+x=C_1$, il cui integrale è $x^2+y^2=2C_1x+C_2$, che rappresenta dei circoli i cui centri sono sull'asse delle x.

Per integrare l'altra equazione si ponga $\frac{dy}{dx}=p$ e si prenda y per variabile indipendente. Essa diventa allora $1+p^2-yp\frac{dp}{dy}=0$, dalla quale, integrando col separare le variabili, si ottiene $p=C_1\sqrt{1+p^2}$ e quindi $dx=\frac{C_1\,dy}{\sqrt{y^2-C_1^2}}$ da cui

$x=C_2+C_1\log(y+\sqrt{y^2-C_1^2})$, $y+\sqrt{y^2-C_1^2}=e^{\frac{x-C_2}{C_1}}$, ossia

$$y=\frac{1}{2}\left\{e^{\frac{x-C_2}{C_1}}+C_1^2e^{-\frac{x-C_2}{C_1}}\right\}=\frac{C_1}{2}\left\{\frac{1}{C_1}e^{\frac{x-C_2}{C_1}}+C_1e^{-\frac{x-C_2}{C_1}}\right\},$$

e posto $C_1=e^C$, $C_2+C_1C_3=C$, abbiamo infine

$$y=\frac{C_1}{2}\left\{e^{\frac{x-C}{C_1}}+e^{-\frac{x-C}{C_1}}\right\},$$

equazione che rappresenta delle catenarie. Queste catenarie e i precedenti circoli sono le curve richieste.

4) *Curva per la quale l'arco contato a partire dall'asse polare è uguale alla derivata rapporto al raggio vettore del corrispondente settore.*

Indicando con ρ, θ le coordinate polari di un punto della curva, l'arco che termina in quel punto ed ha origine nel punto in cui la curva incontra l'asse polare è $\int_0^\theta d\theta\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}$ ed il corrispondente settore è $\frac{1}{2}\int_0^\theta \rho^2 d\theta$, cosichè dovremo avere

$$\frac{d}{d\rho}\left\{\frac{1}{2}\int_0^\theta \rho^2\,d\theta\right\}=\int_0^\theta d\theta\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2},$$

da cui, derivando rapporto a θ, abbiamo

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{2}\rho^2\right)=\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} \text{ ossia } \rho=\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}$$

che è la equazione differenziale del problema: essa si riduce a $\frac{d\rho}{d\theta}=0$ da cui $\rho=C$; quindi le curve richieste sono i circoli col centro nel polo.

216. *Problema delle traiettorie.*

Sia il sistema di curve rappresentato dalla equazione $f(\xi,\eta,a)=0$, dove ξ, η sono le coordinate cartesiane ortogonali correnti ed a è il parametro, che individualizza le curve del sistema. Chiameremo *traiettoria* del sistema una linea che in ogni suo punto d'incontro con ciascuna linea del sistema la taglia secondo una data legge costante.

Indichiamo con x, y le coordinate correnti della traiettoria e la legge secondo la quale essa deve incontrare le linee del sistema sia espressa dalla equazione

$$(1)\qquad F\left(\xi,\eta,\frac{d\eta}{d\xi},\frac{d^2\eta}{d\xi^2},\ldots,x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\ldots\right)=0,$$

dove ξ e x, η e y sono uguali tra loro essendo (ξ,η), (x,y) le coordinate del punto comune alla traiettoria ed alla linea del sistema, ma, come è chiaro, sono diversi tra loro $\frac{d\eta}{d\xi}$ e $\frac{dy}{dx}$, etc. Per trovare l'equazione differenziale delle traiettorie sostituiremo nella (1) in luogo di $\frac{d\eta}{d\xi}$, $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$, ... i valori che si ricavano dalla $f(\xi,\eta,a)=0$ e poi tra questa equazione e quella così ottenuta dalla (1) elimineremo a, il risultato della eliminazione, ove si scriva x, y in luogo di ξ, η, è la richiesta equazione differenziale delle traiettorie.

Il più interessante problema delle traiettorie, quello che ordinariamente è considerato come il vero e proprio problema delle traiettorie, consiste nel determinare le curve che tagliano le curve del dato sistema sotto un certo angolo costante α. Se α è retto, le traiettorie chiamansi ortogonali. Indichiamo con T l'angolo che la tangente nel punto M alla traiettoria fa coll'asse delle x, con T' l'angolo

che la tangente nel punto M alla curva del sistema che passa per M fa coll'asse delle x, cosichè sia

$$\operatorname{tg} T' = \frac{d\eta}{d\xi}, \quad \operatorname{tg} T = \frac{dy}{dx};$$

abbiamo allora

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(T - T') = \frac{\operatorname{tg} T - \operatorname{tg} T'}{1 + \operatorname{tg} T \operatorname{tg} T'} = \frac{\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{d\eta}{d\xi}}{1 + \dfrac{dy}{dx}\dfrac{d\eta}{d\xi}},$$

da cui
$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\cot \alpha \dfrac{dy}{dx} - 1}{\cot \alpha + \dfrac{dy}{dx}},$$

che nel nostro caso corrisponde alla (1).

1) Eliminando a tra la $f(\xi, \eta, a) = 0$ e la $\dfrac{\partial f}{\partial \xi} + \dfrac{\partial f}{\partial \eta}\dfrac{d\eta}{d\xi} = 0$ si ottenga

$$\psi\left(\xi, \eta, \frac{d\eta}{d\xi}\right) = 0,$$

la quale sia perciò la equazione differenziale delle linee del dato sistema. Ponendo in questa equazione $\xi = x$, $\eta = y$ e in luogo di $\dfrac{d\eta}{d\xi}$ il precedente valore, otteniamo la equazione differenziale delle traiettorie

$$\psi\left(x, y, \frac{\dfrac{dy}{dx}\cot \alpha - 1}{\cot \alpha + \dfrac{dy}{dx}}\right) = 0.$$

Se $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, cioè se le traiettorie sono ortogonali, questa equazione diventa

$$\psi\left(x, y, -\frac{dx}{dy}\right) = 0.$$

2) La equazione del sistema dato di curve sia della forma

$$\eta = \varphi(\xi, a), \tag{2}$$

e se ne vogliano determinare le traiettorie ortogonali. In questo caso, oltre al procedimento generale precedente, potremo adoperare il seguente.

Cerchiamo di determinare a come tale funzione di x, che la equazione

$$y = \varphi(x, a) \tag{3}$$

risulti quella delle traiettorie ortogonali. Avremo allora

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{da}{dx}, \qquad \text{e, dalla (2),} \qquad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\partial\varphi}{d\xi};$$

affinchè la (3) rappresenti le traiettorie ortogonali dovrà essere $1 + \frac{dy}{dx}\frac{d\eta}{d\xi} = 0$, e quindi

$$1 + \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{da}{dx}\right) = 0,$$

ossia, ponendo $x = \xi$, $y = \eta$,

$$1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{da}{dx} = 0. \tag{4}$$

È questa l'equazione differenziale tra x e a cui deve soddisfare a; integrandola e ponendo nella (3) per a la funzione integrale, la (3) diventa l'equazione delle traiettorie ortogonali delle (2).

3) Trattiamo il problema in coordinate polari. Sia $f(r, \varphi, a) = 0$ l'equazione del dato sistema di curve. Indicando con μ_1 l'angolo che la tangente in un punto (r, φ) ad una delle curve fa col raggio vettore di quel punto, è $\operatorname{tg}\mu_1 = r\frac{d\varphi}{dr}$, ed indicando con μ l'angolo analogo per la traiettoria, di cui indichiamo con ρ, θ le coordinate correnti, abbiamo $\operatorname{tg}\mu = \rho\frac{d\theta}{d\rho}$, e poichè $\mu - \mu_1 = \alpha_1$, è

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\rho\frac{d\theta}{d\rho} - r\frac{d\varphi}{d\rho}}{1 + \rho r\frac{d\theta}{d\rho}\frac{d\varphi}{dr}} \text{ da cui } \frac{d\varphi}{dr} = \frac{\rho\cot\alpha\frac{d\theta}{d\varphi} - 1}{\rho r\frac{d\theta}{d\rho} + r\cot\alpha}$$

Sostituendo questo valore nella equazione differenziale del sistema li curve

$$\psi\left(r, \varphi, \frac{d\varphi}{dr}\right) = 0$$

: poi ponendo $r = \rho$, $\varphi = \theta$, abbiamo la equazione differenziale delle raiettorie

$$\psi\left(\rho, \theta, \frac{\rho \frac{d\theta}{d\rho} \cot \alpha - 1}{\rho^2 \frac{d\theta}{d\rho} + \rho \cot \alpha}\right) = 0,$$

:he per le traiettorie ortogonali si riduce alla

$$\psi\left(\rho, \theta, -\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\theta}\right) = 0.$$

ESEMPI

1) *Traiettorie ortogonali dei circoli di raggio costante* r *e col ·ntro sull' asse delle ascisse.*

La equazione dei circoli è $(\xi - a)^2 + \eta^2 = r^2$, a essendo il para- ıetro variabile, e la loro equazione differenziale è quindi

$$\left(\eta \frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 + \eta^2 = r^2,$$

ɔsichè quella delle traiettorie ortogonali è

$$\left(y \frac{dx}{dy}\right)^2 + y^2 = r^2 \text{ ossia } dx + \frac{dy\sqrt{r^2 - y^2}}{y} = 0,$$

ove al radicale si sottintende preposto il segno $\pm$; l'integrale, e uindi l' equazione delle traiettorie ortogonali, è

$$x = -\sqrt{r^2 - y^2} - r \log \frac{r + \sqrt{r^2 - y^2}}{y} + C.$$

Esse sono delle *trattrici* (Vedi pag 68, eserc. 8), le quali tutte ottengono da una di esse facendola scorrere in modo che i suoi unti si muovano lungo rette parallele all' asse delle x.

2) *Traiettorie ortogonali del sistema di rette* $y = ax + \psi(a)$.

Questa stessa equazione è quella delle traiettorie purchè a si ricavi dalla equazione che corrisponde alla (4) nel nostro caso, cioè dalla

$$1 + a^2 + a[x + \psi'(a)]\frac{da}{dx} = 0 \text{ ossia } \frac{dx}{da} + \frac{ax}{1+a^2} = -\frac{a\psi'(a)}{1+a^2},$$

equazione lineare il cui integrale è

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\left[-\int \frac{a\psi'(a)}{\sqrt{1+a^2}}\,da + C\right].$$

Considerando a come un parametro variabile, questa equazione e la $y = ax + \psi(a)$ ci danno le coordinate dei punti delle cercate traiettorie, e la eliminazione di a ci dà la loro equazione in coordinate x, y. Così in particolare se $\psi(a) = 0$, le traiettorie ortogonali delle rette $y = ax$ sono date da $y = ax$, $x = \dfrac{C}{\sqrt{1+a^2}}$, cioè sono i cerchi $x^2 + y^2 = C^2$.

3) *Traiettorie sotto un angolo* $\alpha = \pm\dfrac{\pi}{3}$ *del sistema di parabole* $\xi^2 = 2a(\eta - \xi\sqrt{3})$.

Gli assi delle parabole sono rette parallele all'asse delle y, la retta $\xi = \dfrac{\eta}{\sqrt{3}}$ è una tangente comune a tutte le parabole nell'origine delle coordinate, ed il luogo geometrico dei vertici delle parabole è la retta $\xi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\eta$.

L'equazione differenziale delle parabole è $\dfrac{d\eta}{d\xi} = \dfrac{2\eta}{\xi} - \sqrt{3}$, cosichè l'equazione differenziale delle traiettorie è, se $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$, la equazione

$$\frac{\dfrac{dy}{dx}\dfrac{1}{\sqrt{3}} - 1}{\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{dy}{dx}} = \frac{2y}{x} - \sqrt{3} \text{ ossia } \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x - y\sqrt{3}}.$$

equazione omogenea il cui integrale è $y^2 = C(x - y\sqrt{3})$, che rappresenta delle parabole i cui assi sono paralleli all'asse delle x, la retta $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ è una tangente comune nell'origine delle coordinate, ed il luogo geometrico dei vertici delle parabole è la retta $y = \frac{\sqrt{3}}{2} x$.

Se $\alpha = -\frac{\pi}{3}$, la equazione differenziale delle traiettorie è $\frac{dy}{dx} = \frac{y - x\sqrt{3}}{y\sqrt{3} - x}$, il cui integrale $\sqrt{3}(x^2 + y^2) - 2xy = C$ rappresenta delle ellissi simili col centro nell'origine delle coordinate ed i cui assi sono le rette $y = \pm x$.

4) Si vogliano trovare le traiettorie di un sistema di curve $f(\xi, \eta, a) = 0$, tali che in ogni punto d'incontro colle curve del sistema la sottonormale della traiettoria uguagli la sottotangente della curva del sistema.

Dovremo allora avere $\eta \frac{d\xi}{d\eta} = y \frac{dy}{dx}$, cosichè se $\psi\left(\xi, \eta, \frac{d\eta}{d\xi}\right) = 0$ è la equazione differenziale delle curve date, quella delle richieste traiettorie è

$$\psi\left(x, y, \frac{dx}{dy}\right) = 0.$$

Così ad esempio, date le rette $\eta = a\xi$, la cui equazione differenziale è $\eta = \frac{d\eta}{d\xi}\xi$, la equazione differenziale delle nostre traiettorie è $y = \frac{dx}{dy} x$, il cui integrale $y^2 - x^2 = C$ rappresenta delle iperboli equilatere.

5) *Traiettorie ortogonali delle spirali d' Archimede* $r = \varphi + a$.

L'equazione differenziale di queste curve, che si ottengono tutte dalla spirale d'Archimede $r = \varphi$ quando questa ruota intorno al polo, essendo $\frac{dr}{d\varphi} = 1$, quella delle traiettorie ortogonali è $-\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\theta} = 1$, il cui integrale $\rho = \frac{1}{\theta + C}$ rappresenta delle spirali iperboliche, che

si ottengono dalla spirale iperbolica $\rho\theta = 1$ quando questa ruota intorno al polo.

6) *Traiettorie sotto un angolo α delle lemniscate $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.*

L'equazione differenziale delle lemniscate essendo

$$\cos 2\varphi + r \operatorname{sen} 2\varphi \frac{d\varphi}{dr} = 0,$$

quella delle traiettorie si riduce alla

$$\rho \operatorname{sen}(2\theta + \alpha) \frac{d\theta}{d\rho} + \cos(2\theta + \alpha) = 0,$$

che, integrata, dà

$$\log \rho - \frac{1}{2} \log \cos (2\theta + \alpha) = \log C_1,$$

ossia

$$\rho^2 = C \cos(2\rho + \alpha),$$

Se si riferiscono queste curve al sistema polare il cui asse fa un angolo $-\frac{\alpha}{2}$ coll'asse polare primitivo, cioè se si pone $\rho = \rho_1$, $\theta = \theta_1 - \frac{\alpha}{2}$, si vede che le equazioni di queste traiettorie diventano le $\rho^2 = C \cos 2\theta_1$. In conseguenza: il sistema delle traiettorie, sotto un angolo α, del sistema delle nostre lemniscate è costituito da questo stesso sistema ruotato intorno al punto doppio comune di un angolo $-\frac{\alpha}{2}$. (Beltrami, Annali di mat. 1861).

Esercizi.

1. Si determinino le linee per le quali, in ogni loro punto, la somma della ordinata e della sottonormale è una data costante a.

La equazione delle linee è $x + y = C - a \log(y - a)$.

Se la somma della ordinata e della sottonormale deve essere una costante *qualunque*, allora l'equazione differenziale delle linee è $y' + y'^2 + y'' = 0$, e la equazione delle linee è $x + y = C_1 - C_2 \log($ [illegible]

2. Linee per le quali il raggio di curvatura è costante.

Tutti circoli $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = C_3^2$.

3. Linee per le quali è una data costante a la somma della normale geometrica e della sottonormale. Linee $y = a\,\frac{e^x + C}{e^x - C}$.

4. Linee per le quali il punto di mezzo della tangente geometrica è sulla retta $y = x$.

Le parabole $y^2 = C(y - x)$, che passano per l'origine delle coordinate ove sono tutte tangenti alla retta $y = x$; l'asse di ciascuna parabola è la retta $y = \frac{C}{2}$.

5. Problema precedente relativo al punto di mezzo della normale geometrica.

$$y^2 - xy + 2x^2 = C\,e^{\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2y-x}{x\sqrt{7}}}.$$

6. Linee per le quali l'area compresa tra l'asse delle x, la curva, un'ordinata fissa qualunque e l'ordinata y corrispondente ad una ascissa generica x, è uguale al cubo dell'ordinata y diviso per l'ascissa x.

Equaz. linee $(x^2 - 2y^2)^3 - Cx^2 = 0$.

Se l'area deve essere quella compresa tra l'ordinata y e la ordinata fissa corrispondente ad una data ascissa x_0, si ha la sola curva $(x^2 - 2y^2)^3 - x_0^4 x^2 = 0$.

7. Linea per la quale l'arco contato a partire dall'origine delle coordinate è $= \frac{3h}{2}\operatorname{sen}^2\alpha$, dove h è una costante e α l'angolo che la tangente alla estremità dell'arco fa coll'asse delle x.

L'equaz. diff. del problema è

$$(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = 3hy''\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,tg} y')\cos(\operatorname{arc\,tg} y'),$$

il cui integrale generale è $(x - C_1)^{\frac{2}{3}} + (y - C_2)^{\frac{2}{3}} = h^{\frac{2}{3}}$. Le costanti C_1, C_2 dovranno essere determinate in modo che la curva soddisfaccia alle altre condizioni del problema, cioè passi per l'origine delle coordinate e l'arco sia zero per $x = 0$; si trova così la curva $(x - h)^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = h^{\frac{2}{3}}$.

8. Determinare la curva per la quale $s = \frac{1}{2}h\alpha^2$, dove h indica l'ascissa del punto in cui la curva tocca l'asse della x, s l'arco con-

tato a partire da questo punto fino al punto generico M, ed α l'angolo della tangente in M alla curva coll'asse delle x.

La sviluppante di circolo

$$x = h(\cos\alpha + \alpha \operatorname{sen}\alpha), \qquad y = h(\operatorname{sen}\alpha - \alpha\cos\alpha).$$

9. Linee per le quali l'arco è in rapporto costante h col raggio di curvatura al suo estremo.

Le curve le coordinate dei punti delle quali sono

$$x - C_2 = C_1 e^{h\alpha}[h\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha], \; y - C_3 = C_1 e^{h\alpha}[h\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha].$$

che si riconoscono per spirali logaritmiche trasportando gli assi coordinati parallelamente a loro stessi nel punto di coordinate (C_2, C_3) e poi passando alle coordinate polari col polo in questo punto e coll'asse polare passante pel punto di coordinate $(C_1h, -C_1)$ rispetto al secondo sistema di assi. L'equazione delle curve è allora $\rho = C_1^2(1+h^2)e^{2h\alpha}$.

10. Linee per le quali il raggio di curvatura è uguale in ogni punto al raggio vettore.

I circoli col centro nel polo e le curve

$$\theta = \frac{1}{C_1}\sqrt{2\rho C_1 - C_1^2} - \operatorname{arc\,sen}\frac{\rho - C_1}{\rho} + C_2.$$

(Indicando μ l'angolo che la tangente in un punto di coordinate (ρ, θ) della curva fa col raggio vettore di quel punto è $\operatorname{tg}\mu = \rho\frac{d\theta}{d\rho}$, $\cos\mu = \frac{d\rho}{ds}$, $\operatorname{sen}\mu = \rho\frac{d\theta}{ds}$, dove al solito ds è l'elemento d'arco di curva. Si osservi perciò, che al raggio di curvatura R può darsi la forma $R = \frac{\rho d\rho}{d(\rho\operatorname{sen}\mu)} = \frac{\rho d\rho}{dp}$, dove $p = \rho\operatorname{sen}\mu$ è la distanza della tangente dal polo).

11. Linee per le quali la distanza della tangente dal polo è in rapporto costante $\frac{1}{\mu}$ col raggio vettore.

Le spirali logaritmiche $\rho = Ce^{\theta\sqrt{\mu^2-1}}$.

12. Linee per le quali la parte di tangente compresa tra il punto di contatto e quello nel quale la perpendicolare al raggio vettore

condotta pel polo taglia la tangente è in rapporto costante μ col raggio vettore.

Le spirali logaritmiche $\rho = Ce^{\frac{\theta}{\sqrt{\mu^2-1}}}$.

13. Linee per le quali il raggio di curvatura è una data funzione $f(\alpha)$ dell'angolo α che la tangente fa coll'asse delle ascisse.

$$x + C_1 = \int f(\alpha) \cos \alpha d\alpha, \quad y + C_2 = \int f(\alpha) \operatorname{sen} \alpha d\alpha.$$

Casi particolari:

$$f(\alpha) = \frac{a}{\cos^2 \alpha}, \text{ le catenarie } y + C_2 = \frac{a}{2}\left\{e^{\frac{x+c_1}{a}} + e^{-\frac{x+c_1}{a}}\right\};$$

$$f(\alpha) = \frac{a}{\operatorname{sen}^2 \alpha}, \text{ le parabole } (y + C_2)^2 = 2a(C_1 - x);$$

$$f(\alpha) = a\alpha, \text{ le sviluppanti di circolo } \begin{cases} x + C_1 = a(\cos \alpha + \alpha \operatorname{sen} \alpha) \\ y + C_2 = a(\operatorname{sen} \alpha - \alpha \cos \alpha). \end{cases}$$

14. Linee per le quali il raggio di curvatura è uguale alla distanza della tangente dal polo.

$$C_1 \theta + C_2 = \sqrt{\rho^2 - C_1^2} + C_1 \operatorname{arc\,sen} \frac{C_1}{\rho}.$$

15. Linee per le quali il settore compreso tra l'asse polare la curva ed il raggio vettore 0M è proporzionale all'area del triangolo formato da 0M, dalla normale in M alla curva e dalla sottonormale polare di M.

Equaz. diff. $\frac{d^2(\rho)}{d\theta^2} - \frac{2}{k}\rho^2 = 0.$

Le linee sono $\rho^2 = C[e^{\theta\sqrt{\frac{2}{k}}} + e^{-\theta\sqrt{\frac{2}{k}}}]$ se $k > 0$, e $\rho^2 = C \cos\left(x\sqrt{\frac{2}{-k}}\right)$ se $k < 0$. In particolare per $k = -\frac{1}{2}$ si hanno le lemniscate $\rho^2 = C \cos 2\theta$.

16. Linee per le quali l'arco contato a partire dal punto, la cui ascissa è a, è in rapporto costante $\frac{1}{m}$ col segmento che la tangente

all'estremità dell'arco determina sull'asse delle y a partire dall'origine;

$$y = \frac{C}{2(1-m)}(x^{1-m} - ma^{1-m}) - \frac{1}{2C(1+m)}(x^{1+m} + ma^{1+m});$$

e, se $m = \pm 1$, $y = \frac{C}{2}\left[1 + \log\frac{x}{a}\right] - \frac{1}{4C}(x^2 + a^2)$.

Se l'arco deve essere contato a partire dal punto, di coordinate (a, b), sulla linea, allora si hanno le due sole linee che si ottengono dall'equazione precedente facendovi $C = \frac{b \pm \sqrt{a^2+b^2}}{a^{1-m}}$.

17. Le traiettorie ortogonali dei circoli che toccano una data retta in un suo punto fisso sono i circoli tangenti in quel punto alla perpendicolare condotta per esso alla retta data.

18. Le traiettorie ortogonali di un sistema di ellissi omofocali formano il sistema delle iperboli omofocali.

19. Le traiettorie ortogonali delle spirali logaritmiche $\rho = ae^{m\theta}$, se si prende a pel parametro variabile, sono le spirali logaritmiche $\rho = Ce^{-\frac{\theta}{m}}$, e se si prende m per parametro variabile sono le curve $\rho = ae^{\sqrt{C-\theta}}$.

20. Le traiettorie ortogonali dei circoli col centro sull'asse delle y e tangenti alle rette $y = mx$, $y = -mx$ sono le curve

$$(y \pm \sqrt{y^2 - m^2x^2})(y\sqrt{1+m^2} \mp \sqrt{(y^2 - m^2x^2)})^{\sqrt{1+m^2}} = Cx.$$

Se $m = \sqrt{n^2 - 1}$, dove n è intero, esse sono algebriche.

21. Traiettorie oblique, ad angolo $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\mu$, delle curve $y = ax^n$. La equazione differenziale delle traiettorie è

$$(\mu x + ny)\,dx = (x - \mu ny)dy.$$

Se $n = 1$, le linee date sono rette, e le traiettorie spirali logaritmiche. (Ciò anche si ricava immediatamente trattando questo problema speciale in coordinate polari).

Se $n = -1$, le curve date sono iperboli equilatere aventi gli assi coordinati per assintoti, e le traiettorie sono le iperboli equilatere $\mu(y^2 - x^2) + 2xy = C$; queste traiettorie sono costituite da primitivo sistema di iperboli equilatere ruotato intorno al centro comune di un angolo $\frac{\alpha}{2}$. (Beltrami).

Se le traiettorie debbono essere ortogonali, esse sono le ellissi iperboli $x^2 + ny^2 = C$.

22. Si determinino, pel sistema di curve $y = ax^n$, le traiettorie ili che, in ogni punto di incontro con una curva del sistema, le ngenti alla curva e alla traiettoria siano simmetricamente situate ispetto alle coordinate di quel punto.

Le traiettorie richieste sono le linee $x^n y = C$. Per $n = 1$ le linee ate sono rette e le traiettorie iperboli equilatere.

23. Le traiettorie oblique delle curve ottenute dalla curva $y = f(x)$, uando essa si muove in modo che i suoi punti descrivano rette arallele all'asse y, sono le linee $y + C = \int \frac{f'(x) \cot \alpha + 1}{\cot \alpha - f'(x)} dx$. Ad s.: se la curva è la parabola $y^2 = 2px$, le traiettorie ortogonali sono e parabole semicubiche $(y + C)^2 = \frac{8}{9p} x^3$.

24. Le traiettorie oblique delle curve ottenute dalla $\theta = f(\rho)$, uando essa ruota intorno al polo in modo che i suoi punti descrirano circonferenze col centro nel polo, sono le linee

$$\theta + C = \int \frac{1 + \rho f'(\rho) \cot \alpha}{\cot \alpha - \rho f'(\rho)} \frac{d\rho}{\rho}.$$

Ad esempio: se la curva data è la spirale logaritmica $\rho = e^{m\theta}$, le traiettorie ortogonali sono le spirali logaritmiche $\rho = e^{-\frac{\theta + c}{m}}$, se la curva è la spirale logaritmica $\rho = e^{\theta}$, ed $\alpha = \frac{\pi}{4}$, le traiettorie sono i circoli col centro nel polo; se la curva è un circolo di raggio r e che passa pel polo, le traiettorie ortogonali sono le linee

$$\theta + C = \text{arc cos} \frac{\rho}{2r} - \frac{1}{\rho} \sqrt{4r^2 - \rho^2}.$$

25. La equazione differenziale delle traiettorie ortogonali delle tangenti alla curva $f(\xi, \eta) = 0$ (sviluppanti della curva data) si ottiene eliminando ξ, η tra le equazioni

$$f(\xi, \eta) = 0, \; 1 + y' \frac{d\eta}{d\xi} = 0, \; y'(y - \eta) + x - \xi = 0.$$

Soluzioni singolari delle equazioni differenziali di primo ordine.

217. Senza entrare in particolari, ci proponiamo di dare un breve cenno, per le equazioni differenziali di primo ordine, delle soluzioni singolari, che abbiamo visto presentarsi nella equazione di CLAIRAUT, cioè di quelle funzioni, non contenenti costante arbitraria, che soddisfanno ad una data equazione e che non si possono ricavare dall'integrale generale attribuendovi alla costante arbitraria un particolare valore.

Sia $\varphi(x, y, C) = 0$ l'integrale generale della equazione differenziale $f(x, y, y') = 0$ di guisa che eliminando C tra la $\varphi = 0$ e la $\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0$ si ottenga $\mu f = 0$, dove μ non contiene y'. Otterremo lo stesso risultato anche supponendo C tale funzione di x, y che sia $\frac{\partial \varphi}{\partial C} \frac{dC}{dx} = 0$, giacchè allora derivando rapporto ad x la $\varphi = 0$ otterremo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial \varphi}{\partial C} \left[\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' \right] = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0,$$

ed il risultato della eliminazione di C tra questa equazione e la $\varphi = 0$ sarà ancora, come quando supponevasi C costante, $\mu f = 0$. Ora alla $\frac{\partial \varphi}{\partial C} \frac{dC}{dx} = 0$ possiamo soddisfare prendendo $\frac{dC}{dx} = 0$ cioè C costante, ed allora la $\varphi = 0$ è ancora l'integrale generale, oppure prendendo $\frac{\partial \varphi}{\partial C} = 0$, equazione che determina C come funzione di x, y, la quale funzione in casi speciali solo potrà ridursi ad una costante. Ponendo per C nella $\varphi = 0$ il valore ricavato dalla $\frac{\partial \varphi}{\partial C} = 0$, ossia eliminando C tra la

$$\varphi(x, y, C) = 0 \quad \text{e la} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial C} = 0$$

si ottiene una equazione $\psi(x, y) = 0$ che dà le soluzioni singolari della proposta equazione. Notiamo però che, se, per considerare il caso più generale, si suppone la ψ scissa in fattori di determinata m m,

alcuni di questi e anche tutti eguagliati a zero potranno non dare una soluzione singolare, perchè potrebbe qualcuno essere contenuto come fattore in μ, e potrebbe la $\psi = 0$ non dare alcuna soluzione singolare perchè pel valore di C, funzione di x, y, che si trae da $\frac{\partial \varphi}{\partial C} = 0$, potrebbero annullarsi $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ e quindi non potremo più considerare la equazione $\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0$. Cosichè, ottenuta la $\psi = 0$, bisognerà sempre provare i suoi fattori per riconoscere colla diretta sostituzione nella equazione proposta se ad essi corrispondano o no soluzioni singolari. Notiamo ancora che potrà avvenire che la $\psi = 0$ sia un integrale particolare, e ciò quando il valore che si trae da $\frac{\partial \varphi}{\partial C} = 0$ riesca una costante.

Geometricamente le soluzioni singolari della $f = 0$ corrispondono all'inviluppo delle linee $\varphi(x, y, C) = 0$ (V. pag. 105), e propriamente a quella parte dell'inviluppo per la quale in ogni suo punto la tangente coincide con la tangente della inviluppata che passa per esso.

Le soluzioni singolari possiamo anche dedurle dalla equazione differenziale proposta, senza conoscerne l'integrale generale. Invero, osserviamo che se dalla equazione differenziale proposta

$$f(x, y, y') = 0 \text{ e dalla } \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0$$

eliminiamo y' otteniamo una equazione il cui primo membro contiene $\varphi(x, y, C)$ come fattore di guisa che potremo considerare la $f(x, y, y') = 0$ come l'integrale della $f = 0$ se la y' è data dalla $\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0$. Derivando, in questa ipotesi, la $f = 0$ rispetto a C avremo $\frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dC} = 0$, e per eliminare C tra la $f = 0$ e la $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ basterà eliminare tra loro y'.

Il risultato della eliminazione dà, colle riserve già accennate, la soluzione singolare della $f(x, y, y') = 0$.

A dilucidazione della teoria, che abbiamo sommariamente esposta, diamo alcuni

Esempi

1) Si determinino le linee per le quali, in ogni punto, la lun-

ghezza della normale è media proporzionale tra una quantità data a e la sottonormale aumentata dell' ascissa (LEIBNIZ).

L' equazione differenziale del problema è

$$y^2(1+y'^2)=a(x+yy'),$$

ossia, posto $\frac{dy}{dx}=p$,

(1) $ax=y^2(1+p^2)-apy$, da cui, differenziando,

$(2py-a)\left(\frac{p^2+1}{p}dy+y\,dp\right)=0$. Eliminando p tra la (1) e l' integrale della equazione $\frac{p^2+1}{p}dy+y\,dp=0$, abbiamo l' integrale generale $y^2+(x-C)^2=aC$, che rappresenta dei circoli col centro sull' asse delle x; eliminando p tra la (1) e la $2py-a=0$, abbiamo analogamente a quanto succede per la equazione di CLAIRAUT, l' integrale singolare $y^2=a\left(x+\frac{a}{4}\right)$, che rappresenta una parabola avente per asse l' asse delle x. Questa soluzione singolare si ottiene ancora come subito si può verificare, eliminando C tra la equazione integrale generale e la sua derivata $-2(x-C)=a$ rispetto C, ed anche eliminando p tra la (1) e la sua derivata $2yp-ay=0$ rispetto a p.

La parabola, che corrisponde alla soluzione singolare, è l' inviluppo dei circoli, che corrispondono all' integrale generale.

2) Curva per la quale la parte di normale compresa tra il punto sulla curva e la perpendicolare nel polo al raggio vettore del punto (normale polare geometrica) è una costante data $2a$.

La equazione differenziale del problema è

$$\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2=4a^2, \tag{2}$$

il cui integrale generale è $\rho=2a\,\mathrm{sen}(C\pm\theta)$, od anche

$$\rho=2a[C\cos\theta\pm\mathrm{sen}\,\theta\sqrt{1-C^2}],$$

(in coordinate cartesiane $(x-a\,C)^2+(y\mp a\sqrt{1-C^2})^2=a^2$) che rappresenta dei circoli che passano pel polo e che hanno il centro sul circolo $\rho=a$. La soluzione singolare si ricava subito eliminando $\frac{d\rho}{d\theta}$ tra la (1) e la $2\frac{d\rho}{d\theta}=0$ ottenuta derivando la (2) rispetto a $\frac{d\rho}{d\theta}$, e si ottiene così $\rho^2=4a^2$ ossia $\rho=2a$.

3) La $y = 1 + x - \frac{x^2}{4}$ soddisfa alla equazione differenziale $y = x + xy' + y'^2$; è essa un integrale particolare o una soluzione singolare?

Per riconoscere ciò osserviamo che l'integrale generale della proposta equazione è dato dalle due equazioni

$$(3) \qquad y = x + xp + p^2, \; x = 2(1 - p) + Ce^{-p}.$$

Ora se facciamo $C = 0$ ed eliminiamo p tra la prima di queste equazioni e la $x = 2(1 - p)$, otteniamo appunto $y = 1 + x - \frac{x^2}{4}$, che, corrispondendo a $C = 0$, non è una soluzione singolare ma un integrale particolare.

Per trovare le soluzioni singolari, ove esistano, eliminiamo y' tra la data equazione e la sua derivata rispetto ad y', $x + 2y' = 0$; otteniamo così $y = x - \frac{x^2}{4}$, che però non soddisfa alla equazione differenziale.

Per ottenere la soluzione singolare dall'integrale generale, dovremo quì eliminare p e C tra le (3) e la $e^{-p} = 0$, ottenuta derivando la seconda delle (3) rapporto a C, ossia eliminare p tra la prima delle (3) e la $e^{-p} = 0$; ma quest'ultima non può essere soddisfatta che da valori infiniti e positivi di p. Quindi non otteniamo, avuto riguardo ai valori di p che si ricavano dalla prima delle (3), neanche così alcuna soluzione singolare.

4) Se l'integrale generale d'una equazione differenziale di primo ordine è della forma $\varphi(x, y) = C$, dove φ è *funzione univalente*, la equazione non ammette soluzione singolare, perchè derivando rapporto a C avremo il risultato $1 = 0$ (Confrontare es. 2) pag. 109).

Così pure si riconoscerà subito che una equazione differenziale della forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, dove f è *funzione univalente*, non ammette soluzione singolare.

5) L'integrale generale della equazione $9yy'^2 - 4 = 0$ è $(x - C)^2 - y^3 = 0$, dal quale otteniamo colla solita eliminazione, $y = 0$, che però non è soluzione singolare non soddisfacendo alla proposta equazione (Vedi pag. 110, es. 3).

6) L'integrale generale della equazione

$$4(1+y)-y^2(3+5y)^2y'^2=0 \text{ è } x+C=\int\frac{y(4+5y)}{2\sqrt{1+y}}dy=y^2\sqrt{1+y},$$

ossia $(x+C)^2=y^4(1+y)$. Eliminando C tra questa ultima equazione e la $2(x+C)=0$, abbiamo $y^4(1+y)=0$. Il fattore $y=0$ non soddisfa alla proposta equazione, e l'altro $1+y=0$ ci dà la soluzione singolare, che si ottiene subito anche dall'equazione differenziale.

Esercizi

1. Curva per la quale la perpendicolare da un punto di coordinate (a, b) sulle sue tangenti è di lunghezza costante r.

L'integrale generale dà le rette $y-b=C(x-a)\pm r\sqrt{1+C^2}$, e la soluzione singolare è il circolo $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, che è l'inviluppo delle rette.

2. Curve per le quali è una costante $\frac{1}{2}a^2$ l'area del triangolo formato dalla tangente e dagli assi.

Int. gen. $y=aC-C^2x$, soluzione singolare $xy=\frac{1}{4}a^2$.

3. $(x+yy')^2=x^2(1+y'^2)(1+m^2)$; int. gen. $x^2+(y-C)^2=\frac{C^2}{1+m^2}$, da cui l'int. singolare $y^2=m^2x^2$; dall'equazione differenziale ricavasi, col metodo indicato nel testo, $\frac{(1+m^2)x^2(y^2-m^2x^2)}{(1+m^2)x^2-y^2}=0$: $x=0$ non soddisfa alla equazione. (Conf. col problema 20 a p. 570).

4. Linee tali che il prodotto della lunghezza delle perpendicolari da due punti fissi $(-m, 0)$, $(m, 0)$ sulle tangenti sia una costante k^2 (Lagrange).

Int. gen. $y=Cx+\sqrt{C^2(m^2\pm k^2)\pm k^2}$, dove al radicale si sottintende preposto il segno $\pm$; soluzione singolare la ellisse $\frac{x^2}{m^2+k^2}+\frac{y^2}{k^2}=1$, e la iperbole $\frac{x^2}{m^2-k^2}-\frac{y^2}{k^2}=1$ reale solo se $m^2>k^2$.

5. $2y^2y'^2+2xyy'+x^2+y^2-1=0$ ossia $(2yy'+x)^2=2(1-y^2)$. Si ponga $1-y^2=z$, $2z-x^2=u$. L'integrale generale

$(x-C)^2+y^2=1-C^2$, $1-C^2>0$, rappresenta i circoli descritti col centro sull'asse delle x e con raggi uguali alle rispettive corde, perpendicolari ad esse, del circolo $x^2+y^2=1$. La soluzione singolare, inviluppo dei circoli, è l'ellisse $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

6. $(1+y'^2)y'=2a$; integ. gen. le cicloidi $x+C=a \text{ arc cos } \frac{a-y}{a} \mp \sqrt{2ay-y^2}$; soluz. sing. $2a-y=0$.

7. $y=a\sqrt{1+y'^2}$; int. gen. $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x+c}{a}}+e^{-\frac{x+c}{a}}\right)$, soluzione sing. $y^2=a^2$.

8. $yy'^2-2xy'+y=0$; int. gen. $y^2=2Cx-C^2$, sol. singolare $y^2-x^2=0$

9. $3y'^3-x^4y'+2x^3y=0$; int. gen. $2y-Cx^2+3C^3=0$; soluz. sing. $y=\pm\frac{x^3}{9}$.

10. $xy^2y'^2-y^3y'+x=0$; int. gen. $1+x^2C^2=Cy^2$; sol. sing. $y^4=4x^2$.

11. $y'^3+by'^2=a(y+bx)$; derivando rapporto ad y' abbiamo $y'(3y'+2b)=0$; da $y'=0$ ricaviamo $y+bx=0$, che soddisfa alla equazione proposta. Si provi che non è soluz. singolare, ma integrale particolare corrispondente al valore $C=-\infty$ della costante nell'integrale generale.

Equazioni a differenziali totali.

218. Nelle equazioni differenziali fin qui studiate comparivano due sole variabili; occupiamoci ora delle equazioni differenziali contenenti più di due variabili.

Comincieremo questo studio dando un cenno delle *equazioni di primo ordine a differenziali totali*, che sono della forma

$$Pdx+Qdy+Rdz+Tdu+\ldots=0$$

dove P, Q, R,... sono funzioni di $x, y, z, u, \ldots\ldots$

Sia, in primo luogo, una equazione

$$(1) \qquad P dx + Q dy + R dz = 0$$

fra tre variabili. Da una equazione $\varphi(x, y, z) = C$ in termini finiti ricaviamo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0,$$

e, se le derivate $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ hanno un fattore comune μ, l'ultima equazione potrà essere liberata da esso. In ogni modo otteniamo una equazione della forma (1).

Inversamente, però, una equazione (1) non conduce necessariamente ad una relazione della forma $\varphi(x, y, z) = C$; giacchè occorre perciò che le P, Q, R siano proporzionali alle derivate rapporto ad x, y, z di una certa funzione φ. Quando dalla (1) si possa ricavare una equazione $\varphi(x, y, z) = C$, questa dicesi l'integrale generale della (1), e la proposta equazione a differenziali totali dicesi allora *integrabile*, o che è deducibile da una unica equazione primitiva.

Ora *la condizione necessaria e sufficiente affinchè la* (1) *sia integrabile è che tra* P, Q, R *passi la relazione*

$$(2) \qquad P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0.$$

La condizione è necessaria. Invero ammessa l'esistenza della equazione $\varphi(x, y, z) = C$ tale che

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mu P, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mu Q, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \mu R,$$

abbiamo

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \quad \text{ossia} \quad \mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y}.$$

ed in modo analogo

$$\mu\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) = R\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial z}, \quad \mu\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) = P\frac{\partial \mu}{\partial z} - R\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

moltiplicando le tre ultime equazioni rispettivamente per R, P, Q e sommando otteniamo la (2).

La condizione è sufficiente. Invero consideriamo nella (1) come costante una delle variabili, poniamo la z, ed integriamo la equazione differenziale

$$Pdx + Qdy = 0$$

che ne risulta. Sia $f(x, y, z) = \psi(z)$ il suo integrale, ove in luogo della costante arbitraria abbiamo posto la funzione arbitraria $\psi(z)$ di z; allora è

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mu P, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \mu Q. \tag{3}$$

Dico che, ammessa la (2), si potrà determinare la $\psi(z)$ in modo che risulti $\frac{\partial f}{\partial z} - \psi'(z) = \mu R$, ed allora la (1) sarà integrabile ed il suo integrale sarà $f(x, y, z) = \psi(z)$; dovrà perciò $\psi'(z) = \frac{\partial f}{\partial z} - \mu R$ essere funzione della sola z, quando nel secondo membro si sostituisca per y il valore, espresso per x e z, ricavato dalla $f(x, y, z) = \psi(z)$, cioè dovremo avere $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \mu R\right) = 0$. È ciò che effettivamente ha luogo, giacchè abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \mu R\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\frac{\partial y}{\partial x} - \mu\left(\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

$$- R\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right),$$

la quale, essendo $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{P}{Q}$ ed avuto riguardo alle formole

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \mu\frac{\partial P}{\partial z} + P\frac{\partial \mu}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \mu\frac{\partial Q}{\partial z} + Q\frac{\partial \mu}{\partial z}$$

che si ricavano dalle (3), diventa

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}-\mu R\right)=\frac{\mu}{Q}\left\{Q\frac{\partial P}{\partial z}-P\frac{\partial Q}{\partial z}-Q\frac{\partial R}{\partial x}+P\frac{\partial R}{\partial y}\right.$$

$$\left.-\frac{R}{Q}\left(Q\frac{\partial \mu}{\partial x}-P\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)\right\},$$

ossia, in virtù della (2),

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}-\mu R\right)=\frac{R}{Q}\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mu-Q\frac{\partial \mu}{\partial x}+P\frac{\partial \mu}{\partial y}\right\}$$

$$=\frac{R}{Q}\left\{\frac{\partial(P\mu)}{\partial y}-\frac{\partial(Q\mu)}{\partial x}\right\}.$$

L'ultimo membro essendo zero in virtù delle (3), abbiamo appunto $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}-\mu R\right)=0$. Ed avremo allora $\psi(z)=\int\left(\frac{\partial f}{\partial z}-\mu R\right)dz+C$, cosichè, non solo rimane dimostrato che la (2) è condizione sufficiente alla integrabilità della (1), ma ne abbiamo ancora trovato l'integrale generale

$$f(x,y,z)=\int\left(\frac{\partial f}{\partial z}-\mu R\right)dz+C.$$

Si noti ancora come dal metodo precedente risulti che si può fare a meno, ove ciò torni opportuno, di verificare se è soddisfatta la (2), perchè se $\frac{\partial f}{\partial z}-\mu R$ si può ridurre a funzione della sola z la proposta equazione è integrabile, altrimenti non lo è.

Esempio. — Data la equazione

$$z[1-(x+y+z)\cos(x+y+z)](dx+dy+dz)$$

$$+(x+y+z)[\operatorname{sen}(x+y+z)-\log(x+y+z)]\,dz=0,$$

si verifica subito che è soddisfatta la condizione di integrabilità. Per integrarla poniamo in essa $dz=0$, cosichè si riduca a

$$z[1-(x+y+z)\cos(x+y+z)](dx+dy)=0,$$

da cui $dx + dy = 0$, il cui integrale è $x + y = \psi(z)$. Cosichè, essendo $\mu = \dfrac{1}{z[1 - (x+y+z)\cos(x+y+z)]}$, dovremo ricavare $\psi(z)$ dalla equazione

$$\psi'(z) = -\mu R = -1 - \frac{(x+y+z)[\operatorname{sen}(x+y+z) - \log(x+y+z)]}{z[1 - (x+y+z)\cos(x+y+z)]}$$

$$= -1 - \frac{[\psi(z)+z]\{\operatorname{sen}[\psi(z)+z] - \log[\psi(z)+z]\}}{z\{1 - [\psi(z)+z]\cos[\psi(z)+z]\}},$$

che, posto $\psi(z) + z = u$, diviene $\dfrac{du}{dz} + \dfrac{u(\operatorname{sen} u - \log u)}{z(1 - u\cos u)} = 0$, da cui $\log(\operatorname{sen} u - \log u) = \log(Cz)$, ossia $\operatorname{sen} u - \log u = Cz$, $\operatorname{sen}[\psi(z)+z] - \log[\psi(z)+z] = Cz$; eliminando $\psi(z)$ tra questa equazione e la $x + y = \psi(z)$ otteniamo $\operatorname{sen}(x+y+z) - \log(x+y+z) = Cz$, che è l' integrale completo della proposta equazione a differenziali totali.

219. Se la condizione di integrabilità non è soddisfatta, la equazione

$$(1) \qquad P dx + Q dy + R dz = 0$$

non può, da sola, condurre ad una equazione in termini finiti $\varphi(x,y,z) = C$; ma ciò avverrà se la si considera unitamente ad un' altra equazione differenziale, o ad un' altra equazione in termini finiti tra le variabili x, y, z. Il caso in cui alla (1) si aggiunga una equazione differenziale appartiene allo studio delle equazioni differenziali simultanee. che verrà fatto in seguito. Supponiamo perciò si aggiunga una equazione $\psi(x, y, z) = 0$. Questa equazione ci permette di esprimere z e dz mediante x, y, e dx, dy, cosichè la (1) assumerà la forma

$$M dx + N dy = 0$$

il cui integrale $F(x, y, C) = 0$ unitamente alla $\psi(x, y, z) = 0$ costituirà una soluzione della equazione (1).

Esempio. — La equazione

$$z dx - x^2 dy + x dz = 0$$

non soddisfa alla condizione di integrabilità. Poniamo tra x, y, z

la relazione $xz = f(x)$; allora la equazione proposta si riduce alla $f'(x)dx - x^2 dy = 0$, il cui integrale

$$\int \frac{f(x)}{x^2} dx - y = C$$

forma colla $xz = f(x)$ una soluzione della proposta equazione.

220. Le considerazioni precedenti si estendono facilmente al caso di una equazione fra n variabili

$$(1) \qquad P_1 dx_1 + P_2 dx_2 + P_3 dx_3 + \ldots + P_n dx_n = 0,$$

dove le P sono funzioni delle x.

La condizione necessaria e sufficiente alla integrabilità della equazione (1) è che siano verificate le $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ equazioni che si ottengono dalla

$$(2) \quad P_\lambda \left(\frac{\partial P_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial P_\nu}{\partial x_\mu}\right) + P_\mu \left(\frac{\partial P_\nu}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial P_\lambda}{\partial x_\nu}\right) + P_\nu \left(\frac{\partial P_\lambda}{\partial x_\mu} - \frac{\partial P_\mu}{\partial x_\lambda}\right) = 0$$

ponendovi per λ, μ, ν tre diversi dei numeri $1, 2, 3 \ldots n$. La condizione è necessaria, perchè, se esiste l'integrale $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) = C$ della (1), dalle eguaglianze $\frac{\partial \varphi}{\partial x_h} = k P_h \, (h = 1, 2 \ldots n)$, dove k è un certo coefficiente di proporzionalità, risultano subito le (2). Per dimostrare che la condizione è sufficiente si considera la equazione $P_1 dx_1 + P_2 dx_2 = 0$ ottenuta dalla (1) col supporvi costanti le $x_3, x_4, \ldots x_n$; dal suo integrale

$$(3) \qquad f(x_1, x_2 \ldots x_n) = \psi(x_3, x_4, \ldots x_n),$$

dove in luogo della costante arbitraria abbiamo posta la funzione ψ si ricava $k P_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}$, $k P_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}$; si proverà poi che, ponendo nelle $\frac{\partial f}{\partial x_\lambda} - k P_\lambda = \frac{\partial \psi}{\partial x_\lambda} \, (\lambda = 3, 4 \ldots n)$ per x_2 il valore ricavato dalla (3), si ha $\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\lambda} - k P_\lambda\right) = 0$, cosichè queste $\frac{\partial \psi}{\partial x_\lambda}$ risultano

funzioni solo delle $x_3, x_4 \ldots x_n$; allora l'integrale della

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial\psi}{\partial x_4} dx_4 + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial x_n} dx_n ,$$

che è una equazione a differenziali totali integrabile tra le $n-1$ variabili $\psi, x_3, x_4 \ldots x_n$, determina ψ, e per integrarla si userà lo stesso procedimento riducendo l'integrazione a quella di una equazione tra $n-2$ variabili e così di seguito; la (3), postovi per ψ la funzione ora determinata, sarà l'integrale generale della (1).

Notiamo in ultimo che delle equazioni (2) solo $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ sono tra loro indipendenti, cioè tutte quelle che contengono una qualunque determinata delle P, poniamo la P_n. Infatti da tre di esse

$$P_n\left(\frac{\partial P_\lambda}{\partial x_\mu} - \frac{\partial P_\mu}{\partial x_\lambda}\right) + P_\lambda\left(\frac{\partial P_\mu}{\partial x_n} - \frac{\partial P_n}{\partial x_\mu}\right) + P_\mu\left(\frac{\partial P_n}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial P_\lambda}{\partial x_n}\right) = 0,$$

$$P_n\left(\frac{\partial P_\lambda}{\partial x_\nu} - \frac{\partial P_\nu}{\partial x_\lambda}\right) + P_\lambda\left(\frac{\partial P_\nu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial P_n}{\partial x_\nu}\right) + P_\nu\left(\frac{\partial P_n}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial P_\lambda}{\partial x_n}\right) = 0,$$

$$P_n\left(\frac{\partial P_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial P_\nu}{\partial x_\mu}\right) + P_\mu\left(\frac{\partial P_\nu}{\partial x_n} - \frac{\partial P_n}{\partial x_\nu}\right) + P_\nu\left(\frac{\partial P_n}{\partial x_\mu} - \frac{\partial P_\mu}{\partial x_n}\right) = 0,$$

moltiplicando la prima per P_ν, la seconda per $-P_\mu$, la terza per P_λ e sommando si ottiene la

$$P_\nu\left(\frac{\partial P_\lambda}{\partial x_\mu} - \frac{\partial P_\mu}{\partial x_\lambda}\right) + P_\mu\left(\frac{\partial P_\nu}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial P_\lambda}{\partial x_\nu}\right) + P_\lambda\left(\frac{\partial P_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial P_\nu}{\partial x_\mu}\right) = 0,$$

che non contiene P_n.

Esempi

1) $dx + dy + dz + du + 2(x + y + z + u)(xdx + ydy + zdz + udu) = 0.$

Sono verificate le condizioni di integrabilità. Poniamo z ed u costanti ed integriamo la equazione

$$dx + dy + 2(x + y + z + u)(xdx + ydy) = 0;$$

perciò, posto $x + y = v$, $x^2 + y^2 = w$, essa diviene

$dv + (v + z + u)\,dw = 0$, da cui $\log(v + z + u) + w\,C$, e

$\log(x + y + z + u) + x^2 + y^2 = \psi(z, u)$, e quindi $k = \dfrac{1}{x + y + z + u}$.

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{1}{x+y+z+u} - \frac{1}{x+y+z+u}[1 + 2z(x+y+z+u)] = -2z, \quad \frac{\partial\psi}{\partial u} = -2u.$$

$$d\psi = -2z\,dz - 2u\,du, \quad \psi = -z^2 - u^2 + C;$$

e perciò

$$\log(x + y + z + u) + x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = C,$$

ossia

$$e^{x^2+y^2+z^2+u^2}(x + y + z + u) = C_1$$

è l'integrale generale della proposta equazione.

Si può arrivare subito a questo risultato ponendo nella data equazione $x + y + z + u = u_1$, $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = v_1$, cosichè essa diviene $du_1 + u_1 dv_1 = 0$, da cui $u_1 e^{v_1} = C$.

2) Se nella equazione integrabile

$$P_1 dx_1 + P_2 dx_2 + \ldots + P_n dx_n = 0$$

le P sono funzioni omogenee di grado s delle x, giova porre $x_1 = y_1 x_n$, $x_2 = y_2 x_n$, ... $x_{n-1} = y_{n-1} x_n$, cosichè $P_1 = x_n^s Q_1$. $P_2 = x_n^s Q_2$ .... dove le Q sono funzioni delle $y_1, y_2 \ldots y_{n-1}$, e la equazione proposta diviene

$$(Q_1 dy_1 + Q_2 dy_2 + \ldots + Q_{n-1} dy_{n-1})x_n + (Q_1 y_1 + Q_2 y_2 + \ldots + Q_{n-1} y_{n-1} + Q_n)dx_n = 0$$

Se $Q_1 y_1 + Q_2 y_2 + \ldots + Q_{n-1} y_{n-1} + Q_n = 0$, l'equazione si riduce alla equazione integrabile

$$Q_1 dy_1 + Q_2 dy_2 + \ldots + Q_{n-1}\,dy_{n-1} = 0$$

con $n - 1$ variabili; altrimenti abbiamo l'equazione

$$\frac{dx_n}{x_n} + \frac{Q_1 dy_1 + Q_2 dy_2 + \ldots + Q_{n-1}\,dy_{n-1}}{Q_1 y_1 + Q_2 y_2 + \ldots + Q_{n-1} y_{n-1} + Q_n} = 0,$$

nella quale il secondo termine del primo membro è necessariamente un differenziale esatto.

Così ad esempio, posto $x = uz$, $y = vz$, l'equazione

$$(x^2 - y^2 + z^2)\,dx - z^2 dy + \left[z(y - x) + \frac{x}{z}(y^2 - x^2)\right] dy =$$

iviene $(u^2 - v^2 + 1)\,du - dv = 0$, della quale conoscendosi l'integrale particolare $v = u$, si ha l'integrale generale

$e^{-u^2}\,du + C = \dfrac{e^{-u^2}}{v - u}$, e quindi quello della proposta equazione

$$\int e^{-u^2}\,du + C = \frac{\zeta e^{-\frac{x^2}{z^2}}}{y - x} \quad \text{dove} \quad u = \frac{x}{\zeta}.$$

Così pure, posto $x = x_1 u$, $y = y_1 u$, $\zeta = \zeta_1 u$, la equazione

$$\zeta(y + \zeta)\,dx + \zeta(u - x)\,dy + y(x - u)\,d\zeta + y(y + \zeta)\,du = 0$$

liviene

$$\frac{du}{u} + \frac{\zeta_1(y_1 + \zeta_1)dx_1 + \zeta_1(1 - x_1)dy_1 + y_1(x_1 - 1)\,d\zeta_1}{(y_1 + \zeta_1)(\zeta_1 x_1 + y_1)} = 0$$

l cui integrale è $\dfrac{u(\zeta_1 x_1 + y_1)}{y_1 + \zeta_1} = C$, e quindi quello della proposta

$$\frac{\zeta x + uy}{y + \zeta} = C.$$

Esercizi

1. $\zeta dx - x^2 dy - x d\zeta = 0$, $\zeta + xy = Cx$.

2. $[2x + 1 + 3x^2(x^2 + x + \zeta)]\,dx + 2y(x^2 + x + \zeta)\,dy + d\zeta = 0$, $x^3 + y^2(x^2 + x + \zeta) = C$.

3. $(ay - b\zeta)\,dx + (c\zeta - ax)\,dy + (bx - cy)\,d\zeta = 0$, $\dfrac{ay - b\zeta}{c\zeta - ax} = C$.

4. $(y + u)(uy - \zeta^2)\,dx + (\zeta + x)(\zeta x - u^2)\,dy + (u + y)(uy - x^2)\,d\zeta$ $- (\zeta + x)(x\zeta - y^2)\,du = C$, $\dfrac{x\zeta + uy}{(x + \zeta)(u + y)} = C$.

5. $(y + u)\,dx + (\zeta + x)\,dy + (u + y)\,dx + (x + \zeta)\,du = 0$, $xy + y\zeta + \zeta u + ux = C$.

6. $\operatorname{sen} y\,dx + (x \cos y + \operatorname{sen} \zeta)\,dy + (y \cos \zeta + \operatorname{sen} u)\,d\zeta + \zeta \cos u\,du = 0$, $x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} \zeta + \zeta \operatorname{sen} u = C$.

7. $(y + \zeta + u^2)\,dx + x\,dy + x\,d\zeta + 2ux\,du + 2v\,dv = 0$, $x(y + \zeta) + xu^2 + v^2 = C$.

8. L'integrale generale della equazione

$xdx + ydy + cd\zeta \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} = 0$ considerata colla equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1$ è $x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) = C$.

9. La soluzione della equazione $2dx + xdy + yd\zeta = 0$ considerata colla equazione $y + \zeta \log \zeta + \varphi(\zeta) = 0$ è $\zeta = C$, e anche $x \log x + x\varphi'(\zeta) - y = 0$.

10. La equazione non integrabile $xdx + ydy + \zeta d\zeta + ydu = 0$ diviene, se vi si aggiunge l'equazione $u = f(y)$, una equazione integrabile nelle variabili x, y, ζ, il cui integrale è

$$x^2 + y^2 + \zeta^2 + 2yf(y) - 2\int f(y)\, dy = C.$$

11. La soluzione della equazione

$$(x^2 + y)\, dx + (x + \zeta)\, dy + y\,(d\zeta + du) = 0,$$

cui si aggiungono le equazioni $x + y + \zeta = u$, $y(\zeta + x) = a$, è $\frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} - a \log y = C$.

Sistemi di equazioni differenziali simultanee.

221. Passiamo ora a studiare brevemente i sistemi di equazioni differenziali simultanee, nelle quali la variabile indipendente sia una sola e le equazioni sieno tante quante le variabili dipendenti o funzioni incognite che in esse compariscono. Analogamente a quanto si è visto alla fine del n. 195, ad un sistema di k equazioni $F_1 = 0$, $F_2 = 0, \ldots F_k = 0$, nelle quali x è la variabile indipendente, e che contengono delle derivate al più d'ordine n della funzione y, al più d'ordine m della ζ etc., si può sostituire un sistema di $n + m + \ldots$ equazioni di primo ordine, ponendo

$$\frac{dy}{dx} = p_1, \quad \frac{dp_1}{dx} = p_2 \ldots \quad \frac{dp_{n-2}}{dx} = p_{n-1};$$

$$\frac{d\zeta}{dx} = q_1, \quad \frac{dq_1}{dx} = q_2, \ldots \quad \frac{dq_{m-2}}{dx} = q_{m-1}; \ldots$$

il quale sistema avrà, sotto certe condizioni, un sistema di $n+m+\ldots$ equazioni integrali contenenti altrettante costanti arbitrarie. Eliminando tra queste equazioni le $n+m+\ldots-k$ quantità $p_1, p_2 \ldots p_{n-1}$, $q_1, q_2, \ldots q_{m-1}, \ldots$ potremo ottenere k equazioni tra le variabili x, y, $z, \ldots$ con $n+m+\ldots$ costanti arbitrarie, che costituiranno il *sistema degli integrali generali o il sistema integrale* del proposto sistema di equazioni.

Però il metodo generale di integrazione pei sistemi di equazioni differenziali consiste nel ridurre, mediante opportune operazioni di derivazione e di eliminazione, le equazioni proposte a equazioni differenziali tra due sole variabili, che si integrano coi noti metodi. Così, ad esempio, date le equazioni

$$(1) \qquad y' = f(x, y, z), \qquad z' = \varphi(x, y, z),$$

dove indichiamo con apici le derivazioni rapporto ad x, deriveremo una delle due, poniamo la prima, rapporto ad x, ottenendo così

$$y'' = \frac{\partial f}{dx} + \frac{\partial f}{dy} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{dz} \varphi(x, y, z);$$

eliminando z tra questa equazione e la prima delle (1) abbiamo una equazione della forma $\psi(x, y, y', y'') = 0$, che non contiene più z nè le derivate di z, e che avrà un integrale della forma $F(x, y, C_1, C_2) = 0$. Da questo ricaviamo $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0$, e quindi, per la prima delle (1), $\frac{\partial F}{dx} + \frac{\partial F}{dy} f(x, y, z) = 0$. Questa ultima equazione, insieme alla $F(x, y, C_1, C_2) = 0$, forma il sistema degli integrali generali delle proposte equazioni (1).

Notiamo che in casi speciali gioveranno speciali artifizi.

Esempi.

1) Date le equazioni $y' = x + z'$, $z' = y$, derivando la seconda rapporto ad x, abbiamo $z'' = y' = x + z'$, ossia $z'' - z' = x$, il cui integrale è $z = -x - \frac{x^2}{2} + C_1 e^x + C_2$; questa equazione, e la $y = -1 - x + C_1 e^x$, che si trae della $z' = y$, costituiscono il sistema integrale delle proposte equazioni.

Oppure la prima equazione diviene, in virtù della seconda, $y' = x + y$ ect.

2) Siano le equazioni

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = nz - mu, \\[2ex] \dfrac{dz}{dx} = lu - ny, \\[2ex] \dfrac{du}{dx} = my - lz; \end{cases}$$

da esse ricaviamo $ly' + mz' + nu' = 0$ e quindi

$$(3)\qquad ly + mz + nu = \mathrm{A}$$

dove A è una costante, poi $yy' + zz' + uu' = 0$ e quindi

$$(4)\qquad y^2 + z^2 + u^2 = \mathrm{B}$$

dove B è un' altra costante. Derivando la prima delle (2), ed in virtù delle altre due, abbiamo

$$y'' = n(lu - ny) - m(my - lz) = l\mathrm{A} - y(l^2 + m^2 + n^2)$$

ossia, posto $\rho^2 = l^2 + m^2 + n^2$, $y'' + \rho^2 y = l\mathrm{A}$, equazione lineare tra le sole variabili x, y, il cui integrale è

$$(5)\qquad y = \mathrm{C}_1 \cos \rho x + \mathrm{C}_2 \operatorname{sen} \rho x + \frac{l\mathrm{A}}{\rho^2};$$

in modo analogo dalla seconda e terza delle (1) si ricava

$$(6)\quad \begin{cases} z = \mathrm{C}'_1 \cos \rho x + \mathrm{C}'_2 \operatorname{sen} \rho x + \dfrac{m\mathrm{A}}{\rho^2}, \\[2ex] u = \mathrm{C}''_1 \cos \rho x + \mathrm{C}''_2 \operatorname{sen} \rho x + \dfrac{n\mathrm{A}}{\rho^2}. \end{cases}$$

Tre qualunque delle (3), (4), (5), (6) formano il sistema integrale delle (2); gioverà assumere le (5), (6) perchè esprimono le y, z, u esplicitamente mediante x; ma le costanti C e le costanti A, B non sono tutte arbitrarie, tra loro esistono delle relazioni che si ricavano sostituendo i valori (5), (6) nelle (2) oppure giovandosi

lle (3), (4). Ponendo i valori (5), (6) nella (3) e dovendo questa ere soddisfatta qualunque sia il valore di x, dovremo avere

$$7) \qquad lC_1 + mC'_1 + nC''_1 = 0, \quad lC_2 + mC'_2 + nC''_2 = 0.$$

La (4), sostituiti in essa i valori (5), (6) ed avuto riguardo alle), ci dà, in modo analogo,

$$+C'^2_1+C''^2_1=C^2_2+C'^2_2+C''^2_2=B-\frac{A^2}{\rho^2}, \quad C_1C_2+C'_1C'_2+C''_1C''_2=0;$$

virtù di queste tre equazioni e delle (7) rimangono arbitrarie tre le delle otto costanti $A, B, C_1, C_2, C'_1, C'_2, C''_1, C''_2$.

3) Sia il sistema di due equazioni

$$\frac{dx}{y^n z^m - z^n y^m} = \frac{dy}{z^n x^m - x^n z^m} = \frac{dz}{x^n y^m - y^n x^m};$$

equazioni propriamente sono tre, ma una qualunque è conseguenza elle altre due. Abbiamo

$$\frac{x^n dx + y^n dy + z^n dz}{0} = \frac{dy}{y^n z^m - z^n y^m} = \ldots,$$

osichè dovremo avere

$$x^n\, dx + y^n dy + z^n dz = 0,$$

otando che questo procedimento tiene luogo dell'altro più esatto: alle equazioni proposte scritte nella forma

$$dx = \mu(y^n z^m - z^n y^m), \quad dy = \ldots$$

icaviamo $x^n\, dx + y^n\, dy + z^n\, dz = 0$.

In modo analogo

$$x^m\, dx + y^m dy + z^m\, dz = 0,$$

da queste si trae subito il sistema integrale

$$x^{n+1} + y^{n+1} + z^{n+1} = C_1, \qquad x^{m+1} + y^{m+1} + z^{m+1} = C_2.$$

4) Per integrare il sistema

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

dove

$$X = ax + by + cz + \alpha,$$

$$Y = a'x + b'y + c'z + \alpha',$$

$$Z = a''x + b''y + c''z + \alpha'',$$

giova introdurre una variabile ausiliaria, t, ponendo

$$\frac{dt}{t} = \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = \frac{ldx + mdy + ndz}{lX + mY + nZ} = \frac{ldx + mdy + ndz}{\lambda(lx + my + nz) + \gamma},$$

dove $\gamma = l\alpha + m\alpha' + n\alpha''$ e le λ, l, m, n sono quantità da determinarsi in modo che sia

$$(8) \quad \begin{cases} al + a'm + a''n = \lambda l, \\ bl + b'm + b''n = \lambda m, \\ cl + c'm + c''n = \lambda n; \end{cases}$$

eliminando l, m, n da queste equazioni ricaviamo

$$(9) \quad \begin{vmatrix} a - \lambda & a' & a'' \\ b & b' - \lambda & b'' \\ c & c' & c'' - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Corrispondentemente ad una radice λ_1 di questa equazione cubica in λ le equazioni (8) sono soddisfatte da valori l_1, m_1, n_1 di l, m, n; cosichè dalla equazione

$$\frac{dt}{t} = \frac{l_1 dx + m_1 dy + n_1 dz}{\lambda_1(l_1 x + m_1 y + n_1 z) + \gamma_1}$$

ricaviamo, integrando,

$$c_1 t = \left(l_1 x + m_1 y + n_1 z + \frac{\gamma_1}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}}.$$

In modo analogo, indicando con l_2, m_2, n_2; l_3, m_3, n_3 i valori

$, m, n$ che corrispondono alle altre radici λ_2, λ_3 della (9), abbiamo

$$c_2 t = \left(l_2 x + m_2 y + n_2 z + \frac{\gamma_2}{\lambda_2} \right)^{\frac{1}{\lambda_2}},$$

$$c_3 t = \left(l_3 x + m_3 y + n_3 z + \frac{\gamma_3}{\lambda_3} \right)^{\frac{1}{\lambda_3}}.$$

Da queste equazioni, posto $\frac{c_1}{c_2} = C_1$, $\frac{c_1}{c_3} = C_2$, otteniamo

$$\left(l_1 x_1 + m_1 y + n_1 z + \frac{\gamma_1}{\lambda_1} \right)^{\frac{1}{\lambda_1}} = C_1 \left(l_2 x + m_2 y + n_2 z + \frac{\gamma_2}{\lambda_2} \right)^{\frac{1}{\lambda_2}}$$

$$= C_2 \left(l_3 x + m_3 y + n_3 z + \frac{\gamma_3}{\lambda_3} \right)^{\frac{1}{\lambda_3}},$$

he sono gli integrali generali del proposto sistema.

Questo metodo si estende subito al caso del sistema generale

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = \frac{du}{U} = \ldots$$

ove

$$X = ax + by + cz + gu + \ldots + \alpha, \ldots$$

5) Siano le equazioni

$$y' + \varphi'(x) y - \psi'(x) z = 0.$$

$$z' + \psi'(x) y + \varphi'(x) z = 0.$$

Moltiplicando la prima equazione per y e la seconda per z e ommando, e poi la prima per z e la seconda per y e sottraendo, tteniamo

$$yy' + zz' + (y^2 + x^2) \varphi'(x) = 0, \; y'z - z'y - (y^2 + z^2) \psi'(x) = 0,$$

alle quali, dividendo per $y^2 + z^2$ e integrando,

$$\sqrt{y^2 + z^2} = C_1 \, e^{-\varphi(x)}, \quad \frac{y}{z} = \operatorname{tg}[\psi(x) + C_2],$$

che sono gli integrali generali delle proposte equazioni, i quali, osservando che $y = \operatorname{sen}[\psi(x) + C_2]\sqrt{y^2+z^2}$, $z = \cos[\psi(x) + C_2]\sqrt{y^2+z^2}$, si riducono a

$$y = C_1\, e^{-\varphi(x)} \operatorname{sen}[\psi(x) + C_2], \quad z = C_1\, e^{-\varphi(x)} \cos[\psi(x) + C_2].$$

6) Si vogliano trovare quelle curve gobbe per le quali la parte di asse delle y intercetta fra l'origine e il punto d'intersezione col piano normale in ogni loro punto sia una data funzione $f(y)$ di y, e la parte di asse delle z intercetta fra l'origine e il punto d'intersezione collo stesso piano normale sia una data funzione $\varphi(z)$ di z.

Poichè l'equazione del piano normale in un punto qualunque (x, y, z) della linea cercata è

$$(X - x)dx + (Y - y)dy + (Z - z)dz = 0 \text{ ossia } \frac{Xdx + Ydy + Zdz}{xdx + ydy + zdz} = 1,$$

le equazioni differenziali del problema sono

$$xdx + ydy + zdz = f(y)dy = \varphi(z)dz,$$

che, integrate, danno subito le equazioni delle curve richieste

$$\int f(y)\,dy = \int \varphi(z)dz + C_1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2\int f(y)dy + C_2.$$

Così ad es.: se $f(y) = \varphi(z) = 1$, abbiamo le curve

$$y = z + C_1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2y + C_2,$$

intersezioni dei piani $y = z + C_1$ colle sfere $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = C_2$ (o, ciò che è lo stesso, colle sfere $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = C_2$).

222. Meritano speciale considerazione i sistemi di equazioni lineari a coefficienti costanti.

Sieno le due equazioni

$$(1) \qquad \begin{cases} f_1(D)y + \varphi_1(D)z = X_1, \\ f_2(D)y + \varphi_2(D)z = X_2, \end{cases}$$

dove X_1, X_2 indicano funzioni della variabile indipendente x e $f_1(D)$, $f_2(D)$, $\varphi_1(D)$, $\varphi_2(D)$ sono funzioni razionali intere del simbolo $D = \frac{d}{dx}$.

Operando sui due membri della prima delle (1) col simbolo $\varphi_2(D)$ e su quelli della seconda col simbolo $\varphi_1(D)$ e sottraendo l'una dall'altra, coll' osservare che $\varphi_2(D)\ \varphi_1(D)z = \varphi_1(D)\varphi_2(D)z$, otteniamo

$$\{\varphi_2(D)f_1(D) - \varphi_1(D)f_2(D)\}y = \varphi_2(D)X_1 - \varphi_1(D)X_2,$$

la quale equazione lineare in y, indicati con l_1, l_2, m_1, m_2 i gradi delle funzioni $f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2$ e con n quello dei due numeri m_2+l_1, m_1+l_2 che non è minore dell' altro, è di ordine n, se i termini di grado n in D non si elidono tra loro. Se P è un integrale particolare e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ sono le radici dell' *equazione caratteristica* $\varphi_2(D)f_1(D) - \varphi_1(D)f_2(D) = 0$, abbiamo

$$(2) \qquad y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + \ldots + C_n e^{\alpha_n x} + P.$$

Operando in modo analogo per eliminare y tra le (1), si ottiene una equazione lineare d' ordine n in z, il cui integrale generale è

$$(3) \qquad z = B_1 e^{\alpha_1 x} + B_2 e^{\alpha_2 x} + \ldots + B_n e^{\alpha_n x} + Q,$$

dove Q ne è un integrale particolare e le B sono costanti.

Tra le costanti C e B passano delle relazioni, in modo che di esse rimangono solo n arbitrarie. Invero, sostituiamo i valori (2) e (3) in una delle (1), poniamo nella prima; ricordando una nota proprietà del simbolo D abbiamo il risultato

$$(4) \qquad \begin{aligned} &[C_1 f_1(\alpha_1) + B_1 \varphi_1(\alpha_1)]\, e^{\alpha_1 x} + [C_2 f_1(\alpha_2) + B_2 \varphi_1(\alpha_2)]\, e^{\alpha_2 x} + \ldots \\ &+ [C_n f_1(\alpha_n) + B_n \varphi_1(\alpha_n)]\, e^{\alpha_n x} + f_1(D)P + \varphi_1(D)Q = X_1; \end{aligned}$$

ma hanno luogo le formole

$$\{\varphi_2(D)f_1(D) - \varphi_1(D)f_2(D)\}P = \varphi_2(D)X_1 - \varphi_1(D)X_2,$$

$$\{\varphi_2(D)f_1(D) - \varphi_1(D)f_2(D)\}Q = f_1(D)X_2 - f_2(D)X_1,$$

dalle quali, operando sulla prima col simbolo $f_1(D)$, sulla seconda col simbolo $\varphi_1(D)$ e sommando,

$$\varphi_2(D)f_1(D) - \varphi_1(D)f_2(D)\}\{f_1(D)P + \varphi_1(D)Q\} = \{\varphi_2(D)f_1(D) - \varphi_1(D)f_2(D)\}X_1$$

e quindi $f_1(D)P + \varphi_1(D)Q = X_1$. Cosichè dalla (4), che deve essere

identicamente soddisfatta, ricaviamo le equazioni

$$C_1 f_1(\alpha_1) + B_1 \varphi_1(\alpha_1) = 0,\ C_2 f_1(\alpha_2) + B_2 \varphi_1(\alpha_2) = 0, \ldots$$
$$C_n f_1(\alpha_n) + B_n \varphi_1(\alpha_n) = 0,$$

che legano tra loro le costanti C e B.

Le (2), (3), quando tra le C, B passino queste relazioni, sono gli integrali generali delle (1).

Il lettore potrà trovare da sè le facili modificazioni da introdursi quando la equazione caratteristica delle equazioni lineari d'ordine n in y e z abbia radici multiple o abbia radici complesse semplici o multiple.

Il precedente metodo si estende facilmente al caso di un sistema di un numero qualunque di equazioni. Così se le equazioni sono tre

$$f_1(D)y + \varphi_1(D)z + \psi_1(D)u = X_1,$$
$$f_2(D)y + \varphi_2(D)z + \psi_2(D)u = X_2,$$
$$f_3(D)y + \varphi_3(D)z + \psi_3(D)u = X_3,$$

ricaviamo da esse la equazione lineare nella sola y

$$\begin{vmatrix} f_1(D) & \varphi_1(D) & \psi_1(D) \\ f_2(D) & \varphi_2(D) & \psi_2(D) \\ f_3(D) & \varphi_3(D) & \psi_3(D) \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \varphi_2(D) & \psi_2(D) \\ \varphi_3(D) & \psi_3(D) \end{vmatrix} X_1 + \begin{vmatrix} \varphi_3(D) & \psi_3(D) \\ \varphi_1(D) & \psi_1(D) \end{vmatrix} X_2 + \begin{vmatrix} \varphi_1(D) & \psi_1(D) \\ \varphi_2(D) & \psi_2(D) \end{vmatrix} X_3$$

e così di seguito.

Esempi

1) $y' + z' + y + z = x,\ y' + 2z' + 3y + 4z = x^2.$

Quì è $f_1(D) = D + 1$, $\varphi_1(D) = D + 1$, $f_2(D) = D + 3$, $\varphi_2(D) = 2D + 4$, e per ciò la equazione in y diviene $(D+1)^2 y = 2 + 2x - x^2$, il cui integrale è

$$y = e^{-x}(C_1 x + C_2) - 8 + 6x - x^2. \tag{5}$$

La equazione in z è $(D+1)^2 z = -1 - x + x^2$, il cui integrale è $z = e^{-x}(A_1 x + A_2) + 7 - 5x + x^2$, dove A_1, A_2 sono costanti. Sostituendo questi valori di y e z nella seconda delle equazioni proposte ricaviamo tra le costanti A_1, A_2, C_1, C_2 le relazioni $A_1 + C_1 =$

$2A_2 + 2C_2 + A_1 = 0$, dalle quali $A_1 = -C_1$, $A_2 = \frac{C_1}{2} - C_2$; cosichè la (5) e la

$$z = e^{-x}\left(-C_1 x + \frac{C_1}{2} - C_2\right) + 7 - 5x + x^2$$

sono gli integrali completi delle equazioni proposte.

2) $y'' - 3z' + 4y = 1$, $z'' + 3y' + 4z = x$;
qui è $f_1(D) = D^2 + 4$, $\varphi_1(D) = -3D$, $f_2(D) = 3D$, $\varphi_2(D) = D^2 + 4$, e perciò le equazioni in y e z sono

$$\{(D^2+4)^2 + 9D^2\}y = 7, \quad \{(D^2+4)^2 + 9D^2\}z = 4x,$$

i cui integrali sono

$$(6) \qquad y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} 4x + C_4 \cos 4x + \frac{7}{16},$$

$$z = A_1 \operatorname{sen} x + A_2 \cos x + A_3 \operatorname{sen} 4x + A_4 \cos 4x + \frac{x}{4},$$

Sostituendo questi valori in una delle proposte equazioni abbiamo tra le costanti A e C le relazioni $C_1 + A_2 = 0$, $C_2 - A_1 = 0$, $-C_3 + A_4 = 0$, $C_4 + A_3 = 0$; per cui avremo

$$z = C_2 \operatorname{sen} x - C_1 \cos x - C_4 \operatorname{sen} 4x + C_3 \cos 4x + \frac{x}{4}.$$

Questa formola e la (6) danno gli integrali generali delle equazioni proposte.

Esercizi

1. $\begin{cases} xy' = x - 2y, \\ xz' = xy + xz + 2y - x; \end{cases}$ integrali $\begin{cases} x^2(3y - x) = C_1, \\ y + z = C_2 e^x. \end{cases}$

2. $\begin{cases} xy'' + 2y' + xy = 0, \\ xz' + 2z = xy'; \end{cases}$ $\begin{cases} y = \frac{1}{x}(C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x), \\ z = \frac{1}{x}(C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x) \\ \qquad + \frac{1}{x^2}(C_3 + 2C_1 \cos x - 2C_2 \operatorname{sen} x). \end{cases}$

3. $\dfrac{dx}{y+z}=\dfrac{dy}{z+x}=\dfrac{dz}{x+y}$, $\begin{cases}(x+y+z)(y-x)^2=C_1,\\(x+y+z)(y-z)^2=C_2.\end{cases}$

4. $\begin{cases}y'=y+z,\\z'=y-z;\end{cases}$ $\begin{cases}y=C_1e^{x\sqrt{2}}+C_2e^{-x\sqrt{2}},\\z=C_1(\sqrt{2}-1)e^{x\sqrt{2}}-C_2(\sqrt{2}+1)e^{-x\sqrt{2}}.\end{cases}$

5. $\begin{cases}y''=ay+bz\\z''=a_1y+b_1z;\end{cases}$ giova sommare le due equazioni dopo aver moltiplicato la seconda equazione per una indeterminata λ, che si determina in modo che risulti $b+\lambda b_1=\lambda(a+\lambda a_1)$; allora si trovano gli integrali

$$y+\lambda_1 z=C_1e^{x\sqrt{a+\lambda_1 a_1}}+C_2e^{-x\sqrt{a+\lambda_1 a_1}},$$

$$y+\lambda_2 z=C_3e^{x\sqrt{a+\lambda_2 a_1}}+C_4e^{-x\sqrt{a+\lambda_2 a_1}},$$

dove λ_1, λ_2 sono le radici della equazione $a_1\lambda^2+(a-b_1)\lambda-b=0$.

6. $\begin{cases}y''=11y+16z,\\z''=-8y-13z;\end{cases}$ $\begin{cases}y=2C_1e^{x\sqrt{3}}+2C_2e^{-x\sqrt{3}}-C_3\cos(x\sqrt{5})-C_4\operatorname{sen}(x\sqrt{5})\\z=-C_1e^{x\sqrt{3}}-C_2e^{-x\sqrt{3}}+C_3\cos(x\sqrt{5})+C_4\operatorname{sen}(x\sqrt{5})\end{cases}$

7. $y''=-y-2z$, $z''=y+z$;

$$y=[(C_3-C_1)e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}-(C_4+C_2)e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}]\cos\frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$-[(C_3+C_1)e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}+(C_4-C_2)e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}]\operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{2}},$$

$$z=(C_1e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}+C_2e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}})\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+(C_3e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}+C_4e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}})\operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{2}}.$$

8. $y''=2y+3z+5$, $z''=-22y-15z+4$;

$$\begin{cases}y=C_1\cos 2x+C_2\operatorname{sen}2x+C_3\cos 3x+C_4\operatorname{sen}3x+\dfrac{29}{12},\\z=-2C_1\cos 2x-2C_2\operatorname{sen}2x-\dfrac{11}{3}C_3\cos 2x-\dfrac{11}{3}C_4\operatorname{sen}3x-\dfrac{5}{12}\end{cases}$$

9. $\dfrac{dy}{z} = \dfrac{dz}{y} = \dfrac{dx}{(z-y)^2}$; $y^2 - z^2 = C_1$, $(y-z)^2 = C_2 - 2x$.

10. $\begin{cases} xy' - y - z' = 0, \\ xz' - z - y' = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y = C_1 x + C_2, \\ z = -C_2 x - C_1. \end{cases}$

11. $y' = \dfrac{y-z}{u-x}$, $z' = \dfrac{y-z}{u-x}$, $u' = y - z + 1$;

$y = \log[C_3(C_1 x + C_2)]$, $z = \log[C_3(C_1 x + C_2)] + C_1$, $u = (C_1 + 1)x + C_2$.

12. $y'' + m^2 z = 0$, $z'' - m^2 y = 0$;

$$y = [C_1 e^{\frac{mx}{\sqrt{2}}} + C_2 e^{-\frac{mx}{\sqrt{2}}}] \cos \frac{mx}{\sqrt{2}} + [C_3 e^{\frac{mx}{\sqrt{2}}} + C_4 e^{-\frac{mx}{\sqrt{2}}}] \operatorname{sen} \frac{mx}{\sqrt{2}},$$

$$z = [C_1 e^{\frac{mx}{\sqrt{2}}} - C_2 e^{-\frac{mx}{\sqrt{2}}}] \operatorname{sen} \frac{mx}{\sqrt{2}} - [C_3 e^{\frac{mx}{\sqrt{2}}} - C_4 e^{-\frac{mx}{\sqrt{2}}}] \cos \frac{mx}{\sqrt{2}}.$$

13. $ay' = (b-c)zu$, $bz' = (c-a)uy$, $cu' = (a-b)yz$;

$$ay^2 + bz^2 + cu^2 = C_1, \quad a^2y^2 + b^2z^2 + c^2u^2 = C_2,$$

$$= a\sqrt{bc} \int \frac{dy}{\sqrt{[C_2 - cC_1 - ay^2(a-c)]\,[bC_1 - C_2 - ay^2(b-a)]}} + C_3.$$

14. $$\frac{dx}{\cos y \cos z(\operatorname{sen} z - \operatorname{sen} y)} = \frac{dy}{\cos z \cos x(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} z)}$$

$$= \frac{dz}{\cos x \cos y\,(\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x)};$$

$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} z = C_1$, $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen}^2 z = C_2$.

15. $\begin{cases} xy' = y + z, \\ xz' = y - z; \end{cases}$ $\begin{cases} y = C_1 x \operatorname{sen}(\log x + C_2), \\ z = C_1 x \cos(\log x + C_2). \end{cases}$

16. $\begin{cases} y^{IV} + z^{V} = 0, \\ y''' + z^{IV} + z' = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 \\ z = C_5 - 6C_4 x. \end{cases}$

(Può avvenire, come in questo caso. che le funzioni più generali che soddisfanno al dato sistema di equazioni contengano un numero di costanti arbitrarie minore del normale).

17. $\begin{cases} y''' + z''' - 3(y'' + z'') + 8(y' + z') - (y + z) = 0, \\ y'' - y + z'' + z' = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y = e^x(C_1 + C_2 x + C_3 x^2) + C_4 e^{-x}, \\ z = e^x(2C_3 - C_2 - 2C_3 x) - C_4 e^{-x}. \end{cases}$

18. $y' + (ay + bz)\,X = X_1, \quad z' + (a'y + b'z)\,X = X_2,$
dove X, X_1, X_2 sono funzioni della sola x;

$$y + \lambda_1 z = e^{-(a+\lambda_1 a')\int X dx}\left[\int (X_1 + \lambda_1 X_2)\, e^{(a+\lambda_1 a')\int X dx}\, dx + C_1\right],$$

$$y + \lambda_2 z = e^{-(a+\lambda_2 a')\int X dx}\left[\int (X_1 + \lambda_2 X_2)\, e^{(a+\lambda_2 a')\int X dx}\, dx + C_2\right],$$

dove λ_1, λ_2 sono le radici della equazione $\lambda^2 a' + \lambda(a - b') - b = 0$.

19. $\begin{cases} xy' + 2(y - z) = x, \\ xz' + y + 5z = x^2; \end{cases}$ $\begin{cases} y = \dfrac{3}{10}x + \dfrac{1}{15}x^2 + \dfrac{2C_1}{x^3} - \dfrac{C_1}{x^4}, \\ z = -\dfrac{1}{20}x + \dfrac{2}{15}x^2 - \dfrac{C_1}{x^3} + \dfrac{C_2}{x^4}. \end{cases}$

20. Trovare le linee per le quali, in ogni loro punto, la tangente abbia coseni di direzione proporzionali alla somma delle coordinate di nome diverso da quello dell'asse cui ciascun coseno si riferisce.

Le linee piane $\sqrt{x + y + z} = \dfrac{C_1}{z - x}$, $\sqrt{x + y + z} = \dfrac{C_2}{z - y}$.

Metodo di integrazione per approssimazioni o integrazioni successive. — Integrazione per serie delle equazioni differenziali.

223. Cominciamo dall'esporre un metodo di integrazione delle equazioni differenziali, che il Picard chiama delle *approssimazioni successive*, e che anche potrebbe chiamarsi, come propone il Peano, delle *integrazioni successive*. Di questo metodo, che è

applicazione della così detta *regula falsi*, mi pare si possa rintracciare la prima radice in un metodo di integrazione accennato nel n. 614 del 2° volume del *Cours d'Analyse* dello STURM. Il Prof. PEANO [1] espose pel primo nel 1887 questo metodo per la integrazione di un sistema di equazioni differenziali lineari di primo ordine, ed il Sig. PICARD [2] nel 1890 lo applicò al caso di un sistema di equazioni differenziali qualunque di primo ordine.

Cominciamo dal caso di una sola equazione differenziale

$$y' = \varphi(x, y), \tag{1}$$

dove supponiamo la $\varphi(x, y)$ univalente continua in un campo C determinato dai valori di x, y pei quali è $|x - x_0| \leq a$, $|y - y_0| \leq b$, e che ivi soddisfaccia alla condizione del LIPSCHITZ

$$|\varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_2)| < k\,|y_1 - y_2|.$$

Indicato con M il massimo di $|\varphi(x, y)|$ nel campo C, si prenda un numero positivo ρ soddisfacente alle condizioni

$$\rho \leq a, \quad \rho < \frac{1}{k}, \quad \rho \leq \frac{b}{M},$$

e si considerino i valori di x dell'intorno c di x_0 determinato dalla $|x - x_0| \leq \rho$.

Sostituiamo nel secondo membro della equazione differenziale proposta y_0 in luogo di y, e formiamo l'equazione differenziale

$$y'_1 = \varphi(x, y_0),$$

della quale ricaviamo per quadratura y_1, e determineremo la costante di integrazione in modo che y_1 assuma il valore y_0 per $x = x_0$; otteniamo così

$$y_1 = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y_0)\, dx + y_0.$$

Sostituito poi questo valore y_1 in luogo di y nel secondo membro della (1), formiamo l'equazione

$$y'_2 = \varphi(x, y_1),$$

---

(1) Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXII, 1887, e math. Annalen vol. XXXII.

(2) Journal de Mathématiques, 1890.

dalla quale ricaviamo y_2, determinandolo in modo che per $x = x$ sia $y_2 = y_0$, cioè avremo

$$y_2 = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y_1)\, dx + y_0.$$

Procedendo in modo analogo otteniamo

$$y_3 = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y_2)\, dx + y_0$$

e così successivamente, in generale,

$$y_n = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y_{n-1})\, dx + y_0.$$

Ora, al crescere indefinito di n, y_n tende ad un limite che è nell'intorno c di x_0, l'integrale della (1), che per $x = x_0$ assume il valore y_0. Invero, cominciamo dall'osservare che

$$|y_1 - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |\varphi(x, y_0)|\, dx \right| \leq M\, |x - x_0| \leq M\rho \leq b,$$

cosichè il valore y_1 appartiene all'intorno c_1 di valori di y soddisfacenti la $|y - y_0| \leq b$; e perciò

$$|y_2 - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |\varphi(x, y_1)|\, dx \right| \leq M\, |x - x_0| \leq M\rho \leq b,$$

e quindi anche y_2 appartiene a c_1, e si vedrebbe così che tutti i valori $y_3, y_4, \ldots y_n, \ldots$ appartengono a c_1.

In conseguenza di quanto precede avremo

$$\left| \frac{d(y_2 - y_1)}{dx} \right| = |\varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_0)| < k\, |y_1 - y_0| \leq kM$$

da cui

$$\frac{d(y_2 - y_1)}{dx} = k\mathrm{M}\rho\,\theta_x, \qquad -1 < \theta_x < 1,$$

$$y_2 - y_1 = k\mathrm{M}\rho \int_{x_0}^{x} \theta_x dx, \quad |y_2 - y_1| \leq k\mathrm{M}\rho \left| \int_{x_0}^{x} |\theta_x| dx \right| < k\mathrm{M}\rho\,|x - x_0| \leq \mathrm{M}k\rho^2.$$

Analogamente

$$\left| \frac{d(y_3 - y_2)}{dx} \right| < k\,|y_2 - y_1| < \mathrm{M}k^2\rho^2,$$

dalla quale, come precedentemente, si ricava

$$|y_3 - y_2| < \mathrm{M}k^2\rho^3,$$

e così, procedendo avanti, si ha, per n intero positivo qualunque,

$$|y_n - y_{n-1}| < \mathrm{M}k^{n-1}\rho^n.$$

Dal che risulta che la serie

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) + \ldots,$$

che ha y_n per somma dei primi n termini, è convergente assolutamente ed uniformemente nell'intorno c di x_0, perchè i suoi termini sono minori in valore assoluto dei corrispondenti della serie

$$y_0 + \rho\mathrm{M}\,[1 + k\rho + (k\rho)^2 + \ldots + (k\rho)^{n-1} + \ldots]$$

che è convergente perchè è $k\rho < 1$.

Provato così che y_n ha un limite determinato, che indicheremo con $y = y(x)$, al crescere indefinito di n, si vede subito che y soddisfa alla proposta equazione, poichè, passando al limite per $n = \infty$ nella formola

$$y_n = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y_{n-1})\, dx + y_0,$$

per la continuità di $\varphi(x, y)$ nel campo C, otteniamo

$$(x) = \lim_{n=\infty} \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y_{n-1}\, dx + y_0 = \int_{x_0}^{x} \lim_{n=\infty} \varphi(x, y_{n-1})\, dx + y_0 = \int_{x_0}^{x} \varphi[x, y(x)]\, dx + y_0$$

da cui

$$y'(x) = \varphi[x, y(x)].$$

Da quanto precede risulta provata l'esistenza di un integrale

$$y(x) = y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \dots$$

della equazione $y' = \varphi(x, y)$, che per $x = x_0$ assume il valore y_0, sviluppato in serie convergente in un certo intorno del punto x_0; si ha così un'altra dimostrazione dell'esistenza dell'integrale di tali equazioni.

Esempio. — Sia l'equazione lineare

$$y' = Py + Q$$

dove $P = P(x)$, $Q = Q(x)$. Posto $y_0 = C$, avremo successivamente

$$y_1 = C\int P\,dx + \int Q\,dx + C,$$

$$y_2 = C\int P dx \int P dx + \int P dx \int Q dx + C\int P\,dx + \int Q\,dx + C\,,$$

$$y_3 = C\int P\,dx \int P dx \int P dx + \int P dx \int P dx \int Q dx + C\int P dx \int P dx + \int P dx \int Q dx$$

$$+ C\int P dx + \int Q\,dx + C,$$

. . . . . .

tutti gli integrali essendo limitati tra x_0 ed x. Avremo quindi lo sviluppo, in un intorno di x_0, dell'integrale y della nostra equazione

$$y = C\left\{1 + \int_{x_0}^{x} P dx + \int_{x_0}^{x} P dx \int_{x_0}^{x} P dx + \int_{x_0}^{x} P dx \int_{x_0}^{x} P dx \int_{x_0}^{x} P dx + \dots\right\}$$

$$+ \int_{x_0}^{x} Q\,dx + \int_{x_0}^{x} P dx \int_{x_0}^{x} Q\,dx + \int_{x_0}^{x} P dx \int_{x_0}^{x} P dx \int_{x_0}^{x} Q\,dx + \dots$$

Questa si riduce facilmente alla ben nota formola di risoluzione delle equazioni lineari di primo ordine. Basta osservare che, in-

grando per parti, prendendo Pdx come fattore differenziale, è

$$\int Pdx \int Pdx = \left(\int Pdx\right)\left(\int Pdx\right) - \int Pdx \int Pdx$$

da cui

$$\int Pdx \int Pdx = \frac{(\int Pdx)^2}{2},$$

e da questa formola, analogamente,

$$\int Pdx \int Pdx \int Pdx = \frac{1}{2}\int Pdx\left(\int Pdx\right)^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\int Pdx\right)^3 - 2\int Pdx\left(Pdx\right)^2\right]$$

da cui

$$\int Pdx \int Pdx \int Pdx = \frac{1}{2.3}\left(\int Pdx\right)^3,$$

e così in generale

$$\int Pdx \int Pdx \ldots \int Pdx = \frac{1}{n!}\left(\int Pdx\right)^n$$

e quindi ancora

$$\int_{x_0}^{x} Pdx \int_{x_0}^{x} Pdx \ldots \int_{x_0}^{x} Pdx = \frac{1}{n!}\left(\int_{x_0}^{x} Pdx\right)^n;$$

e perciò, intanto, la serie che moltiplica C, nell'espressione di y, è uguale a $e^{\int_{x_0}^{x} Pdx}$.

Inoltre, posto $\int_{x_0}^{x} Pdx = u$, da cui $Pdx = du$, $x = x(u)$, e $R(u) = Q[x(u)]x'(u)$, abbiamo

$$\int_{x_0}^{x} Pdx \int_{x_0}^{x} Pdx \ldots \int_{x_0}^{x} Pdx \int_{x_0}^{x} Q(x)dx = \int_0^u du \int_0^u du \ldots \int_0^u du \int_0^u R(u)\,du = \frac{1}{D^n} R(u),$$

avendo posto $\frac{1}{D} v = \int_0^u v\,du$.

Notiamo ora che le formole al n. 196 valgono anche se $\frac{1}{D}$ è simbolo di integrale definito, col limite inferiore costante, cosicchè avremo (dalla formola (6) al n. 196 facendovi $a = -1$)

$$\int_{x_0}^{x} Q dx + \int_{x_0}^{x} P dx \int_{x_0}^{x} Q dx + \ldots = \left(\frac{1}{D} + \frac{1}{D^2} + \frac{1}{D^3} + \ldots\right) R(u) = \frac{1}{D-1} R(u) = e^u \int_0^u e^{-u} R(u) du$$

$$= e^{\int_{x_0}^{x} P dx} \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{x} P dx} Q(x) dx.$$

Per cui, infine,

$$y = e^{\int_{x_0}^{x} P dx} \left[\int_{x_0}^{x} Q e^{-\int_{x_0}^{x} P dx} dx + C\right].$$

224. Il metodo precedente si estende facilmente ad un sistema di m equazioni tra la variabile x e le funzioni $y_1, y_2, \ldots y_m$,

$$(1) \qquad \begin{cases} y' = \varphi_1(x, y, z, u, \ldots v), \\ z' = \varphi_2(x, y, z, u, \ldots v), \\ u' = \varphi_3(x, y, z, u, \ldots v), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ v' = \varphi_m(x, y, z, u, \ldots v), \end{cases}$$

le $\varphi(x, y, z, u, \ldots v)$ essendo delle funzioni continue in un campo determinato dai valori di $x, y, z, \ldots v$ pei quali è

$$|x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b_1, \quad |z - z_0| \leq b_2, \quad |u - u_0| \leq b_3, \ldots |v - v_0| \leq b_m$$

e che ivi soddisfanno alla condizione del Lipschitz

$$|\varphi_r(x, y_1, z_1, u_1, \ldots v_1) - \varphi_r(x, y_2, z_2, u_2, \ldots v_2)| < k_1|y_1 - y_2| + k_2|z_1 - z_2|$$

$$+ k_3|u_1 - u_2| + \ldots + k_m|v_1 - v_2|, \quad (r = 1, 2, 3, \ldots m).$$

Indicati con $M_1, M_2, \ldots M_m$ i rispettivi massimi di $|\varphi_1(x, y, z, \ldots v)|$,

$\varphi_2(x, y, z, \ldots v)|, \ldots |\varphi_m(x, y, z, \ldots v)|$ nel campo C, si prenda un numero positivo ρ soddisfacente alle condizioni

$$\rho \leq a, \quad \rho < \frac{1}{k_1 + k_2 + \ldots + k_m}, \quad \rho \leq \frac{b}{M},$$

essendo b il più piccolo dei numeri $b_1, b_2, \ldots b_m$, ed M il più grande dei numeri $M_1, M_2, \ldots M_m$. Si considerino i valori di x dell'intorno di x_0 determinato dalla $|x - x_0| \leq \rho$.

Sostituiamo nel secondo membro delle equazioni differenziali proposte $y_0, z_0, u_0, \ldots v_0$ in luogo di $y, z, u, \ldots v$ e formiamo le equazioni differenziali

$$y'_1 = \varphi_1(x, y_0, z_0, \ldots v_0),$$
$$z'_1 = \varphi_2(x, y_0, z_0, \ldots v_0),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$v'_1 = \varphi_m(x, y_0, z_0, \ldots v_0),$$

alle quali ricaviamo, per quadrature, $y_1, z_1, \ldots v_1$, e determineremo le costanti di integrazione in modo che $y_1, z_1, \ldots v_1$ assumano rispettivamente i valori $y_0, z_0, \ldots v_0$ per $x = x_0$; otteniamo così

$$y_1 = \int_{x_0}^{x} \varphi_1(x, y_0, z_0 \ldots v_0)\, dx + y_0,$$

$$z_1 = \int_{x_0}^{x} \varphi_2(x, y_0, z_0, \ldots v_0)\, dx + z_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v_1 = \int_{x_0}^{x} \varphi_m(x, y_0, z_0, \ldots v_0) dx + v_0.$$

Sostituiti poi questi valori $y_1, z_1, \ldots v_1$ in luogo di $y, z, \ldots v$ nei secondi membri delle (1), formiamo le equazioni

$$y'_2 = \varphi_1(x, y_1, z_1, \ldots v_1),$$
$$z'_2 = \varphi_2(x, y_1, z_1, \ldots v_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$v'_2 = \varphi_m(x, y_1, z_1, \ldots v_1),$$

dalle quali ricaviamo $y_2, z_2, \ldots v_2$, determinandole in modo che per $x = x_0$ sia $y_2 = y_0$, $z_2 = z_0, \ldots v_2 = v_0$, cioè avremo

$$y_2 = \int_{x_0}^{x} \varphi_1(x, y_1, z_1, \ldots v_1)\, dx + y_0,$$

$$z_2 = \int_{x_0}^{x} \varphi_2(x, y_1, z_1, \ldots v_1)\, dx + z_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v_2 = \int_{x_0}^{x} \varphi_m(x, y_1, z_1, \ldots v_1)\, dx + v_0.$$

Procedendo in modo analogo otteniamo, in generale,

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} y_n &= \int_{x_0}^{x} \varphi_1(x, y_{n-1}, z_{n-1}, \ldots v_{n-1})\, dx + y_0, \\ z_n &= \int_{x_0}^{x} \varphi_2(x, y_{n-1}, z_{n-1}, \ldots v_{n-1})\, dx + z_0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n &= \int_{x_0}^{x} \varphi_m(x, y_{n-1}, z_{n-1}, \ldots v_{n-1})\, dx + v_0. \end{aligned} \right.$$

Ora, al crescere indefinito di n, le $y_n, z_n, \ldots v_n$ tendono verso dei limiti finiti che sono, nell'intorno c di x_0, gli integrali delle (1) che per $x = x_0$ assumono rispettivamente i valori $y_0, z_0, \ldots v_0$. Invero cominciamo dall'osservare che

$$|y_1 - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |\varphi(x, y_0, z_0, \ldots v_0)|\, dx \right| \leq M\rho \leq b,$$

cosichè il valore y_1 appartiene all'intorno c_1 di valori di y soddisfacenti la relazione $|y - y_0| \leq b$; ed in modo analogo si ve rifica

he i valori $z_1, \ldots v_1$ appartengono rispettivamente agli intorni $c_2, \ldots c_m$ i valori di $z, \ldots v$ soddisfacenti le relazioni $|z - z_0| \leq b, \ldots |v - v_0| \leq b$.

In conseguenza è

$$|y_2 - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |\varphi(x, y_1, z_1, \ldots v_1')| \, dx \right| \leq M |x - x_0| \leq M\rho \leq b,$$

quindi anche y_2 appartiene a c_1; ed in modo analogo si vedrebbe he $z_2, \ldots v_2$ appartengono rispettivamente a $c_2, \ldots c_m$. Proseguendo ı questo modo si proverebbe che i valori $y_3, y_4, \ldots y_n, \ldots$ appartengono c_1; che $z_3, z_4, \ldots z_n, \ldots$ appartengono a $c_2; \ldots$; che $v_3, v_4, \ldots v_n, \ldots$ ppartengono a c_m.

In conseguenza di quanto precede avremo

$$\left. \frac{y_2 - y_1)}{dx} \right| = |\varphi_1(x, y_1, z_1, \ldots v_1) - \varphi_1(x, y_0, z_0, \ldots v_0)| < k_1 |y_1 - y_0| + k_2 |z_1 - z_0) + \ldots$$

$$+ k_m |v_1 - v_0| \leq (k_1 + k_2 + \ldots + k_m) M\rho,$$

a cui

$$\frac{d(y_2 - y_1)}{dx} = (k_1 + k_2 + \ldots + k_m) M\rho\theta_x, \quad -1 < \theta_x < 1,$$

$$y_2 - y_1 = (k_1 + k_2 + \ldots + k_m) M\rho \int_{x_0}^{x} \theta_x \, dx,$$

$$-y_1| \leq (k_1 + k_2 + \ldots + k_m) M\rho \left| \int_{x_0}^{x} |\theta_x| dx \right| < (k_1 + k_2 + \ldots + k_m) M\rho \, |x - x_0|$$

$$\leq M (k_1 + k_2 + \ldots + k_m) \rho^2.$$

Analogamente si proverebbe che

$$_2 - z_1| < M(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)\rho^2 \ldots |v_2 - v_1| < M(k_1 + k_2 + \ldots k_m)\rho^2.$$

Abbiamo poi, in conseguenza,

$$\left. \frac{y_3 - y_2)}{dx} \right| < k_1 |y_2 - y_1| + k_2 |z_2 - z_1| + \ldots + k_m |v_2 - v_1| < M(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)^2 \rho^2,$$

ılla quale, in modo analogo al precedente, si ricava

$$|y_3 - y_2| < M(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)^2 \rho^3;$$

e così pure

$$|z_3 - z_2| < M(k_1 + k_2 + .. + k_m)^2 \rho^3, .. \; |v_3 - v_2| < M(k_1 + k_2 + .. + k_m)^2 \rho^3$$

E così procedendo si ha, per n intero positivo qualunque,

$$|y_n - y_{n-1}| < M(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)^{n-1} \rho^n,$$

$$|z_n - z_{n-1}| < M(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)^{n-1} \rho^n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|v_n - v_{n-1}| < M(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)^{n-1} \rho^n.$$

Dal che risulta che le serie

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) + \ldots,$$

$$z_0 + (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \ldots + (z_n - z_{n-1}) + \ldots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v_0 + (v_1 - v_0) + (v_2 - v_1) + \ldots + (v_n - v_{n-1}) + \ldots,$$

che hanno rispettivamente $y_n, z_n, \ldots v_n$ per somma dei primi n termini, sono convergenti assolutamente e uniformemente nell'intorno c di x_0, perchè i loro termini sono, a partire dal secondo loro termine, minori in valore assoluto dei corrispondenti termini della serie

$$M\rho[1 + (k_1 + k_2 + \ldots k_m)\rho + (k_1 + k_2 + \ldots + k_m)^2 \rho^2 + \ldots],$$

che è convergente perchè $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)\rho < 1$.

Provato così che $y_n, z_n, \ldots v_n$ hanno limiti determinati, che indicheremo con $y(x)$, $z(x), \ldots v(x)$. al crescere indefinito di n, si vede subito che questi limiti, soddisfanno alle proposte equazioni poichè, passando al limite per $n = \infty$ nelle formole (2), per la continuità delle $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_m$ nel campo C, otteniamo

$$y(x) = \lim_{n=\infty} \int_{x_0}^{x} \varphi_1(x, y_{n-1}, z_{n-1}, \ldots v_{n-1})\, dx + y_0$$

$$= \int_{x_0}^{x} \lim_{n=\infty} \varphi_1(x, y_{n-1}, z_{n-1}, \ldots v_{n-1})\, dx + y_0$$

$$= \int_{x_0}^{x} \varphi_1[x, y(x), z(x), \ldots v(x)]\, dx + y_0$$

da cui

$$y'(x) = \varphi_1[x, y(x), z(x), \ldots v(x)],$$

ed, in modo analogo,

$$z'(x) = \varphi_2[x, y(x), z(x), \ldots v(x)],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v'(x) = \varphi_m[x, y(x), z(x), \ldots v(x)].$$

Da quanto precede risulta provata l'esistenza degli integrali

$$y(x) = y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + , \ldots,$$

$$z(x) = z_0 + (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \ldots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v(x) = v_0 + (v_1 - v_0) + (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) \ldots +$$

delle equazioni (1), che per $x = x_0$ assumono i valori $y_0, z_0, \ldots v_0$, sviluppati in serie convergente in un certo intorno del punto x_0. Si ha anche così la dimostrazione dell'esistenza degli integrali delle equazioni (1).

La dimostrazione della unicità di questi integrali, che per $x = x_0$ assumono i valori $y_0, z_0, \ldots v_0$, è analoga a quella pel caso di una sola equazione differenziale (vedi n. 179).

Se, infatti, vi fossero altre funzioni $y_1(x), z_1(x), \ldots v_1(x)$ che soddisfacessero le (1) e prendessero per $x = x_0$ i valori $y_0, z_0, \ldots v_0$, posto $Y = y(x) - y_1(x)$, $Z = z(x) - z_1(x) \ldots$ $V = v(x) - v_1(x)$ si avrebbe

$$\frac{d|Y|}{dx} \leq \left|\frac{dY}{dx}\right| \leq k_1|Y| + k_2|Z| + \ldots + k_m|V|,$$

$$\frac{d|Z|}{dx} \leq \left|\frac{dZ}{dx}\right| \leq k_1|Y| + k_2|Z| + \ldots + k_m|V|,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d|V|}{dx} \leq \left|\frac{dV}{dx}\right| \leq k_1|Y| + k_2|Z| + \ldots + k_m|V|.$$

Indicando con k' la più grande delle quantità $k_1, k_2 \ldots k_m$ e posto $= m k'_1$, $X = |Y| + |Z| + \ldots + |V|$, dalle precedenti disuguaglianze

ricaviamo

$$\frac{dX}{dx} \leq kX$$

da cui, ragionando come al n. 179, si deduce subito che dev'essere $Y=0$, $Z=0, \ldots$ $V=0$.

Esempi

1) Siano le due equazioni lineari

$$y' = Pz, \quad z' = Qy$$

dove P, Q sono funzioni della sola x, che supponiamo in un certo intorno del punto x_0 siano continue. Siano Y, Z gli integrali che per $x = x_0$ prendono i valori C, zero. Avremo successivamente

$$\begin{cases} y_0 = C \\ z_0 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1 = C, \\ z_1 = C\int Q\,dx \end{cases}, \quad \begin{cases} y_2 = C\int P\,dx \int Q\,dx + C. \\ z_2 = C\int Q\,dx, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_3 = C\int P\,dx \int Q\,dx + C, \\ z_3 = C\int Q\,dx \int P\,dx \int Q\,dx + C\int Q\,dx, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_4 = C\int P\,dx \int Q\,dx \int P\,dx \int Q\,dx + C\int P\,dx \int Q\,dx + C, \\ z_4 = C\int Q\,dx \int P\,dx \int Q\,dx + C\int Q\,dx, \end{cases}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

gli integrali intendendosi limitati tra x_0 ed x.

Avremo quindi

$$Y = C\Big[1 + \int P\,dx \int Q\,dx + \int P\,dx \int Q\,dx \int P\,dx \int Q\,dx$$
$$+ \int P\,dx \int Q\,dx \int P\,dx \int Q\,dx \int P\,dx \int Q\,dx + \ldots\Big]$$

$$Z = C\Big[\int Q\,dx + \int Q\,dx \int P\,dx \int Q\,dx + \int Q\,dx \int P\,dx \int Q\,dx \int P\,dx \int Q\,dx + \ldots\Big]$$

Indicando con Y_1, Z_1 gli integrali che per $x = x_0$ assumono i valori zero, C_1, si ottiene in modo analogo:

$$Y_1 = C_1\left[\int P dx + \int P dx \int Q dx \int P dx + \int P dx \int Q dx \int P dx \int Q dx \int P dx + \ldots\right],$$

$$Z_1 = C_1\left[1 + \int Q dx \int P dx + \int Q dx \int P dx \int Q dx \int P dx\right.$$

$$\left. + \int Q dx \int P dx \int Q dx \int P dx \int Q dx \int P dx + \ldots\right].$$

Avremo in conseguenza gli integrali generali

$$y = Y + Y_1, \quad z = Z + Z_1,$$

che per $x = x_0$ assumono rispettivamente i valori C, C_1.

2) Applichiamo questo metodo alla integrazione per serie della equazione lineare di 2° ordine

$$y'' + Py' + Qy = 0$$

dove P, Q sono funzioni della sola x.

Prima di tutto osserviamo che questa equazione può ridursi a una equazione a due soli termini, ponendo $y = uz$, poichè essa si riduce allora alla

$$uz'' + (2u' + Pu)z' + (u'' + Pu' + Qu)z = 0$$

la quale, ove si prenda per u l'integrale $u = e^{-\frac{1}{2}\int P dx}$ della equazione $2u' + Pu = 0$, si riduce alla equazione

$$z'' = Rz,$$

dove $R = -\frac{1}{u}(u'' + Pu' + Qu)$.

Possiamo quindi limitarci a considerare le equazioni della forma $z'' = Rz$.

Posto $z' = y$, abbiamo da integrare il sistema lineare di primo ordine

$$y' = Rz, \quad z' = y,$$

ed abbiamo, dalle formole precedentemente stabilite, l'integrale ge-

nerale della equazione $z'' = R z$,

$$Z = C\left[x - x_0 + \int dx \int R dx \int dx + \int dx \int R dx \int dx \int R dx \int dx + \ldots\right]$$

$$+ C_1\left[1 + \int dx \int R dx + \int dx \int R dx \int dx \int R dx + \int dx \int R dx \int dx \int R dx \int dx \int R dx + \ldots\right]$$

le integrazioni intendendosi limitate tra x_0 e x; cosichè per $x = x_0$ è $z = C_1$, $z' = C$.

225. Esponiamo ora altri metodi di integrazione per serie di una equazione differenziale. Se questa è di ordine n si esprimerà $y^{(n)}$ mediante $x, y, y' \ldots y^{(n-1)}$, e da essa e servendoci di essa, con successive derivazioni potremo esprimere allo stesso modo $y^{(n+1)}$, $y^{(n+2)} \ldots$ cosichè presi arbitrariamente i valori $c_0, c_1, c_2 \ldots c_{n-1}$ come quelli che debbano assumere $y, y', \ldots y^{(n-1)}$ per $x = a$, avremo i valori di $y^{(n)}$, $y^{(n+1)}, \ldots$, per $x = a$, che indicheremo con $y^{(n)}(a)$, $y^{(n+1)}(a) \ldots$ Allora

$$y = c_0 + c_1(x - a) + c_2 \frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + c_{n-1} \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$+ y^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!} + y^{(n+1)}(a) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots,$$

quando e finchè risulti convergente la serie del secondo membro sarà l'integrale generale della proposta equazione.

Oppure si userà il metodo così detto dei coefficienti indeterminati, cioè si stabilisce uno sviluppo in serie

$$(1) \qquad y = A_1 x^{m_1} + A_2 x^{m_2} + A_3 x^{m_3} + \ldots$$

e si determinano i coefficienti A e gli esponenti m in guisa che la precedente espressione soddisfaccia alla data equazione differenziale. Allora, se la serie (1) è convergente e successivamente derivabile termine a termine, la formola (1) ci darà un integrale della equazione proposta. Tanto l'uno che l'altro metodo sono lunghi, anche se applicati ad equazioni differenziali lineari.

Vi è una forma speciale di equazioni differenziali, che comprende

molte equazioni importanti, per la quale si ottiene facilmente lo sviluppo dell' integrale in serie.

La equazione sia della forma

$$(2)\qquad \left\{x^p \varphi\left(x\frac{d}{dx}\right)+\psi\left(x\frac{d}{dx}\right)\right\}y=\{x^p\varphi(\vartheta)+\psi(\vartheta)\}y=0,$$

dove φ e ψ sono simboli di funzione razionale intera, e p è un numero positivo. Determiniamo i coefficienti A e gli esponenti m in modo che la (1) soddisfaccia alla nostra equazione.

1) Supponiamo $m_1<m_2<m_3<m_4<\ldots$; sostituendo in luogo di y il valore (1) nella equazione (2) e ricordando una proprietà del simbolo ϑ (N. 198), il suo primo membro diventa

$$A_1\varphi(m_1)x^{m_1+p}+A_2\varphi(m_2)x^{m_2+p}+A_3\varphi(m_3)x^{m_3+p}+\ldots$$

$$+A_1\psi(m_1)x^{m_1}+A_2\psi(m_2)x^{m_2}+A_3\psi(m_3)x^{m_3}+\ldots,$$

e poichè m_1 è il minore esponente di x, affinchè la espressione precedente possa essere zero identicamente, dovrà essere $\psi(m_1)=0$, cioè m_1 dovrà essere una radice a della equazione $\psi(\vartheta)=0$. È quindi escluso il caso in cui $\psi(\vartheta)$ sia una costante. Poi m_2 ed m_1+p ossia $a+p$ sono i successivi esponenti più piccoli di x; prenderemo $m_2=a+p$, e quindi eguaglieremo a zero il coefficiente di x^{a+p} cioè $A_1\varphi(a)+A_2\psi(a+p)$ e così procederemo successivamente.

In tal guisa otteniamo le equazioni

$$m_2=a+p,\ m_3=m_2+p,\ m_4=m_3+p,\ldots$$

dalle quali si ricava

$$m_2=a+p,\ m_3=a+2p,\ m_4=a+3p,\ldots$$

e le equazioni

$$(3)\qquad \begin{cases} A_1\varphi(a)+A_2\psi(a+p)=0,\\ A_2\varphi(a+p)+A_3\psi(a+2p)=0,\\ A_3\varphi(a+2p)+A_4\psi(a+3p)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

dalle quali si ricava

$$A_2 = -\frac{\varphi(a)}{\psi(a+p)}, \quad A_3 = \frac{\varphi(a)\,\varphi(a+p)}{\psi(a+p)\,\psi(a+2p)},$$

$$A_4 = -\frac{\varphi(a)\,\varphi(a+p)\,\varphi(a+2p)}{\psi(a+p)\,\psi(a+2p)\,\psi(a+3p)}, \ldots,$$

e si ha così

$$(4) \qquad y = A_1 x^a \left\{ 1 - \frac{\varphi(a)}{\psi(a+p)} x^p + \frac{\varphi(a)\,\varphi(a+p)}{\psi(a+p)\,\psi(a+2p)} x^{2p} \right.$$

$$\left. - \frac{\varphi(a)\,\varphi(a+p)\,\varphi(a+2p)}{\psi(a+p)\,\psi(a+2p)\,\psi(a+3p)} x^{3p} + \ldots \right\},$$

che, ove la serie del secondo membro sia convergente e derivabile termine a termine tante volte quante sono le unità dell'ordine della equazione (2), ne è un integrale particolare.

In questo modo, corrispondentemente a ciascuna radice a della equazione $\psi(\vartheta) = 0$, si ha un integrale particolare della proposta equazione.

Se una delle quantità $\varphi(a)$, $\varphi(a+p)\ldots$ si annulla, poniamo la $\varphi(a+kp)$, senza che si annulli alcuna delle $\psi(a+p)$, $\psi(a+2p)\ldots$ allora le equazioni (3) ci mostrano che dovrà essere $A_{k+2} = 0$, $A_{k+3} = 0, \ldots$ e la serie (4) si riduce ad un polinomio.

Se la prima delle quantità $\psi(a+p)$, $\psi(a+2p)\ldots$, che si annulla, è la $\psi(a+kp)$, cioè se $a+kp$ è radice della $\psi(\vartheta) = 0$, senza che si annulli nessuna delle $\varphi(a)$, $\varphi(a+p), \ldots \varphi(a+(k-1)p)$, allora le equazioni (3) ci mostrano che dovrà essere $A_1 = 0$, $A_2 = 0 \ldots$ $A_{k-1} = 0$ e le equazioni (3) si riducono a quelle che nascerebbero dalla radice $a+kp$ della $\psi(\vartheta) = 0$ e lo sviluppo (4) diventa quello corrispondente a tale radice.

In questo caso si perde uno degli integrali particolari. Per riacquistarlo, indicato con y_1 quello che rimane, si pone $y = y_1 u + v$ e si cerca di determinare le funzioni u, v in modo che $y_1 u + v$ sia integrale della proposta equazione, notando che una delle due funzioni u, v può assumersi come meglio giova.

Se poi, essendo $\psi(a+kp) = 0$, è ancora $\varphi(a+(k-s)p) = 0$, allora le (3) ci mostrano che $A_{k-s+2} = 0$, $A_{k-s+3} = 0, \ldots A_k = 0$ e le (3) si scindono nei due seguenti sistemi di equazioni con i incognite A non comuni

$$\begin{cases} A_1 \varphi(a) + A_2 \psi(a+p) = 0, \\ A_2 \varphi(a+p) + A_3 \psi(a+2p) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{k-s} \varphi[a+(k-s-1)p] + A_{k-s+1} \psi[a+(k-s)p] = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{k+1} \varphi(a+kp) + A_{k+2} \psi[a+(k+1)p] = 0, \\ A_{k+2} \varphi[a+(k+1)p] + A_{k+3} \psi[a+(k+2)p] = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

e la (4) diviene

$$y = A_1 x^a \left\{ 1 - \frac{\varphi(a)}{\psi(a+p)} x^p + \dots \pm \frac{\varphi(a)\varphi(a+p)\dots\varphi[a+(k-s-1)p]}{\psi(a+p)\psi(a+2p)\dots\psi[a+(k-s)p]} x^{(k-s)p} \right\}$$

$$+ A_{k+1} x^{a+kp} \left\{ 1 - \frac{\varphi(a+kp)}{\psi[a+(k+1)p]} x^p + \frac{\varphi(a+kp)\varphi(a+(k+1)p]}{\psi[a+(k+1)p]\psi[a+(k+2)p]} x^{2p} \dots \right\}$$

con due costanti arbitrarie A_1, A_{k+1}; la serie che moltiplica A_{k+1} è l' integrale particolare che nascerebbe dalla radice $a+kp$ di $\psi(\vartheta) = 0$.

2) Qualora lo sviluppo di y per potenze ascendenti di x non riesca convergente, od anche indipendentemente da questo fatto, si potrà cercare uno sviluppo per potenze discendenti.

Si supponga allora nella (1)

$$m_1 > m_2 > m_3 > m_4 > \dots.$$

Procedendo in modo completamente analogo al precedente si giunge allo sviluppo

$$(5) \qquad y = A_1 x^a \left\{ 1 - \frac{\psi(a)}{\varphi(a-p)} x^{-p} + \frac{\psi(a)\psi(a-p)}{\varphi(a-p)\varphi(a-2p)} x^{-2p} \right.$$

$$\left. + \frac{\psi(a)\psi(a-p)\psi(a-2p)}{\varphi(a-p)\varphi(a-2p)\varphi(a-3p)} x^{-3p} - \dots \right\},$$

dove a è radice della equazione $\varphi(\vartheta) = 0$. È escluso il caso in cui

$\varphi(\vartheta)$ sia una costante. Valgono poi considerazioni completamente analoghe alle precedenti.

Notiamo che se nella (2) p è negativo, la (4) è lo sviluppo di y per potenze decrescenti di x, e la (5) lo sviluppo per potenze crescenti.

Il valore assoluto del rapporto d'un termine al precedente nella serie (4) è della forma $x^p \dfrac{\varphi(a+np)}{\psi(a+(n+1)p)}$, e nella (5) della forma $x^{-p} \dfrac{\psi(a+np)}{\varphi(a+(n+1)p)}$, cosichè, in particolare, la prima serie sarà convergente qualunque sia x se $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{\varphi(a+np)}{\psi(a+(n+1)p)} = 0$, la seconda se $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{\psi(a+np)}{\varphi(a+(n+1)p)} = 0$.

3) Se la radice a della equazione $\psi(\vartheta) = 0$ è complessa, $a = \alpha + i\beta$, il procedimento precedente vale ancora, ma il corrispondente integrale particolare contiene nei suoi termini l'immaginario i; volendo avere direttamente l'integrale scevro dagli immaginari si può procedere nel modo seguente. Notiamo che l'integrale y si riduce allora alla forma $y = x^\alpha x^{i\beta}(u_1 - iv_1)$, od anche $x^{i\beta}(u - iv)$ dove u, v sono serie reali ordinate secondo le stesse potenze ascendenti di x. Determiniamo u, v. Abbiamo (Vedi N. 198)

$$[x^p \varphi(\vartheta) + \psi(\vartheta)]\,[x^{i\beta}(u - iv)] = x^{i\beta}\,[x^p \varphi(\vartheta + i\beta) + \psi(\vartheta + i\beta)]\,(u - iv) = 0,$$

ossia, posto

$$\varphi_2(\vartheta) = \varphi(\vartheta) - \frac{\beta^2}{2!}\varphi''(\vartheta) + \frac{\beta^4}{4!}\varphi^{(IV)}(\vartheta) - \ldots,$$

$$\varphi_1(\vartheta) = \varphi'(\vartheta) - \frac{\beta^3}{3!}\varphi'''(\vartheta) + \frac{\beta^5}{5!}\varphi^{(V)}(\vartheta) - \ldots,$$

$$\psi_2(\vartheta) = \psi(\vartheta) - \frac{\beta^2}{2!}\psi''(\vartheta) + \ldots,\quad \psi_1(\vartheta) = \psi'(\vartheta) - \frac{\beta^3}{3!}\psi'''(\vartheta) + \ldots.$$

è

$$x^{i\beta}\{x^p[\varphi_2(\vartheta) + i\varphi_1(\vartheta)]\,(u - iv) + [\psi_2(\vartheta) + i\psi_1(\vartheta)]\,(u - iv)\} = 0$$

cosichè, sviluppando la quantità tra parentesi ed uguagliando a zero la parte reale ed il coefficiente di i dello sviluppo ottenuto, si ha:

per determinare u, v le due equazioni

$$x^p[\varphi_2(\vartheta)u + \varphi_1(\vartheta)v] + \psi_2(\vartheta)u + \psi_1(\vartheta)v = 0,$$

$$x^p[\varphi_1(\vartheta)u - \varphi_2(\vartheta)v] + \psi_1(\vartheta)u - \psi_2(\vartheta)v = 0.$$

Posto

$$u = A_1 x^{m_1} + A_2 x^{m_2} + \ldots, \quad v = B_1 x^{m_1} + B_2 x^{m_2} + \ldots$$

si sostituiscano questi valori nelle equazioni precedenti, e si proceda come abbiamo fatto prima. Si osservi che le due equazioni $\psi_1(\vartheta) = 0$, $\psi_2(\vartheta) = 0$ ammettono la radice comune α, giacchè è $\psi(\alpha + i\beta) = \psi_2(\alpha) + i\psi_1(\alpha) = 0$, ed allora si troverà che $m_1 = \alpha$, $m_2 = \alpha + p$, $m_3 = \alpha + 2p, \ldots$ e per determinare i coefficienti A_{r+1} e B_{r+1} le equazioni simultanee

$$\psi_1(\alpha + rp)B_{r+1} + \psi_2(\alpha + rp)A_{r+1} = -B_r\varphi_1[a + (r-1)p] - A_r\varphi_2[a + (r-1)p],$$

$$\psi_2(\alpha + rp)B_{r+1} - \psi_1(\alpha + rp)A_{r+1} = -B_r\varphi_2[a + (r-1)p] + A_r\varphi_1[a + (r-1)p],$$

cosichè rimangono arbitrarii A_1, B_1; ed abbiamo

$$u = x^\alpha[A_1 + A_2x^p + A_3x^{2p} + \ldots], \quad v = x^\alpha[B_1 + B_2x^p + B_3x^{2p} + \ldots].$$

Avendosi l'integrale particolare $y_1 = x^{i\beta}(u - iv)$ si ha anche l'integrale particolare $y_2 = x^{-i\beta}(u + iv)$ proveniente dalla radice $\alpha - i\beta$ coniugata alla $\alpha + i\beta$, e quindi ancora l'integrale particolare $(x^{i\beta} + x^{-i\beta})u - i(x^{i\beta} - x^{-i\beta})v$, ossia, poichè $x^{i\beta} = e^{i\beta \log x}$, l'integrale $2u\cos(\beta \log x) + 2v \operatorname{sen}(\beta \log x)$, ovvero, includendo il fattore 2 nelle costanti A_1, B_1, semplicemente $u\cos(\beta \log x) + v \operatorname{sen}(\beta \log x)$, che è reale e contiene due costanti arbitrarie.

226. Applichiamo ora il metodo precedente ad alcune equazioni importanti.

Equazione di Riccati (propriamente detta). È la equazione di primo ordine

$$u' + u^2 = \alpha x^n.$$

Poniamo $= u\dfrac{z'}{z}$; essa diventa

$$z'' - \alpha x^n z = 0. \tag{1}$$

Se si conosce l'integrale generale $\zeta = C_1 \zeta_1 - C_2 \zeta_2$ di questa ultima, l'integrale generale di quella di Riccati è

$$u = \frac{C_1 \zeta'_1 + C_2 \zeta_2'}{C_1 \zeta_1 + C_2 \zeta_2} = \frac{\zeta_1' + C\zeta_2'}{\zeta_1 + C\zeta_2}.$$

Trasformiamo ancora la (1) ponendo $\zeta = y e^{\int p\,dx}$, da cui $\zeta' = (y' + py)\, e^{\int p\,dx}$, $\zeta'' = (y'' + 2py' + p'y + p^2 y)\, e^{\int p\,dx}$; essa diviene $y'' + 2py' + y(p' + p^2 - \alpha x^n) = 0$.

Prendiamo p in modo che $p^2 - \alpha x^n = 0$, cioè, posto $\sqrt{\alpha} = c$, $m = \frac{n}{2}$, sia $p = cx^m$ e quindi $\zeta = e^{\frac{cx^{m+1}}{m+1}} y$, ed avremo per determinare y la equazione

$$(2) \qquad y'' + 2cx^m y' + mcx^{m-1} y = 0,$$

ossia la

$$x^2 y'' + 2cx^{m+2} y' + mcx^{m+1} y = \{ \vartheta(\vartheta - 1) + x^{m+1} c(2\vartheta + m) \} y = 0.$$

Sia $m + 1 > 0$ cioè $m > -1$; allora

$$p = m + 1 > 0, \quad \psi(\vartheta) = \vartheta(\vartheta - 1), \quad \varphi(\vartheta) = c(2\vartheta + m).$$

Quindi, corrispondentemente alle radici $\vartheta = 0$, $\vartheta = 1$ di $\psi(\vartheta) = 0$ ed in virtù della (4) n. 225, abbiamo gli integrali particolari, sviluppati per potenze ascendenti di x,

$$(3) \begin{cases} y_1 = C_1 \left\{ 1 - \dfrac{cm}{m(m+1)} x^{m+1} + \dfrac{c^2 m(3m+2)}{2(m+1)^2 (2m+1)} x^{2(m+1)} \right. \\ \qquad \left. - \dfrac{c^3 m(3m+2)(5m+4)}{3!(m+1)^3 m(2m+1)(3m+2)} x^{3(m+1)} + \dots \right\} \\ = C_1 \left\{ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \dfrac{c^r m(3m+2)(5m+4)(7m+6)..[(2r-1)m+2(r-1)]}{r!(m+1)^r m(2m+1)(3m+2)(4m+3)..(rm+r-1)} x^{r(m+1)} \right\} \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} y_2 = C_2 x \left\{ 1 - \dfrac{c(m+2)}{(m+1)(m+2)} x^{m+1} + \dfrac{c^2(m+2)(3m+4)}{2(m+1)^2 (m+2)(2m+3)} x^{2(m+1)} \right. \\ \qquad \left. - \dfrac{c^3(m+2)(3m+4)(5m+6)}{3!(m+1)^3 (m+2)(2m+3)(3m+4)} x^{2(m+1)} + \dots \right. \\ = C_2 x \left\{ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \dfrac{c^r (m+2)(3m+4)(5m+6)..[(2r-1)m+2r]}{r!(m+1)^r (m+2)(2m+3)..(rm+r+1)} x^{r(m+1)} \right. \end{cases}$$

Se $m+1<0$ cioè se $m<-1$, queste stesse formole ci danno ue integrali particolari in serie ordinata per potenze decrescenti di x.

Tutti questi sviluppi sono convergenti qualunque sia x, come suito si riconosce.

Quando si ha in mira la integrazione della (1), e quindi quella ella equazione di Riccati, basta considerare uno solo degli interali y_1, y_2 della (2). Invero indichiamo con y quello che consideiamo; esso è della forma, come risulta dalle (3), (4), $x=\mathrm{P}-c\mathrm{Q}$, ove P, Q contengono solo potenze pari di c, e $z=e^{\frac{cx^{m+1}}{m+1}}(\mathrm{P}-c\mathrm{Q})$ integrale della (1); ma, poichè cambiando c in $-c$ non muta α, nche $z=e^{\frac{-cx^{m+1}}{m+1}}(\mathrm{P}+c\mathrm{Q})$ è integrale della (1) ed il suo integrale enerale è quindi

$$z=\mathrm{C}_1\, e^{\frac{cx^{m+1}}{m+1}}(\mathrm{P}-c\mathrm{Q})+\mathrm{C}_2\, e^{-\frac{cx^{m+1}}{m+1}}(\mathrm{P}+c\mathrm{Q})$$

$$=\mathrm{P}\left(\mathrm{C}_1\, e^{\frac{\sqrt{\alpha}x^{m+1}}{m+1}}+\mathrm{C}_2\, e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x^{m+1}}{m+1}}\right)-c\mathrm{Q}\left(\mathrm{C}_1\, e^{\frac{\sqrt{\alpha}x^{m+1}}{m+1}}-\mathrm{C}_2\, e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x^{m+1}}{m+1}}\right)$$

e $\alpha>0$; se è $\alpha=-\alpha_1$, $\alpha_1>0$, esso prende la forma

$$z=(c_1\mathrm{P}-c_2\sqrt{\alpha_1}\mathrm{Q})\cos\frac{\sqrt{\alpha_1}x^{m+1}}{m+1}+(c_2\mathrm{P}+c_1\sqrt{\alpha_1}\mathrm{Q})\operatorname{sen}\frac{\sqrt{\alpha_1}x^{m+1}}{m+1}.$$

Si perde uno dei due integrali particolari y_1 o y_2 quando m è uno dei numeri seguenti:

$$-\frac{1}{2},-\frac{3}{4},-\frac{5}{6},-\frac{7}{8}\ldots;-\frac{3}{2},-\frac{5}{4},-\frac{7}{6},-\frac{9}{8},\ldots$$

cioè quando $m=-\frac{2h\pm1}{2h}$, h essendo un numero qualunque intero positivo.

Sono poi notevoli i casi seguenti. Se $m=-1$, è $p=0$. Non algono più gli sviluppi (3), (4), ma la (2) è la $\{\vartheta(\vartheta-1)+2c\vartheta-1\}y=0$, l cui integrale generale è $y=\mathrm{C}_1x^a+\mathrm{C}_2x^b$, dove a, b sono le radici della $\vartheta(\vartheta-1)+2c\vartheta-1=0$.

Se $m=-\frac{2}{3},-\frac{4}{5},-\frac{6}{7},\ldots-\frac{2h}{2h+1}$, y_1 si riduce alla orma $y_1=\mathrm{C}_1y_{01}+\mathrm{C}_2y_2$, dove y_{01} è un polinomio; si ha quindi

l'integrale particolare finito y_{01} e perciò la equazione di Riccati può integrarsi in termini finiti.

Se $m = -\frac{4}{3}, -\frac{6}{5}, -\frac{8}{7}, \ldots y_2$ si riduce alla forma $y_2 = C_1 y_{02} + C_2$, dove y_{02} è un polinomio. Se $m = -2$, la (2) ammette l'integrale particolare $y = x$.

In conseguenza, se $n = -\frac{4h}{2h \pm 1}$, dove h è un intero positivo qualunque, la equazione di Riccati può integrarsi in termini finiti (se $n = 0$, corrispondentemente ad $h = 0$, nella equazione di Riccati si separano subito le variabili).

Per esempio: siano le equazioni

$$(5) \qquad z'' - c^2 x^{-4} z = 0, \quad z'' + c^2 x^{-4} z = 0;$$

qui è $m = -2$, nel quale caso la (2) ammette l'integrale particolare $y = x$, cosichè $P = x$, $Q = 0$, e gli integrali delle (5) sono rispettivamente

$$z = x\left(C_1 e^{-\frac{c}{x}} + C_2 e^{\frac{c}{x}}\right), \quad z = x\left(C_1 \cos\frac{c}{x} + C_2 \operatorname{sen}\frac{c}{x}\right).$$

Per le equazioni

$$z'' - c^2 x^{-\frac{4}{3}} z = 0, \qquad z'' + c^2 x^{-\frac{4}{3}} z = 0,$$

è $m = -\frac{2}{3}$, $y_{01} = 1 - 3cx^{\frac{1}{3}}$, $P = 1$, $Q = 3x^{\frac{1}{3}}$,

e gli integrali sono rispettivamente

$$z = C_1 e^{3cx^{\frac{1}{3}}} + C_2 e^{-3cx^{\frac{1}{3}}} - 3cx^{\frac{1}{3}}\left(C_1 e^{3cx^{\frac{1}{3}}} - C_1 e^{-3cx^{\frac{1}{3}}}\right).$$

$$z = C_1 \cos(3cx^{\frac{1}{3}}) + C_2 \operatorname{sen}(3cx^{\frac{1}{3}}) - 3cx^{\frac{1}{2}}[C_2 \cos(3cx^{\frac{1}{3}}) - C_1 \operatorname{sen}(3cx^{\frac{1}{3}}$$

227. *Equazione di* Gauss. È la equazione

$$y'' + \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x}{x(1 - x)} y' - \frac{\alpha\beta}{x(1 - x)} y = 0, \text{ ossia la}$$

$$x^2 y'' + \gamma x y' - x[x^2 y'' + (\alpha + \beta + 1) x y' + \alpha\beta y]$$
$$= \{\vartheta(\vartheta + \gamma - 1) - x(\vartheta + \alpha)(\vartheta + \beta)\} y = 0.$$

Qui è $p=1$, $\varphi(\vartheta)=-(\vartheta+\alpha)(\vartheta+\beta)$, $\psi(\vartheta)=\vartheta(\vartheta+\gamma-1)$. integrale particolare corrispondente alla radice $\vartheta=0$ della $\psi(\vartheta)=0$ quindi

$$=1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\ldots$$

La importante serie del secondo membro chiamasi *serie ipergeometrica*; la si indica sempre colla notazione $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$.

Poichè $\lim\limits_{n=\infty}\frac{\varphi(n)}{\psi(n+1)}=-\lim\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}=1$, la serie ipergeometrica è convergente se $|x|<1$, divergente se $|x|>1$. Si dimostra poi [1]) che per $|x|=1$ essa è convergente se $\alpha+\beta-\gamma<0$, divergente se $\alpha+\beta-\gamma\geq 0$.

L'integrale particolare corrispondente alla radice $\vartheta=1-\gamma$, si deve essere

$$y_2=x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma,x).$$

228. Si abbia la equazione

1) $xy''+y'+y=0$ ossia $x^2y''+xy'+xy=(\vartheta^2+x)y=0$;

sichè $p=1$, $\varphi(\vartheta)=1$, $\psi(\vartheta)=\vartheta^2$.

Abbiamo un solo integrale particolare proveniente dalla radice $=0$ della $\psi(\vartheta)=0$, e questo è

$$y_1=1-\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{1^2.2^2}-\frac{x^3}{1^2.2^2.3^2}+\ldots=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!\,n!}.$$

---

[1]) In virtù del seguente teorema sulle serie:

La serie che ha per termine generale u_n *è convergente oppure divergente secondochè la prima delle espressioni*

$$\lim_{n=\infty}\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right),\qquad \lim_{n=\infty}\left[n-(n+1)\frac{u_{n+1}}{u_n}\right],$$

$$\lim_{n=\infty}\left[n\log n-\frac{n+1}{n}\log(n+1)\frac{u_{n+1}}{u_n}\right],$$

$$\lim_{n=\infty}\left\{n\log n\log(\log n)-\frac{n+1}{n}\log(n+1)\log[\log(n+1)]\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\}$$

. . . . . .

e non è uguale a zero, è positiva oppure negativa.

La serie è convergente qualunque sia x.

Per avere un altro integrale particolare, poniamo $y = y_1 u + v$ nella nostra equazione, la quale, avuto riguardo che y_1 ne è integrale particolare, diviene allora

$$xv'' + v' + v + y_1(xu'' + u') + 2xy_1'u' = 0.$$

Giova qui prendere u in modo che sia $xu'' + u' = 0$, cioè $xu' = C_1$, $u = C_1 \log x + C_2$, o semplicemente $u = \log x$, ed allora per determinare v abbiamo la equazione

$$xv'' + v' + v = -2xy'_1u' = -2y'_1 = 2 + 2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!\,n!}.$$

ossia
$$(\vartheta^2 + x)\,v = 2x + 2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{(n-1)!\,n!};$$

per cui, posto

$$v = A_0 + A_1 x + A_2 x_2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + \ldots,$$

dovremo determinare i coefficienti A in modo che sia identicamente

$$A_0 x + \sum_{n=1}^{\infty}(n^2 + x)A_n x^n = 2x + 2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n(n-1)!\,(n-1)!};$$

dovremo dunque avere $A_0 + A_1 = 2$, e noi prenderemo $A_0 = 0$, $A_1 = 2$, e poi $A_{n-1} + n^2 A_n = (-1)^{n+1}\dfrac{2}{n(n-1)!\,(n-1)!}$;

cioè avremo le relazioni

$$n^2 A_n = (-1)^{n+1}\frac{2}{n(n-1)!\,(n-1)!} - A_{n-1},$$

$$(n-1)^2 A_{n-1} = (-1)^n\frac{2}{(n-1)(n-2)!\,(n-2)!} - A_{n-2},$$

. . . . . .

$$3\,A_3 = (-1)^4\frac{2}{3\,2!\,2!} - A_2,$$

$$2^2 A_2 = (-1)^3\frac{2}{2\,1!\,1!} - A_1,$$

$$A_1 = 2;$$

ıoltiplicando l'ultima di queste equazioni per -1, la penultima er 2^2, la terz'ultima per $-2^2 . 3^2$, la precedente a questa per $2^2 . 3^2 . 4^2$ ssia per $4!\,4!$ etc. la seconda per $(-1)^n (n-2)!\,(n-2)!$ e la prima er $(-1)^{n-1} (n-1)!\,(n-1)!$, e poi sommando, otteniamo

$$A_n = \frac{(-1)^{n+1}\,2}{n!\,n!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right),$$

d in conseguenza

$$v = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{n+1}\,x^n}{n!\,n!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\right\}.$$

La serie è convergente qualunque sia x perchè il rapporto di i un termine al precedente è

$$\frac{x}{(n+1)^2}\left[1+\frac{1}{(n+1)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}\right]$$

he ha per limite zero al crescere di n, perchè $n+1$ e $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$ rescono indefinitamente con n.

Così abbiamo trovato un secondo integrale particolare $_2 = y_1 \log x + v$, e l'integrale generale della nostra equazione è ıerciò

$$= C_2 v + y_1(C_1 + C_2 \log x) = 2C_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,x^n}{n!\,n!}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$$

$$+ (C_1 + C_2 \log x)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^n}{n!\,n!}\right)$$

$$= 2C_2\left(x - \frac{3x^2}{2^3} + \frac{11\,x^3}{2^3 . 3^3} - \frac{50x^4}{2^3 . 3^3 . 4^3} + \ldots\right)$$

$$+ (C_1 + C_2 \log x)\left(1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{2^2 . 3^2} + \frac{x^4}{2^2 . 3^2 . 4^2} - \ldots\right).$$

La equazione più generale $xy'' + y' + ay = 0$ si ricava da quella ıra studiata sostituendovi ax in luogo di x.

Sia ancora la equazione

2) $x^2(a+bx)y'' + x(a-bx)y' + (a+2bx)y = 0$, ossia $a(\vartheta^2+1) + xb(\vartheta^2 - 2\vartheta + 2)]y = 0$.

Qui è $\varphi(\vartheta) = b(\vartheta^2 - 2\vartheta + 2)$, $\psi(\vartheta) = a(\vartheta^2 + 1)$, $p = 1$.
La equazione $\psi(\vartheta) = 0$ ha le due radici $\pm i$, cosichè $a = 0$, $\beta = 1$, ed essendo $\psi'(\vartheta) = 2a\vartheta$, $\psi''(\vartheta) = 2a$, $\varphi'(\vartheta) = 2b(\vartheta - 1)$, $\varphi''(\vartheta) = 2b$, e $\varphi_1(\vartheta) = 2b(\vartheta - 1)$, $\varphi_2(\vartheta) = b(\vartheta^2 - 2\vartheta + 1)$, $\psi_1(\vartheta) = 2a\vartheta$, $\psi_2(\vartheta) = a\vartheta^2$.
Le equazioni che determinano A_2, B_2 sono

$$2aB_2 + aA_2 = 2bB_1 - bA_1, \quad aB_2 - 2aA_2 = -bB_1 - 2bA_1,$$

dalle quali si ha $B_2 = \dfrac{b(3B_1 - 4A_1)}{5a}$; $A_2 = \dfrac{b(4B_1 + 3A_1)}{5a}$: e, poichè $\varphi_1(1) = 0$, $\varphi_2(1) = 0$, si trova $B_3 = 0$, $A_3 = 0$ e quindi ancora sono zero i coefficienti seguenti, e si ha così in termini finiti l'integrale generale della proposta equazione

$$y = \left[A_1 + \frac{b(4B_1 + 3A_1)}{5a}x\right]\cos(\log x) + \left[B_1 + \frac{b(3B_1 - 4A_1)}{5a}x\right]\operatorname{sen}(\log x).$$

Esercizi.

1. $y'' - \alpha x^n y = 0$; è la equazione considerata nell'esempio al n. 29; se n è intero positivo avremo, applicando le formole del n. 24, l'integrale generale, per qualunque valore di x,

$$y = C_1\left\{1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\alpha^r x^{r(n+2)}}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)(3n+5)(3n+6)\ldots(rn+2r-1)(rn+2r)}\right\}$$

$$+ C_2\left\{x + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\alpha^r x^{r(n+2)+1}}{(n+2)(n+3)(2n+4)(2n+5)(3n+6)(3n+7)\ldots(rn+2r)(rn+2r+1)}\right\}$$

ovvero

$$y = C_1\left\{1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\alpha^r x^{r(n+2)}}{r!\,(n+2)^r(n+1)(2n+3)(3n+5)\ldots(rn+2r-1)}\right\}$$

$$+ C_2 x\left\{1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\alpha^r x^{r(n+2)}}{r!\,(n+2)^r(n+3)(2n+5)(3n+7)\ldots(rn+2r+1)}\right\}.$$

2. $xy'' + 2ny' + mxy = 0$;

$$y = C_1\left\{1 - \frac{mx^2}{2(2n+1)} + \frac{m^2x^4}{2.4(2n+1)(2n+3)} - \frac{m^3x^6}{2.4.6(2n+1)(2n+3)(2n+5)}\right.$$

$$+ C_2 x^{1-2n}\left\{1 - \frac{mx^2}{2(3-2n)} + \frac{m^2x^4}{2.4(3-2n)(5-2n)} - \frac{m^3x^6}{2.4.6(3-2n)(5-2n)(7-2n)}\right.$$

Per $2n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \ldots$ si perde un integrale particolare che si può riacquistare come abbiamo visto. Così per $2n = 1$ abbiamo

$$y = (C_1 + C_2 \log x)\left(1 - \frac{m x^2}{2^2} + \frac{m^2 x^4}{2^2 . 4^2} - \frac{m^3 x^6}{2^2 . 4^2 . 6^2} + \ldots\right)$$

$$+ C_1 \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^r m^r x^{2r}}{2^2 . 4^2 . 6^2 \ldots (2r)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{r}\right) \right\}.$$

Per $n = 1$ è $y = \frac{1}{x} [C_1 \operatorname{sen}(x\sqrt{m}) + C_2 \cos(x\sqrt{m})]$.

3. Integrando per serie, e poi mediante una semplice trasformazione, la equazione

$$(1 - x^2) y'' - x y' + a^2 y = 0,$$

si dimostrino le notevoli formole, dovute ad Eulero,

$$\cos(a \operatorname{arc\,sen} x) = 1 - \frac{a^2}{2!} x^2 + \frac{a^2(a^2 - 2^2)}{4!} x^4 - \frac{a^2(a^2 - 2^2)(a^2 - 4^2)}{6!} x^6 + \ldots,$$

$$\operatorname{sen}(a \operatorname{arc\,sen} x) = a \left\{ x - \frac{a^2 - 1^2}{3!} x^3 + \frac{(a^2 - 1^2)(a^2 - 3^2)}{5!} x^5 \right.$$

$$\left. - \frac{(a^2 - 1^2)(a^2 - 3^2)(a^2 - 5^2)}{7!} x^7 + \ldots \right\},$$

valevoli per $|x| < 1$.

Usando il teorema sulle serie nella nota a pag. 621 si potrà anche provare che valgono per $|x| = 1$.

4. $(x - x^3) y'' + (1 - 3x^2) y' - x y = 0$ (Vedi vol. I, p. 219). Per $|x| < 1$ abbiamo un integrale particolare

$$y_1 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 x^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3 x^6 + \ldots + \left(\frac{1.3.5..(2n-1)}{2.4.6..2n}\right)^2 x^{2n} + \ldots$$

Si provi che è

$$y_1 = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - x^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - x^2 \zeta^2)}} = \frac{\pi}{2} K,$$

e quindi che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(1-x^2)\operatorname{sen}^2\varphi}} = K'$ è altro integrale particolare, cosichè l'integrale generale è $y = C_1 K + C_2 K'$. (K, K' si chiamano gli integrali ellittici completi di prima specie, od anche i moduli di periodicità delle funzioni ellittiche di Abel e Jacobi).

5. $x^2 y'' - (x^2 + 4x) y' + 4y = 0$; $y = C_1 x^4 e^x + C_2 x^4 e^x \int \frac{dx}{x^4 e^x}$.

6. $x^{\frac{8}{3}} y'' - c^2 y = 0$, $x^{\frac{8}{3}} y'' + c^2 y = 0$;

integrali, rispettivamente,

$$y = C_1 e^{-3cx^{-\frac{1}{2}}} (x + 3cx^{\frac{2}{3}}) + C_2 e^{3cx^{-\frac{1}{3}}} (3cx^{\frac{2}{3}} - x),$$

$$y = 3cx^{\frac{2}{3}} [C_1 \cos(3cx^{-\frac{1}{3}}) - C_2 \operatorname{sen}(3cx^{-\frac{1}{3}})]$$

$$+ x[C_2 \cos(3cx^{-\frac{1}{3}}) - C_1 \operatorname{sen}(3cx^{-\frac{1}{3}})].$$

7. $xy'' + y' + ax^{n-1} y = 0$; qualunque siano x ed n è

$$y = (C_1 \log x + C_2) \left\{ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{a^r x^{rn}}{2^2 . 3^2 \ldots r^2 n^{2r}} \right\}$$

$$+ 2C_1 \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{r-1} a^r x^{rn}}{2^2 . 3^2 \ldots r^2 n^{2r+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{r}\right) \right\}.$$

8. Della equazione $x^2(a + bx^n) y'' + x(c + ex^n) y' + (f + gx^n) y = 0$ si può calcolare un integrale in termini finiti se $\beta - \alpha = rn$, dove r è un numero intero positivo (negativo) se $n > 0$ ($n < 0$), e α, β sono radici rispettivamente delle equazioni $a\zeta^2 + (c - a)\zeta + f = 0$, $b\zeta^2 + (c - b)\zeta + g = 0$.

Così ad es.: l'equazione $x^2(a + bx^3) y'' + axy' - 16ay = 0$ ammette l'integrale $y = \frac{1}{x^4} + \frac{5}{3} \frac{b}{a} \frac{1}{x^2} + \frac{5}{8} \frac{b^2}{a^2}$, e la equazione $x^2 y'' + (x + x^2) y' + (x - 9) y = 0$ l'integrale

$$y = \frac{1}{x^3} - \frac{2}{5} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{20} \frac{1}{x}.$$

9. $(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$ (Equazione di LEGENDRE). Per $|x|>1$ è

$$y_1=x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\,.\,4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(a-5)}{2\,.\,4\,.\,6(2n-1)(2n-3)(2n-5)}x^{n-6}+\ldots,$$

$$y_2=x^{-(n+1)}+\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}x^{-(n+3)}+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\,.\,4(2n+3)(2n+5)}x^{-(n+5)}+\ldots$$

Se n è intero positivo y_1 si riduce ad un polinomio, se n intero negativo vi si riduce y_2, se $2n$ è un numero dispari positivo o negativo si perde un integrale particolare.

10. $x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$ (Equazione di BESSEL).

$$y_1=x^n\left\{1-\frac{x^2}{2^2(n+1)}+\frac{x^4}{2!\,2^4(n+1)(n+2)}-\frac{x^6}{3!\,2^6(n+1)(n+2)(n+3)}+\ldots\right\}$$

e y_2 si ottiene da y_1 cambiandovi n in $-n$. Se n è intero si perde un integrale particolare.

11. $x^2(1+x^2)\,y''+x(1-3x^2)y'+(1+5x^2)y=0$,

$y=(C_1+C_2x^2)\cos(\log x)+(C_2-C_1x^2)\operatorname{sen}(\log x)$.

Integrazione di equazioni differenziali mediante integrali definiti

229. Alcune volte giova tentare di soddisfare ad una data equazione differenziale mediante integrali definiti, che contengano come parametro variabile la variabile indipendente della proposta equazione. Ci limiteremo solo ad un cenno di questo importante metodo di integrazione.

Si abbia una equazione della forma

$$(a_0+b_0x)y^{(n)}+(a_1+b_1x)y^{(n-1)}+\ldots+(a_{n-1}+b_{n-1}x)y'+(a_n+b_nx)y=0,$$

ossia, posto $\frac{d}{dx} = \mathrm{D}$,

$$x\varphi(\mathrm{D})y + \psi(\mathrm{D})y = 0, \tag{1}$$

dove φ, ψ sono simboli di funzioni razionali intere di grado n.

Cerchiamo se si possano determinare i limiti α, β, indipendenti da x, e la funzione T di t in guisa che

$$y = \int_\alpha^\beta e^{xt}\,\mathrm{T}dt \tag{2}$$

risulti integrale della proposta equazione. Osservando che

$$y' = \int_\alpha^\beta e^{xt}t\,\mathrm{T}dt,\ y'' = \int_\alpha^\beta e^{xt}t^2\,\mathrm{T}dt, \ldots$$

il risultato della sostituzione del valore (2) di y nel primo membro della (1) è, tenendo conto di note proprietà del simbolo D,

$$\int_\alpha^\beta xe^{xt}\varphi(t)\,\mathrm{T}dt + \int_\alpha^\beta e^{xt}\psi(t)\,\mathrm{T}dt,$$

ossia, integrando per parti il primo integrale,

$$\Big[e^{xt}\varphi(t)\,\mathrm{T}\Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta e^{xt}\left[\frac{d}{dt}\{\varphi(t)\mathrm{T}\} - \psi(t)\mathrm{T}\right]dt,$$

che sarà zero, e quindi il valore (2) di y sarà integrale della (1) se determineremo la funzione T mediante la equazione

$$\frac{d}{dt}\{\varphi(t)\mathrm{T}\} - \psi(t)\mathrm{T} = 0 \tag{3}$$

da verificarsi per i valori di t dell'intervallo (α, β), e i limiti α, β in guisa che sia

$$[e^{xt}\varphi(t)\,\mathrm{T}]_\alpha^\beta = 0. \tag{4}$$

Scritta la (3) nella forma

$$\frac{d}{dt}\{\varphi(t)\mathrm{T}\}-\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\varphi(t)\mathrm{T}=0,$$

ricaviamo da essa

$$\varphi(t)\mathrm{T}=\mathrm{C}e^{\int\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}dt},\ \mathrm{T}=\frac{\mathrm{C}}{\varphi(t)}e^{\int\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}dt}.$$

dove C indica una costante arbitraria.

Determinata così la funzione T di t, cercheremo valori di α, β in guisa che sia soddisfatta la (4), cioè $\left[\mathrm{C}e^{xt+\int\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}dt}\right]_{\alpha}^{\beta}=0$. Se si trovano questi valori α, β di t, allora la (2), dove T, α, β hanno i valori ora trovati, è integrale della (1). Altrimenti giova procedere nel modo seguente. Preso un certo valore costante μ_1, sia β_1 un valore di t, indipendente da x, tale che per $t=\beta_1$ risulti $e^{xt+\int\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}dt}=\mu_1$, e siano analogamente $\beta_2, \beta_3, \ldots$ valori di t tali che sia

$$e^{xt+\int\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}dt}=\mu_2,\qquad e^{xt+\int\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}dt}=\mu_3,\ldots$$

Allora si riconosce subito che

5) $$y=\mathrm{C}_1\int_{\beta_1}^{\beta_2}e^{xt}\mathrm{T}dt+\mathrm{C}_2\int_{\beta_1}^{\beta_2}e^{xt}\mathrm{T}dt+\ldots$$

è integrale della (1), se tra le costanti $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots$ si stabilisce la relazione

$$\mathrm{C}_1(\mu_2-\mu_1)+\mathrm{C}_2(\mu_3-\mu_1)+\ldots=0;$$

cosichè se i termini nel secondo membro della (5) saranno $n+1$, la (5) ci darà l'integrale generale della proposta equazione.

Esempi

1) Sia la equazione $xy''+a^2y'-b^2xy=0$.

Qui è $\varphi(t)=t^2-b^2$, $\psi(t)=a^2t$, $\int\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}dt=\frac{a^2}{2}\log(t^2-b^2)$,

quindi $T = \frac{1}{t^2 - b^2}(t^2 - b^2)^{\frac{a^2}{2}} = (t^2 - b^2)^{\frac{a^2}{2} - 1}$. Per determinare i limiti dell'integrale osserviamo che la equazione $e^{xt}(t^2 - b^2)^{\frac{a^2}{2}} = 0$ è soddisfatta da $t = b$, $t = -b$, ed inoltre, se $x > 0$, da $t = -x$, e se $x < 0$, da $t = \infty$; cosichè abbiamo l'integrale generale della equazione proposta

$$y = C_1 \int_{-b}^{b} (t^2 - b^2)^{\frac{a^2}{2} - 1} e^{xt} dt + C_2 \int_{-\infty}^{-b} (t^2 - b^2)^{\frac{a^2}{2} - 1} e^{tx} dt \text{ per } x > 0.$$

$$y = C_1 \int_{-b}^{b} (t^2 - b^2)^{\frac{a^2}{2} - 1} e^{tx} dt + C_2 \int_{b}^{\infty} (t^2 - b^2)^{\frac{a^2}{2} - 1} e^{tx} dt \text{ per } x < 0.$$

2) Sia $y^{(n)} - xy = 0$. Qui è $\varphi(t) = -1$, $\psi(t) = t^n$, quindi $T = e^{-\frac{t^{n+1}}{n+1}}$; la equazione $e^{xt - \frac{t^{n+1}}{n+1}} = 0$ è soddisfatta da $t = \infty$ e la $e^{xt - \frac{t^{n+1}}{n+1}} = 1$ da $t = 0$; cosichè il risultato della sostituzione di $\int_0^\infty e^{xt - \frac{t^{n+1}}{n+1}} dt$ in luogo di y nel primo membro della equazione proposta è uguale ad *uno*. Osserviamo che la funzione T non cambia ponendo ωt in luogo di t, dove ω indica una radice $(n+1)^a$ dell'unità e il risultato della sostituzione di $\int_0^\infty e^{\omega xt - \frac{t^{n+1}}{n+1}} d(\omega t)$ per y nel primo membro della proposta è uguale ad *uno*.

Da quanto precede si scorge facilmente che, se ω indica una radice primitiva $(n+1)^a$ dell'unità,

$$y = C_0 \int_0^\infty e^{xt - \frac{t^{n+1}}{n+1}} dt + \omega C_1 \int_0^\infty e^{\omega xt - \frac{t^{n+1}}{n+1}} dt + \omega^2 C_2 \int_0^\infty e^{\omega^2 xt - \frac{t^{n+1}}{n+1}} dt + \cdots$$

$$+ \omega^n C_n \int_0^\infty e^{\omega^n xt - \frac{t^{n+1}}{n+1}} dt$$

è l'integrale generale della proposta equazione se tra le costanti C poniamo la relazione

$$C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_n = 0 .$$

Si potranno poi fare sparire gli immaginari dal secondo membro del precedente valore di y.

Esercizi

1. $xy'' - (\alpha - \beta)(1 + x)y' - \alpha\beta xy = 0 , \ \beta > \alpha > 0 ;$

$$y = C_1 \int_{-\beta}^{\alpha} e^{xt} (t - \alpha)^{\frac{(\beta-\alpha)\alpha}{\alpha+\beta} - 1} (t + \beta)^{\frac{(\beta-\alpha)\beta}{\alpha+\beta} - 1} dt$$

$$+ C_2 \int_{-\infty}^{-\beta} e^{xt} (t - \alpha)^{\frac{(\beta-\alpha)\alpha}{\alpha+\beta} - 1} (t + \beta)^{\frac{(\beta-\alpha)\beta}{\alpha+\beta} - 1} dt$$

se $x > 0$; se $x < 0$ si cambiano i limiti del secondo integrale in α , ∞.

2. $xy'' + ay' + b^2xy = 0 \ , \ a < 0 ;$

$$y = C_1 \int_0^{bi} e^{xt} (t^2 + b^2)^{\frac{a}{2} - 1} dt + C_2 \int_0^{bi} e^{xt} (t^2 + b^2)^{\frac{a}{2} - 1} dt + C_3 \int_{-\infty}^{0} e^{xt} (t^2 + b^2)^{\frac{a}{2} - 1} dt ,$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0 ,$$

ovvero

$$y = \int_0^b (b^2 - u^2)^{\frac{a}{2} - 1} [C \cos(ux) + C_3 \operatorname{sen}(ux)] du + C_3 \int_{-\infty}^{0} e^{xt} (t^2 + b^2)^{\frac{a}{2} - 1} dt ,$$

se $x > 0$; per $x < 0$, si cambiano i limiti dell'ultimo integrale in $0 , \infty$.

3. $xy'' - axy' + (n + m + 2)y' - (n + 1)ay = 0 , \ m + 1 > 0 ,$ $n + 1 > 0.$

$$y = C_1 \int_0^a e^{tx} t^n (t-a)^m \, dt + C_2 \int_0^{\mp\infty} e^{tx} t^n (t-a)^m \, dt,$$

$$-\infty \text{ se } x > 0, \; +\infty \text{ se } x < 0;$$

in particolare, l'integrale della $xy'' + (2 - ax)y' - ay = 0$ è

$$y = \frac{1}{x}(C_1 + C_2 e^{ax}).$$

4. Le equazioni della forma

$$x^2 y'' + (a_1 + b_1 x^m) x y' + (a + b x^m + c x^{2m}) y = 0,$$

posto $x^m = t$, $y = t^k z$, dove k è determinato dalla equazione $m^2 k^2 + (a_1 - 1) k m + a = 0$, si riducono alla forma, considerata nel testo,

$$m^2 t \frac{d^2 z}{dt^2} + [2m^2 k + m(m-1) + m a_1 + m b_1 t] \frac{dz}{dt} + (m k b_1 + b + c t) z = 0.$$

5. $y'' + a^2 x^{2m-2} y = 0$; qualunque sia m, purchè non appartenente all'intervallo $(0, 1)$, è

$$y = \int_0^a (a^2 - t^2)^{-\frac{(m+1)}{2m}} \left[C_1 \cos\left(\frac{t x^m}{m}\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{t x^m}{m}\right) \right] dt$$

$$+ C_2 \int_{-\infty}^0 e^{\frac{t x^m}{m}} (t^2 + a^2)^{-\frac{1+m}{2m}} \, dt, \text{ se } \frac{x^m}{m} > 0,$$

e se $\frac{x^m}{m} < 0$ si cambiano i limiti del secondo integrale in $0, x$; od anche

$$y = \int_0^a (a^2 - t^2)^{-\frac{1+m}{2m}} \cos \frac{t x^m}{m} \left[C_1 + C_2 x^{\frac{1}{m}} (a^2 - t^2)^{\frac{1}{m^2}} \right] dt.$$

Equazioni a derivate parziali che contengono le derivate rapporto ad una sola delle variabili indipendenti, ed equazioni a derivate parziali lineari con tre o più variabili.

230. Le equazioni a derivate parziali nelle quali non compariscono che le derivate della funzione incognita rapporto ad una sola delle variabili indipendenti si integrano, come è chiaro, coi metodi di integrazione delle equazioni differenziali ordinarie, considerandovi come costanti quelle variabili indipendenti, le derivate rispetto alle quali non sono contenute nell'equazione proposta, e ponendo, nell'integrale che si ottiene, una loro funzione arbitraria in luogo della costante arbitraria.

ESEMPI.

1) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + f(x, y, z, \ldots) u = \varphi(x, y, z, \ldots)$.

Integrando, considerando $y, z, \ldots$ come costanti, abbiamo

$$u = e^{-\int f(x, y, z, \ldots) dx} \left\{ \int \varphi(x, y, z, \ldots) e^{\int f(x, y, z, \ldots) dx} dx + \psi(y, z \ldots) \right\}$$

dove $\alpha(y, z, \ldots)$ indica una funzione arbitraria di $y, z, \ldots$

2) $z \dfrac{\partial z}{\partial x} - y^2 z^2 = y^3 x$ (è una equaz. di BERNOULLI rispetto a z e x).

L'integrale è

$$y(z^2 + xy) = \varphi(y) e^{2xy^2},$$

dove $\varphi(y)$ indica una funzione arbitraria.

3) $f_1(y, z) \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_2(y, z) \dfrac{\partial u}{\partial x} + f_3(y, z) u = 0$;

l'integrale è

$$u = \varphi_1(y, z) e^{\alpha_1 x} + \varphi_2(y, z) e^{\alpha_2 x},$$

dove α_1, α_2 sono le radici della equazione

$$f_1(y, z) \alpha^2 + f_2(y, z) \alpha + f_3(y, z) = 0,$$

e φ_1, φ_2 indicano due funzioni arbitrarie.

231. Consideriamo ora le equazioni a derivate parziali di primo ordine fra tre variabili, che contengono linearmente le derivate parziali, e che si chiamano perciò equazioni *lineari*, cioè le equazioni della forma

$$(1) \qquad Pp + Qq = R,$$

dove P, Q, R indicano funzioni di x, y, z e $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Le equazioni (1) possono immaginarsi generate nel modo seguente:

Siano $\alpha = \alpha(x, y, z)$, $\beta = \beta(x, y, z)$ due funzioni determinate di x, y, z; stabiliamo tra esse una relazione arbitraria $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, ossichè una delle variabili, la z, si possa considerare come funzione delle altre due variabili x, y. Abbiamo allora, derivando rapporto ad x e ad y,

$$(2) \qquad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} p\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial z} p\right) = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} q\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\left(\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial z} q\right) = 0, \end{cases}$$

dalle quali equazioni rimane eliminata la funzione arbitraria φ e solo in esse compariscono le derivate $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$. Eliminando ancora queste derivate si ottiene

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} p & \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} q \\ \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial z} p & \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial z} q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial z} & \frac{\partial \alpha}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta}{\partial z} & \frac{\partial \beta}{\partial y} \end{vmatrix} p + \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \alpha}{\partial z} \\ \frac{\partial \beta}{\partial x} & \frac{\partial \beta}{\partial z} \end{vmatrix} q + \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \alpha}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta}{\partial x} & \frac{\partial \beta}{\partial y} \end{vmatrix} = 0,$$

che è una equazione della forma (1).

Ciò premesso, è naturale, per integrare la equazione (1), vedere se sia possibile trovare due funzioni $\alpha(x, y, z)$, $\beta(x, y, z)$ tali che la z determinata da una relazione arbitraria tra esse $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ soddisfaccia alla (1), cioè sia tale che i valori di p, q che da questa si ricavano, ossia quelli dati dalle (2), soddisfacciano alla (1) qualunque sia φ. Ora sostituendo i valori di p, q ricavati dalle (2) nella (1),

quest'ultima diventa

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\left(P\frac{\partial\alpha}{\partial x}+Q\frac{\partial\alpha}{\partial y}+R\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\left(P\frac{\partial\beta}{\partial x}+Q\frac{\partial\beta}{\partial y}+R\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)=0$$

e questa sarà soddisfatta qualunque sia la funzione φ, se le funzioni α, β saranno tali da rendere nulli i coefficienti di $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}$, cioè se esse soddisfaranno alla equazione

$$P\frac{\partial\theta}{\partial x}+Q\frac{\partial\theta}{\partial y}+R\frac{\partial\theta}{\partial z}=0 \tag{3}$$

e la integrazione della (1) è così ridotta a trovare due funzioni α, β di x, y, z che sostituite in luogo di θ nella (3) la soddisfacciano. A tale scopo osserviamo che se $\theta=\theta(x, y, z)$ è tale funzione di x, y, z che si riduca ad una costante ove per y, z si pongano integrali delle equazioni simultanee $\frac{dy}{dx}=\frac{Q}{P}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{R}{P}$ (si suppone P diverso da zero, una almeno delle P, Q, R dovendo essere tale), cioè se $\theta=$ costante è integrale di queste equazioni, allora se in

$$d\theta=\frac{\partial\theta}{\partial x}dx+\frac{\partial\theta}{\partial y}dy+\frac{\partial\theta}{\partial z}dz=dx\left[\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{dz}{dx}\right]$$

sostituiamo a $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ i precedenti valori avremo $d\theta=0$. ed otteniamo così appunto $\frac{\partial\theta}{\partial x}P+\frac{\partial\theta}{\partial y}Q+\frac{\partial\theta}{\partial z}R=0$, cioè la funzione $\theta(x, y, z)$ soddisfa alla (3).

Da quanto precede si ricava;

Per trovare un integrale della equazione lineare

$$Pp+Qq=R,$$

si trovino due integrali, risoluti rispetto alle costanti, $\alpha(x, y, z)=C_1$, $\beta(x, y, z)=C_2$, *del sistema di equazioni differenziali ordinarie* $\frac{dy}{dx}=\frac{Q}{P}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{R}{P}$ (P *diverso da zero*), *che possiamo compendiare nel sistema*

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R};$$

ed allora $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, *dove* φ *è una funzione arbitraria, è un integrale della proposta equazione.*

È anzi l'*integrale generale*, perchè qualunque altro integrale $\psi(x, y, z) = 0$ della (1) ne è caso particolare, corrispondente ad una certa forma particolare della funzione arbitraria φ. Invero, avremo

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial z} p = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial z} q = 0,$$

e sostituendo i valori di p e q, che da esse si traggono, nella (1), dovremo avere, poichè $\psi = 0$ ne è integrale,

$$P\frac{\partial\psi}{\partial x} + Q\frac{\partial\psi}{\partial y} + R\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0;$$

ma abbiamo altresì

$$P\frac{\partial\alpha}{\partial x} + Q\frac{\partial\alpha}{\partial y} + R\frac{\partial\alpha}{\partial z} = 0,$$

$$P\frac{\partial\beta}{\partial x} + Q\frac{\partial\beta}{\partial y} + R\frac{\partial\beta}{\partial z} = 0,$$

ed in conseguenza

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial z} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial x} & \frac{\partial\alpha}{\partial y} & \frac{\partial\alpha}{\partial z} \\ \frac{\partial\beta}{\partial x} & \frac{\partial\beta}{\partial y} & \frac{\partial\beta}{\partial z} \end{vmatrix} = 0;$$

cosichè, essendo nullo l'Jacobiano delle ψ, α, β rapporto alle variabili x, y, z, dovrà tra le funzioni ψ, α, β passare una certa relazione $\psi = f(\alpha, \beta)$, e l'integrale $\psi = 0$ si ricava perciò dall'integrale $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ prendendo la funzione arbitraria φ uguale alla f.

232. In modo completamente analogo si procede riguardo alle equazioni a derivate parziali di primo ordine lineari fra quanti si vogliano variabili. Indicando con $p_1, p_2, \ldots p_n$ le derivate di z fra

porto, rispettivamente, ad $x_1, x_2, \ldots x_n$, e con $P_1, P_2, \ldots P_n$, R delle funzioni di $x_1, x_2, \ldots x_n, z$, abbiamo la regola seguente:

Per integrare la equazione a derivate parziali lineare di primo ordine

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots + P_n p_n = R$$

si formi il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{R}$$

e ne sia

$$\alpha_1(x_1, x_2 \ldots x_n, z) = C_1, \alpha_2(x_1, x_2, \ldots x_n, z) = C_2, \ldots, \alpha_n(x_1, x_2 \ldots x_n, z) = C_n$$

il sistema di equazioni integrali risolute rapporto alle costanti; allora

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = 0,$$

dove φ indica una funzione arbitraria, è l'integrale generale della proposta equazione a derivate parziali.

La funzione arbitraria φ potrà essere determinata da speciali condizioni. Così, ad esempio, si potrà porre la condizione che per $x_1 = x^0_1$ la z divenga una data funzione

$$z = f(x_2, x_3, \ldots x_n)$$

delle altre variabili $x_2, x_3, \ldots x_n$. Dovremo allora determinare la forma della φ in guisa che per $x_1 = x_1^0$ la equazione $\varphi = 0$ sia soddisfatta da $z = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$. A tale scopo poniamo

$$\alpha^0_1 = \alpha_1 [x^0_1, x_2, x_3, \ldots x_n, f(x_2, x_3, \ldots x_n)],$$

$$\alpha^0_2 = \alpha_2 [x^0_1, x_2, x_3, \ldots x_n, f(x_2, x_3, \ldots x_n)],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha^0_n = \alpha_n [x^0_1, x_2, x_3, \ldots x_n, f(x_2, x_3, \ldots x_n)];$$

eliminando $x_2, x_3, \ldots x_n$ tra queste equazioni otteniamo un risultato della forma $\psi(\alpha^0_1, \alpha^0_2, \ldots \alpha^0_n) = 0$, cosichè, essendo identicamente

$$\psi\{\alpha_1 [x^0_1, x_2, \ldots x_n, f(x_2, x_3, \ldots x_n)], \ldots \alpha_n [x^0_1, x_2, \ldots x_n, f(x_2, \ldots x_n)]\} = 0,$$

ove si prenda per φ la funzione ψ ora determinata, sarà

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = 0$$

l' integrale richiesto soddisfacente alla voluta condizione.

Esempi

1) Per integrare l' equazione a derivate parziali lineare

$$(x^2 - y^2 - z^2)\, p + 2xyq = 2xz$$

si formi il sistema ausiliario di equazioni differenziali ordinarie

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz},$$

per integrare il quale osserviamo intanto che la equazione $\frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$ ci dà $\frac{y}{z} = C_1$; ponendo poi $y = C_1 z$ nella $\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dz}{2xz}$, essa diviene $\frac{dx}{x^2 - (1 + C^2_1) z^2} = \frac{dz}{2xz}$, equazione omogenea, il cui integrale è $\frac{(1 + C^2_1) z^2 + x^2}{z} = C_2$. Sostituendo per C^2_1 il suo valore $\frac{y^2}{z^2}$, abbiamo $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z} = C_2$, che unitamente a $\frac{y}{z} = C_1$ forma il sistema degli integrali risolventi rapporto alle costanti del sistema ausiliario di equazioni differenziali. L' integrale generale della proposta equazione a derivate parziali è perciò

$$\varphi\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0,$$

dove φ è funzione arbitraria.

Si osservi anche che questo integrale può porsi sotto la forma

$$\psi\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{y}, \frac{y}{z}\right) = 0,$$

ove ψ indica funzione arbitraria; basta notare che

$$\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{z}, \frac{y}{z}\right) = \psi\left(\frac{\frac{x^2+y^2+z^2}{z}}{\frac{y}{z}}, \frac{y}{z}\right) = \psi\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{y}, \frac{y}{z}\right).$$

Se si volesse che per $x=0$ fosse $z=y^2$, posto $= \frac{x^2+y^2+z^2}{z}$, $\beta = \frac{y}{z}$, avremo che, per $x=0$, $z=y^2$ è $= 1+y^2$, $\beta = \frac{1}{y}$, dalle quali, eliminando y, si ottiene $= 1 + \frac{1}{\beta^2}$. Prendendo quindi $\varphi(\alpha, \beta) = \alpha - 1 - \frac{1}{\beta^2}$, si ottiene $\frac{{}^2+y^2+z^2}{z} = 1 + \frac{z^2}{y^2}$, che ci dà l'integrale particolare richiesto rente la proprietà che il valore di z, che se ne ricava, sia $z=y^2$ er $x=0$.

2) *Equazione a derivate parziali delle superficie cilindriche.* — i vogliano determinare quelle superficie il cui piano tangente in gni loro punto è parallelo ad una retta $x=az$, $y=bz$ (superficie ilindriche). L'equazione del piano tangente in un punto (x, y, z) sendo

$$Z - z = p(X-x) + q(Y-y),$$

condizione che esso sia parallelo alla data retta è che sia

$$ap + bq = 1,$$

questa è l'equazione a derivate parziali di qualunque superficie ilindrica.

Per integrarla osserviamo che dal sistema ausiliario corrispondente

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1}$$

ricava $x - az = c_1$, $y - bz = c_2$ e quindi l'integrale generale, ssia l'equazione di qualunque superficie cilindrica, è della forma

$$\varphi(x-az, y-bz) = 0.$$

Si voglia determinare la funzione φ in modo che il cilindro passi per la curva

$$f(x, y, z) = 0 \ , \ \psi(x, y, z) = 0.$$

Posto $x - az = \alpha$, $y - bz = \beta$, queste equazioni diventano

$$f(az + \alpha, \ bz + \beta, \ z) = 0, \quad \psi(az + \alpha, \ bz + \beta, \ z) = 0,$$

dalle quali eliminando z otteniamo una equazione della forma

$$F(\alpha, \beta) = 0 \qquad \text{ossia} \qquad F(x - az, y - bz) = 0.$$

Dovremo quindi prendere per ψ la funzione F. Così se si vuole che il cilindro passi pel circolo $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$, $z = 0$, eliminiamo z tra le equazioni $(az + \alpha)^2 + (bz + \beta)^2 + z^2 = r^2$ e $z = 0$ ottenendo così $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$. Il richiesto cilindro è quindi

$$(x - az)^2 + (y - bz)^2 = r^2.$$

3) *Equazione a derivate parziali delle superficie coniche*, cioè quelle superficie il cui piano tangente, in ogni loro punto, passa per un punto fisso di coordinate (a, b, c). L'equazione del piano tangente essendo

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

l'equazione a derivate parziali di tali superficie è

$$p(a - x) + q(b - y) = c - z,$$

il cui sistema ausiliario è

$$\frac{dx}{a - x} = \frac{dy}{b - y} = \frac{dz}{c - z};$$

l'integrale generale è quindi

$$\varphi\left(\frac{a - x}{b - y}, \ \frac{a - x}{c - z}\right) = 0,$$

equazione di qualunque superficie conica.

4) *Equazione a derivate parziali delle superficie di rotazione*. Definiamo queste superficie dalla proprietà che la normale in ogni loro punto (x, y, z)

$$X - x + p(Z - z) = 0, \quad Y - y + q(Z - z) = 0$$

incontri una data retta, l'asse della superficie, che supporremo passante per l'origine delle coordinate

$$aX + bY + cZ = 0\,, \quad a'X + b'Y + c'Z = 0\,;$$

eliminando X, Y, Z tra le quattro equazioni precedenti abbiamo l'equazione a derivate parziali delle superficie di rotazione:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ a' & b' & c' & 0 \\ 1 & 0 & p & x + pz \\ 0 & 1 & q & y + qz \end{vmatrix} = 0\,,$$

ossia

$$p(mz - ny) + q(nx - lz) = ly - mx\,,$$

avendo posto $l = cb' - c'b$, $m = ac' - a'c$, $n = ba' - b'a$.

Delle equazioni ausiliarie

$$\frac{dx}{mz - ny} = \frac{dy}{nx - lz} = \frac{dz}{ly - mx} = \frac{ldx + mdy + ndz}{0} = \frac{xdx + ydy + zdz}{0}$$

(riguardo a quest' ultima notazione si vegga quanto è detto a pag. 589) abbiamo gli integrali

$$lx + my + nz = C_1\,, \quad x^2 + y^2 + z^2 = C_2\,,$$

e quindi l'equazione generale di qualunque superficie di rotazione, il cui asse passi per l'origine, è

$$\varphi(lx + my + nz\,,\ x^2 + y^2 + z^2) = 0\,.$$

5) Si voglia determinare quella superficie per la quale, in ogni suo punto, il punto di mezzo della parte di normale compresa tra la superficie ed il piano $Z = 0$ è situato sulla superficie cilindrica parabolica $Z^2 = X + Y$.

Le equazioni della normale nel punto (x, y, z) della cercata superficie essendo

$$X - x + p(Z - z) = 0\,, \quad Y - y + q(Z - z) = 0\,,$$

le coordinate del detto punto di mezzo sono $x + \frac{pz}{2}$, $y + \frac{qz}{2}$, $\frac{z}{2}$,

e dovremo avere perciò

$$\frac{z^2}{4} = x + \frac{pz}{2} + y + \frac{qz}{2} \quad \text{ossia} \quad 2zp + 2zq = z^2 - 4(x+y),$$

che è l'equazione a derivate parziali della nostra superficie.

Le equazioni ausiliarie essendo

$$\frac{dx}{2z} = \frac{dy}{2z} = \frac{dz}{z^2 - 4(x+y)},$$

avremo subito $x - y = C_1$ dalla equazione $\frac{dx}{2z} = \frac{dy}{2z}$; e l'altra equazione $\frac{dx}{2z} = \frac{dz}{z^2 - 4(x+y)}$ si riduce allora alla $\frac{dx}{2z} = \frac{dz}{z^2 - 8x + 4C_1}$ cioè alla $\frac{dz}{dx} - \frac{z}{2} = (2C_1 - 4x)z^{-1}$, equazione di Bernoulli, il cui integrale, risoluto rapporto alla costante, è $e^{-x}[z^2 - 4(x+y) - 8] = C_2$; cosichè le superficie richieste hanno una equazione della forma

$$\varphi[x - y,\ e^{-x}(z^2 - 4x - 4y - 8)] = 0,$$

dove φ è funzione arbitraria.

6) Data l'equazione

$$x_2x_3x_4zp_1 + x_3x_4x_1zp_2 + x_4x_1x_2zp_3 + x_1x_2x_3zp_4 = x_1x_2x_3x_4,$$

formiamo il sistema ausiliario

$$\frac{dx_1}{x_2x_3x_4z} = \frac{dx_2}{x_3x_4x_1z} = \frac{dx_3}{x_4x_1x_2z} = \frac{dx_4}{x_1x_2x_3z} = \frac{dz}{x_1x_2x_3x_4};$$

il sistema integrale essendo, come subito si vede,

$$x_1^2 - z^2 = C_1, \quad x_2^2 - z^2 = C_2, \quad x_3^2 - z^2 = C_3, \quad x_4^2 - z^2 = C_4,$$

l'integrale generale della proposta equazione è

$$\varphi(x_1^2 - z^2,\ x_2^2 - z^2,\ x_3^2 - z^2,\ x_4^2 - z^2) = 0.$$

Esercizi

1. Equazione a derivate parziali lineare $xp - yq = 0$; integ le generale $\varphi(xy, z) = 0$, dove φ indica la funzione arbitraria.

2. $x^2p - xyq + y^2 = 0,\ \varphi\left(xy,\ z - \frac{y^2}{3x}\right) = 0.$

3. $(z^2 - y)p + 2x(z^2 - y)q + 2zx = 0,\ \varphi\left(x^2 - y,\ z + \frac{y}{z}\right) = 0.$

4. $(x - y + z)p + (2y - z)q = z,\ \varphi\left(\frac{z - y}{z},\ \frac{x + y}{z}\right) = 0.$

5. $[m(x + y) - n(x + z)]p + [n(y + z) - l(y + x)]q$
$= l(z + x) - m(z + y),\ \varphi(lx + my + nz,\ xy + yz + zx) = 0.$

6. $(y - z)\sqrt{X}p + (z - x)\sqrt{Y}q = (x - y)\sqrt{Z}$, dove $X = a + 2bx + cx^2$, $Y = a + 2by + cy^2$, $Z = a + 2bz + cz^2$;

$\varphi[\sqrt{X} + \sqrt{Y} + \sqrt{Z},\ (b + cx + \sqrt{cX})(b + cy + \sqrt{cY})(b + cz + \sqrt{cZ})] = 0.$

7. Determinare la superficie per la quale la distanza dall' origine delle coordinate a un suo punto qualunque M sia uguale alla distanza dall' origine al punto d' incontro coll' asse delle z del piano tangente in M alla superficie stessa.

La equazione a derivate parziali di tutte le superficie soddisfacenti alla data condizione è $xp + yq = z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, e le loro equazioni in termini finiti sono contenute nella $\varphi\left(\frac{y}{x},\ z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) = 0.$

Tra queste superficie quella che passa pel circolo $x = b,\ y^2 + z^2 = a^2$ ha per equazione

$$2\sqrt{a^2 + b^2}\,(z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) - (z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^2 = b^2\,\frac{x^2 + y^2}{x^2}.$$

8. Determinare la superficie per la quale la distanza da un suo punto qualunque M al punto N di incontro del piano tangente in M coll' asse delle x sia uguale alla distanza dall' origine delle coordinate al punto N.

Eq. a der. parziali $2z(xp + yq) = z^2 - x^2 - y^2$; equaz. delle superficie $\varphi\left(\frac{y}{x},\ \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x}\right) = 0$; quella tra queste superficie che passa per la parabola $z = 0,\ y^2 = x$ ha per equazione $(x^2 + y^2 + z^2)y^2 = x(x^2 + y^2)$.

9. Si dimostri che tutte e sole le superficie date dalla equazione $x^2 + y^2 = c^2z^2$, dove c indica un parametro variabile, appartengono

alle superficie di rotazione definite dalla equazione $yp - xq = 0$ e alle superficie coniche definite dalla equazione $xp + yq = z$.

10. Le equazioni delle superficie che segano ortogonalmente l'ellissoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ sono contenute nella equazione

$\varphi\left(\frac{x^{a^2}}{z^{c^2}}, \frac{y^{b^2}}{z^{c^2}}\right) = 0$, dove φ indica una funzione qualunque.

11. L'equazione a derivate parziali delle superficie, che segano ortogonalmente (superficie traiettorie ortogonali) le superficie del sistema $f(x.y, z, a) = 0$ (a parametro variabile), è la $\frac{\partial f}{\partial x}p + \frac{\partial f}{\partial y}q = \frac{\partial f}{\partial z}$ dove si sostituisca per a il valore ricavato da $f(x, y, z, a) = 0$.

1) Siano le sfere $(x - a)^2 + y^2 + z^2 = a^2 + k^2$, aventi i centri sull'asse delle x e passanti pei punti di coordinate $(0, 0, k)$, $(0, 0, -k)$; l'equazione a derivate parziali delle loro traiettorie ortogonali è $(x^2 - y^2 - z^2 + k^2)\, p + 2xyq = 2xz$, e le loro equazioni sono date dalla $\varphi\left(\frac{y}{z}, \frac{x^2 + y^2 + z^2 + k^2}{z}\right) = 0$. A queste traiettorie appartengono le sfere del sistema $x^2 + (y - m)^2 + (z - n)^2 = m^2 + n^2 - k^2$, dove m, n indicano parametri variabili.

2) La equazione a derivate parziali delle traiettorie ortogonali dei paraboloidi di rotazione $x^2 + y^2 = 2az$ è $2xzp + 2yzq + x^2 + y^2 = 0$, e le loro equazioni sono contenute nella

$$\varphi\left(\frac{y}{z}, x^2 + y^2 + 2z\right) = 0.$$

A queste traiettorie appartengono gli ellissoidi di rotazione $x^2 + y^2 + 2z^2 = C$.

12. Equazione a derivate parziali lineare

$$x_1 p_1 + (z + x_3)p_2 + (z + x_2)p_3 = x_2 + x_3;$$

integrale generale $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$ dove $\alpha_1 = \frac{x_2 + x_3 + z}{x_1^2}$; $\alpha_2 = x_1(z - x_2)$, $\alpha_3 = x_1(z - x_3)$. Se per $z = 0$ si vuole che a $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, dovrà essere $\alpha_1^2(\alpha_2 + \alpha_3) = 0$ cioè

$$(x_2 + x_3 + z)^2 (2z - x_2 - x_3) = x_1^3.$$

13. $(x_2+x_3+\ldots+x_n+z)p_1+(x_3+x_4+\ldots+x_n+z+x_1)p_2$
$+\ldots+(z+x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})p_n=x_1+x_2+\ldots+x_n$;
$\varphi(\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_n)=0$, dove $\alpha_1=u(x_1-z)^n$, $\alpha_2=u(x_2-z)^n,\ldots$
$\alpha_n=u(x_n-z)^n$ avendo posto $u=x_1+x_2+\ldots+x_n+z$. Se per $z=0$ deve essere $x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n=1$, dovremo avere
$(\alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_n)^{n+1}=(\alpha_1^{\frac{1}{n}}+\alpha_2^{\frac{1}{n}}+\ldots+\alpha_n^{\frac{1}{n}})^n$, cioè

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n+z)^n\,[(x_1-z)^n+(x_2-z)^n\ldots+(x_n-z)^n]^{n+1}$$
$$=(x_1+x_2+\ldots+x_n-nz)^n.$$

Equazioni a derivate parziali di primo ordine non lineari fra tre o più variabili. Integrale completo, singolare, generale.

233. Consideriamo ora una equazione qualunque di primo ordine a derivate parziali fra tre variabili

$$f(x,y,z,p,q)=0. \tag{1}$$

Sia

$$F(x,y,z,a,b)=0 \tag{2}$$

una relazione in termini finiti fra le tre variabili x,y,z e due costanti a,b, che definisca z come funzione di x,y e delle costanti. Derivando rapporto ad x e ad y otteniamo

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}p=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}q=0; \tag{3}$$

l'eliminazione di a,b fra le equazioni (2), (3) dà per risultato una equazione della forma (1). Supponiamo che essa sia appunto la (1). La (2) dicesi allora l'*integrale completo* della (1).

Alla stessa equazione (1) possiamo arrivare supponendo a,b non più costanti, ma certe funzioni di x,y,z. Derivando infatti la (2)

in questa ipotesi, otteniamo

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial z} p + \dfrac{\partial F}{\partial a}\dfrac{\partial a}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial b}\dfrac{\partial b}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial z} q + \dfrac{\partial F}{\partial a}\dfrac{\partial a}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial b}\dfrac{\partial b}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

dove $\dfrac{\partial a}{\partial x}$, $\dfrac{\partial b}{\partial x}$... indicano le derivate totali di a, b rapporto ad x e ad y. L'eliminazione di a, b fra le equazioni (2), (4) condurrà ancora alla equazione (1) se si suppongono a, b tali funzioni che risulti

$$(5)\qquad \frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y} = 0;$$

alle quali equazioni possiamo soddisfare o supponendo a, b tali che $\dfrac{\partial F}{\partial a} = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial b} = 0$, ed allora, sostituiti nella (2) i valori di a, b che si ricavano da queste ultime equazioni, la (2) si chiama l' *integrale singolare* della (1); oppure supponendo si abbia $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial a}{\partial x} & \dfrac{\partial b}{\partial x} \\ \dfrac{\partial a}{\partial y} & \dfrac{\partial b}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$, ed affinchè ciò sia è necessario e sufficiente che tra le funzioni a, b passi una relazione qualunque, cioè che b sia una funzione arbitraria di a, $b = \varphi(a)$. Allora le due equazioni (5) si riducono alla sola

$$\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial b}\frac{db}{da} = 0 \text{ ossia alla } \frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial \mp}\varphi'(a) = 0,$$

che, quando sia data la forma della φ, serve a determinare la funzione a di x, y, z. La (2) quando le a, b siano determinate in questo modo si chiama l'*integrale generale* della (1).

Riassumendo abbiamo:

La $F(x, y, z, a, b) = 0$, dove a, b sono costanti arbitrarie è l'integrale completo della $f(x, y\ z, p, q) = 0$, se, eliminando a, b tra la $F = 0$ e le equazioni che da essa si ottengono colla derivazione rispetto ad x e ad y, si giunge alla equazione $f = 0$. o alla $\mu = 0$ dove μ non contiene p, q.

La $F(x, y, z, a, b) = 0$, dove a, b siano quelle funzioni di x, y, z che vengono determinate dalle equazioni $\frac{\partial F}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial b} = 0$, è l'integrale singolare o soluzione singolare della $f = 0$.

La $F[x, y, z, a, \varphi(a)] = 0$, dove $\varphi(a)$ è funzione arbitraria di a e la funzione a di x, y, z è determinata dalla equazione

$$\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \varphi'(a) = 0,$$

è l'integrale generale della $f = 0$.

Si vede come gli integrali singolare e generale vengano subito determinati se si conosce l'integrale completo.

Dimostriamo ora che qualunque funzione z di x, y che soddisfa alla (1) appartiene o all'integrale completo o al singolare o al generale.

Per provare ciò supponiamo, per maggior semplicità ed esattezza, che la equazione proposta sia della forma

$$z = \varphi(x, y, p, q), \tag{6}$$

il suo integrale completo della forma

$$z = \psi(x, y, a, b)$$

e la funzione z di x, y che soddisfa alla equazione proposta (6) sia della forma

$$z = \chi(x, y).$$

Ciò non lede alla generalità, perchè la funzione $f(x, y, z, p, q)$ si può supporre ridotta al prodotto di più fattori della forma $z = \varphi(x, y, p, q)$ ed analogamente per la $F(x, y, z, a, b)$ etc.

Ora abbiamo, per ipotesi,

$$\left\{ \begin{aligned} \chi(x, y) &= \varphi\left(x, y, \frac{\partial \chi}{\partial x}, \frac{\partial \chi}{\partial y}\right), \\ \psi(x, y, a, b) &= \varphi\left(x, y, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \end{aligned} \right. \tag{7}$$

l'ultima delle quali è soddisfatta qualunque siano le quantità a, b, anche funzioni di x, y.

Prendiamo ora le a, b in guisa che risulti

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \tag{8}$$

allora dalle (7) avremo

$$\chi(x, y) = \psi(x, y, a, b). \tag{9}$$

Ora se i valori a, b pei quali sono soddisfatte le (8) fossero certe costanti, la funzione

$$z = \chi(x, y) = \psi(x, y, a, b)$$

sarebbe un caso particolare dell'integrale completo. Se invece quei valori di a, b fossero delle funzioni di x, y, osserviamo che allora dalla (9) si ottiene

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y}$$

e quindi, per la (8),

$$\frac{\partial \psi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y} = 0,$$

equazioni che corrispondono, nel nostro caso, alle (5), e perciò a, b sono tali funzioni per le quali la $z = \chi(x, y) = \psi(x, y, a, b)$ è l'integrale singolare o è compreso nell'integrale generale della (6).

Esempi

1) Dalla equazione $z = ax + by + ab$, ricaviamo $p = a$, $q = b$; eliminando tra esse a, b abbiamo l'equazione a derivate parziali

$$z = px + qy + pq,$$

della quale, perciò, $z = ax + by + ab$ è l'integrale completo.

Ricaviamo i valori di a, b dalle

$$\frac{\partial z}{\partial a} = x + b = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial b} = y + a = 0,$$

ed allora $z = -xy$ è l'integrale singolare.

L' integrale generale è

$$z = ax + \varphi(a)y + a\psi(a)$$

dove a è quella funzione di x, y che soddisfa alla equazione

$$x + \varphi(a) + (y + a)\varphi'(a) = 0.$$

La funzione $z = -\frac{(x+y)^2}{4}$ soddisfa alla proposta equazione; essa è contenuta perciò in uno dei tre integrali. Non è, come si vede, l' integrale singolare; per vedere a quale degli altri due appartiene, poniamo, seguendo il procedimento esposto, $a = -\frac{x+y}{2}$, $b = -\frac{x+y}{2}$, la cui $b = a$; essa si ricava perciò dall' integrale generale facendovi $\varphi(a) = a$.

2) Dalla equazione

$$z = ax + by + h\sqrt{1 + a^2 + b^2}, \tag{10}$$

e dalle sue derivate $p = a$, $q = b$, ricaviamo

$$z = px + qy + h\sqrt{1 + p^2 + q^2}. \tag{11}$$

La (11) è l' integrale completo della (10).

L' integrale singolare è la (10) dove a, b sono date dalle

$$x + \frac{ah}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} = 0, \quad y + \frac{bh}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} = 0,$$

cioè è $x^2 + y^2 + z^2 = h^2$.

L' integrale generale è

$$z = ax + \varphi(a)y + h\sqrt{1 + a^2 + \overline{\varphi(a)}^2}$$

se a si ricavi dalla

$$x + \frac{ah}{\sqrt{1 + a^2 + \overline{\varphi(a)}^2}} + \left(y + \frac{\varphi(a)h}{\sqrt{1 + a^2 + \overline{\varphi(a)}^2}}\right)\varphi'(a) = 0.$$

234. In modo completamente analogo si procede per le equazioni a derivate parziali di primo ordine fra quante si vogliano variabili $x_1, x_2, \ldots x_n, z$. E così:

La

$$F(x_1, x_2 \ldots x_n, z, a_1, a_2, \ldots a_n) = 0$$

dicesi integrale completo della

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0$$

se eliminando le costanti $a_1, a_2 \ldots, a_n$ tra la $F = 0$ e le

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial z} p_1 = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial z} p_2 = 0, \ldots \quad \frac{\partial F}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial z} p_n = 0,$$

si ottiene la $f = 0$, fatta astrazione da un eventuale fattore che non contenga le p.

La $F = 0$, ove le $a_1, a_2, \ldots a_n$ siano quelle funzioni di $x_1, x_2 \ldots x_n$, z che si ricavano dalle

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a_2} = 0, \ldots \quad \frac{\partial F}{\partial a_n} = 0,$$

è l'*integrale singolare o soluzione singolare* della $f = 0$.

La

$$F[x_1, x_2, \ldots x_n, z, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, \varphi(a_1, a_2, \ldots a_{n-1})] = 0,$$

dove φ indica una funzione arbitraria e le $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ sono quelle funzioni delle $x_1, x_2, \ldots x_n, z$ che soddisfanno alle equazioni

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a_2} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} = 0, \ldots \quad \frac{\partial F}{\partial a_{n-1}} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{n-1}} = 0$$

è l'*integrale generale* della $f = 0$.

Qualunque funzione z di $x_1, x_2, \ldots x_n$, che soddisfa alla $f = 0$ appartiene o all'integrale completo o al singolare o al generale.

Esempi

1) Dalla

$$(1) \qquad z = a_1 - \frac{a_2^2 + a_3^2}{x_1} + a_2 x_2 + a_3 x_3$$

ricaviamo

$$p_1 = \frac{a_2^2 + a_3^2}{x_1^2}, \quad p_2 = a_2, \quad p_3 = a_3,$$

alle quali, essendo già eliminata a_1, eliminando solo a_2, a_3 otteniamo

$$p_1 = \frac{p^2_2 + p^2_3}{x^2_1} \quad \text{ossia} \quad p_1 x^2_1 = p^2_2 + p^2_3 .$$

La (1) è l'integrale completo di questa equazione.

Non esiste in questo caso l'integrale singolare, perchè tra le equazioni che dovrebbero determinare a_1, a_2, a_3 figurerebbe la equazione assurda $\frac{\partial z}{\partial a_1} = 1 = 0$.

L'integrale generale è

$$z = \varphi(a_2, a_3) - \frac{a^2_2 + a^2_3}{x_1} + a_2 x_2 + a_3 x_3 ,$$

dove φ è funzione arbitraria e a_2, a_3 funzioni di x_1, x_2, x_3 che si ricavano dalle

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_3} + x_2 - \frac{2a_2}{x_1} = 0 , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a_3} + x_3 - \frac{2a_3}{x_1} = 0 .$$

2) Sia la equazione

2) $$\log z + a_{n+1} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n ,$$

dove tra le $n+1$ costanti a passa la relazione

3) $$(a_1 - 1)(a_2 - 1) \ldots (a_n - 1) = a_1 a_2 \ldots a_n ,$$

che riduce il loro numero ad n arbitrarie.

Derivando otteniamo

$$p_1 = z a_1 , p_2 = z a_2 , \ldots p_n = z a_n$$

ossia

$$p_1 - z = z(a_1 - 1) , p_2 - z = z(a_2 - 1) , \ldots p_n - z = z(a_n - 1) ,$$

dalle quali $p_1 p_2 \ldots p_n = z^n a_1 a_2 \ldots a_n$,

$$(p_1 - z)(p_2 - z) \ldots (p_n - z) = z^n (a_1 - 1)(a_2 - 1) \ldots (a_n - 1) = z^n a_1 a_2 \ldots a_n ,$$

e giungiamo così alla equazione a derivate parziali

$$(p_1 - z)(p_2 - z) \ldots (p_n - z) = p_1 p_2 \ldots p_n ,$$

della quale la (2), colla condizione (3), è l'integrale completo.

Non esiste integrale singolare perchè si dovrebbe avere la equazione assurda $1 = 0$.

L' integrale generale è

$$\log z + \varphi(a_1, a_2, \ldots a_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 \ldots + a_n x_n,$$

dove a_n è espressa colle $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ mediante la (3), la φ è funzione arbitraria e le funzioni $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}$ sono determinate dalle equazioni

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial a_1} = x_1 + x_n \frac{\partial a_n}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial a_2} = x_2 + x_n \frac{\partial a_n}{\partial a_2}, \ldots$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_{n-1}} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial a_{n-1}} = x_{n-1} + x_n \frac{\partial a_n}{\partial a_{n-1}}.$$

Integrazione delle equazioni a derivate parziali di primo ordine fra tre variabili. Metodo di Lagrange - Charpit. Integrazione di alcune equazioni a derivate parziali di primo ordine fra quante si vogliono variabili.

235. Ci proponiamo di trovare l' integrale completo della equazione

$$f(x, y, z, p, q) = 0.$$

Se fossero noti i valori di p e q, la integrazione di $dz = pdx + qdy$ ci darebbe la funzione incognita z. Ora questi valori sarebbero conosciuti se arrivassimo a trovare fra le nostre quantità x, y, z, p, q una altra relazione

$$\varphi(x, y, z, p, q) = 0$$

che fosse da esse soddisfatta; perchè allora le equazioni $f = 0$, $\varphi = 0$ ci darebbero i valori di p, q espressi per x, y, z, e questi sarebbero tali che la equazione a differenziali totali

$$dz - pdx - qdy = 0$$

risulterebbe integrabile e la sua integrazione darebbe l' integrale richiesto. Tutto adunque si riduce a trovare la funzione φ.

A tale scopo osserviamo che dalle equazioni $f=0$, $\varphi=0$ si otterrebbe

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}p+\frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}q+\frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}=0,$$

dalle quali, eliminando $\frac{\partial p}{\partial x}$ tra le due prime e poi $\frac{\partial q}{\partial y}$ tra le due ultime, ricaviamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big)+p\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)+\frac{\partial q}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \varphi}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial q}-\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\Big)+q\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial q}-\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)+\frac{\partial p}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)=0;$$

sommando queste equazioni, coll' osservare che $\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial p}{\partial y}$, ed ordinando rispetto alle derivate parziali di φ, abbiamo

$$(1)\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial p}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial q}-\left(p\frac{\partial f}{\partial p}+q\frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$
$$-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0,$$

equazione a derivate parziali lineare di primo ordine cui deve soddisfare la funzione φ delle quantità x, y, z, p, q. Per trovare φ dobbiamo quindi determinare un integrale di questa equazione lineare.

Il sistema ausiliario corrispondente di equazioni differenziali è

$$(2)\quad \frac{dx}{-\frac{\partial f}{\partial p}}=\frac{dx}{-\frac{\partial f}{\partial q}}=\frac{dz}{-\left(p\frac{\partial f}{\partial p}+q\frac{\partial f}{\partial q}\right)}=\frac{dp}{\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p}=\frac{dq}{\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q}=\frac{d\varphi}{0};$$

perciò intanto un integrale di questo sistema è $\varphi = C$, e se $\varphi_1 = C_1$, $\alpha_2 = C_2$, $\alpha_3 = C_3$, $\alpha_4 = C_4$ indicano gli altri integrali, l'integrale generale della (1) sarà $\psi[\varphi, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] = 0$.

Ma a noi basta conoscere un integrale particolare, e quanto più semplice sarà praticamente migliore, della (1), cosichè basterà conoscere, oltre $\varphi = C$, un altro integrale del sistema; basterà quindi integrare la più semplice delle equazioni contenute in (2); se $\alpha(x, y, z, p, q) = C'$ è questo integrale, basterà prendere $\psi(\varphi, \alpha) = 0$ o più semplicemente $\varphi = \alpha - a$ dove a è una costante, cosichè $\alpha(x, y, z, p, q) = a$ è la relazione richiesta, che unitamente alla equazione data $f = 0$ serve a determinare i valori di p, q. Riassumendo abbiamo la regola seguente:

Per trovare l'integrale completo della equazione

$$f(x, y, z, p, q) = 0,$$

si formi il sistema di equazioni differenziali (2), e se ne trovi un integrale

$$\varphi(x, y, z, p, q) = a,$$

dove a è una costante arbitraria, tenendo presente di scegliere questo integrale in guisa che la funzione φ contenga almeno una delle quantità p, q; allora ricavati i valori di p, q dalle $f = 0$, $\varphi = 0$ e sostituiti nella $dz - pdx - qdy = 0$, si calcoli l'integrale di questa equazione a differenziali totali necessariamente integrabile; quest'ultimo integrale, che contiene due costanti arbitrarie, a e la costante d'integrazione, è l'integrale completo della equazione a derivate parziali proposta.

Notiamo che potrà qualche volta essere più comodo determinare due integrali delle (2), dai quali ricavare i valori di p, q che si sostituiranno nella equazione proposta, ottenendo così l'integrale completo, qualora il risultato di tale sostituzione non sia che una relazione tra le due costanti contenute nelle espressioni di p, q; nel qual caso tale relazione determina una delle costanti, e dopo l'integrazione di $dz - pdx - qdy = 0$ l'integrale completo della data equazione.

Esempi

1) Sia l'equazione $pq - hxyz = 0$. Le equazioni ausiliarie sono

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{h(yz + xyp)} = \frac{dq}{h(xz + xyq)},$$

alle quali

$$\frac{ydx - xdy}{qy - px} = \frac{qdp - pdq}{h\zeta(qy - px)} \text{ ossia } ydx - xdy = \frac{qdp - pdq}{h\zeta},$$

rvero, osservando che in virtù dell' equazione proposta è $\zeta = \frac{pq}{xy}$,

$$\frac{ydx - xdy}{xy} = \frac{qdp - pdq}{pq},$$

ne, integrata, dà C $\frac{x}{y} = \frac{p}{q}$, la quale, unitamente alla proposta quazione, dà per p e q i valori $q = ay\sqrt{\zeta}$, $p = \frac{h}{a} x\sqrt{\zeta}$, avendo osto $a = \sqrt{\frac{h}{C}}$. In conseguenza l' equazione

$$d\zeta = pdx + qdy = \frac{h}{a} x\sqrt{\zeta}dx + ay\sqrt{\zeta}dy,$$

ssia

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} = \frac{h}{a} xdx + aydy$$

i dà l' integrale completo della proposta equazione,

$$4\sqrt{\zeta} = \frac{h}{a} x^2 + ay^2 + b. \tag{1}$$

Qui parrebbe che non esistesse l' integrale singolare perchè osto $f(x, y, \zeta, a, b) = 4\sqrt{\zeta} - \frac{h}{a} x^2 - ay^2 - b$, si avrebbe la equaione assurda $\frac{\partial f}{\partial b} = 1 = 0$. Ma si osservi che la $f(x, y, \zeta, a, b)$ non funzione univalente dei suoi argomenti contenendo il radicale $\sqrt{\zeta}$, ıentre che nella teoria esposta si è sottintesa la condizione della nivalenza per le funzioni ivi considerate. Per scoprire dunque se eramente vi sia l' integrale singolare oppure no, eleviamo al quarato la (1) ottenendo così

$$16\zeta = \left(\frac{h}{a} x^2 + ay^2 + b\right)^2;$$

derivando allora rapporto a b otteniamo $2\left(\frac{h}{a}x^2+ay^2+b\right)=0$, cosichè, senza che qui occorra calcolare inoltre la derivata rapporto ad a, riconosciamo che vi è l'integrale singolare $z=0$.

L'integrale generale è dato dalle equazioni

$$4\sqrt{z}=\frac{h}{a}x^2+ay^2+\varphi(a)\ ,\ -\frac{hx^2}{a^2}+y^2+\varphi'(a)=0\,,$$

dove φ è funzione arbitraria.

2) Il sistema ausiliario per la equazione

$$pq+p+q+x+y+y=0$$

è
$$\frac{dx}{q+1}=\frac{dy}{p+1}=\frac{dz}{2pq+p+q}=\frac{-dp}{1+p}=\frac{-dq}{1+q}\,,$$

da cui $dx=-dq$, $dy=-dp$ e quindi $q=a-x$, $p=b-y$. sostituendo questi valori nella proposta equazione abbiamo l'integrale completo

$$z=ay+bx-xy-a-b-ab\,;$$

si determina subito l'integrale singolare $z=1-x-y$.

3) Tra le equazioni del sistema ausiliario relativo alla equazione

$$yp-xq-hpq=0$$

vi sono le due equazioni

$$\frac{dx}{y-hq}=\frac{dp}{q}\ ,\ \frac{dy}{-x\quad hp}=-\frac{dq}{p}\,;$$

che, in virtù della proposta equazione, diventano

$$\frac{dx}{xq}=\frac{dp}{pq}\ ,\ \frac{dy}{yp}=\frac{dq}{pq}\,,$$

dalle quali si ricava $p=ax$, $q=b'y$, essendo a, b' costanti. Sostituendo questi valori nella equazione data troviamo che tra le costanti a, b' deve passare la relazione $a-b'-hab'=0$ da cui ricaviamo

$q = \frac{a}{1+ah}$; in conseguenza è

$$dz = pdx + qdy = axdx + \frac{a}{1+ah} ydy,$$

la cui l' integrale completo della nostra equazione

$$z = \frac{ax^2}{2} + \frac{a}{2(1+ah)} y^2 + b.$$

Manca l' integrale singolare; e si trova senz' altro l' integrale generale.

4) Si vogliano determinare le superficie per le quali il piano tangente in ogni loro punto (x, y, z) tagli, sopra gli assi delle x, y, z, delle lunghezze OA, OB, OC tali che sia

$$x \,.\, \mathrm{OA} + y \,.\, \mathrm{OB} + z \,.\, \mathrm{OC} = h.$$

L' equazione del piano tangente in un punto (x, y, z) essendo

$$\mathrm{Z} - z = p(\mathrm{X} - x) + q(\mathrm{Y} - y)$$

abbiamo

$$\mathrm{OA} = \frac{px + qy - z}{p}, \quad \mathrm{OB} = \frac{px + qy - z}{q}, \quad \mathrm{OC} = z - px - qy,$$

e perciò l' equazione a derivate parziali delle richieste superficie è

$$(px + qy - z)\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - z\right) = h$$

ossia

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - z - \frac{h}{px + qy - z} = 0,$$

il cui sistema ausiliario, posto per brevità $u = px + qy - z$, è

$$\frac{dx}{x\left(-\frac{1}{p^2} + \frac{h}{u^2}\right)} = \frac{dy}{y\left(-\frac{1}{q^2} + \frac{h}{u^2}\right)} = \frac{dz}{z\left(-1 + \frac{h}{u^2}\right)} = \frac{dp}{p\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)} = \frac{dq}{q\left(1 - \frac{1}{q^2}\right)},$$

dalle quali si ricava

$$\frac{\frac{dx}{x}-\frac{d\zeta}{\zeta}}{1-\frac{1}{p^2}}=\frac{\frac{dy}{y}-\frac{d\zeta}{\zeta}}{1-\frac{1}{q^2}}=\frac{\frac{dp}{p}}{1-\frac{1}{p^2}}=\frac{\frac{dq}{q}}{1-\frac{1}{q^2}},$$

che danno gli integrali $p=a\frac{x}{\zeta}$, $q=b\frac{y}{\zeta}$. Sostituendo questi valori nella equazione a derivate parziali delle nostre superficie abbiamo

$$\zeta\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-1\right)-\frac{h\zeta}{ax^2+by^2-\zeta^2}=0 \text{ ossia } (ax^2+by^2-\zeta^2)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-1\right)=h$$

che è l'integrale completo e che rappresenta una famiglia di superficie di secondo ordine col centro nell'origine delle coordinate. In particolare per $a=b=-1$, e h positivo, abbiamo la sfera $x^2+y^2+\zeta^2=\frac{h}{3}$.

Le equazioni che servono per trovare l'integrale particolare sono

$$(3)\qquad \begin{cases} x^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-1\right)-(ax^2+by^2-\zeta^2)\frac{1}{a^2}=0, \\ y^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-1\right)-(ax^2+by^2-\zeta^2)\frac{1}{b^2}=0, \end{cases}$$

dalle quali $a^2x^2=b^2y^2$, $ax=\pm by$; chiamando λ il valore comune dei due membri dell'ultima eguaglianza, abbiamo i valori $a=\frac{\lambda}{x}$, $b=\pm\frac{\lambda}{y}$ che sostituiti in una delle (3) danno $-1+\frac{\zeta^2}{\lambda^2}=0$ da cui $\lambda=\pm\zeta$, cosichè $a=\pm\frac{\zeta}{x}$, $b=\pm\frac{\zeta}{y}$, i segni essendo tra loro indipendenti. Sostituendo questi valori di a, b nell'integrale completo, otteniamo l'integrale singolare

$$(\pm x\pm y-\zeta)^2=h,$$

che rappresenta otto piani (reali o immaginari secondochè $h>0$ ...

pure $h<0$) formanti un ottaedro regolare col centro nell'origine delle coordinate.

236. Consideriamo ora alcuni tipi di equazioni a derivate parziali di primo ordine, la cui integrazione, oltre che col metodo del num. precedente, può ottenersi con procedimenti speciali e semplici, estendibili alle equazioni di forma analoga tra quante si vogliano variabili.

1) *Equazioni della forma* $\varphi(p, q)=0$. Si riconosce subito che $z=ax+by+c$ dove a, b, c sono costanti è l'integrale completo, purchè tra le a, b passi la relazione $\varphi(a, b)=0$.

Osserviamo che anche le equazioni, fra $n+1$ variabili, $\varphi(p_1 . p_2, .. p_n)=0$ ammettono l'integrale completo

$$z=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n+c,$$

se tra le a poniamo la relazione $\varphi(a_1, a_2, \ldots a_n)=0$.

Esempio. — La equazione $zp_1p_2p_3=x_1x_2x_3$, ovvero la $\frac{z^{\frac{1}{3}}}{x_1}\frac{dz}{dx_1}\frac{z^{\frac{1}{3}}dz}{x_2dx_2}\frac{z^{\frac{1}{3}}dz}{x_3dx_3}=1$, si riduce alla forma ora considerata ponendo $x_1dx_1=d\xi_1$, $x_2dx_2=d\xi_2$. $x_3dx_3=d\xi_3$, $z^{\frac{1}{3}}dz=dZ$, giacchè diventa allora $\frac{dZ}{d\xi_1}\frac{dZ}{d\xi_2}\frac{dZ}{d\xi_3}=1$, il cui integrale è

$$Z=a_1\xi_1+a_2\xi_2+a_3\xi_3+b$$

dove $a_1a_2a_3=1$. Dalle posizioni fatte ricaviamo

$$Z=\frac{3}{4}z^{\frac{4}{3}}, \xi_1=\frac{x^2_1}{2}, \xi_2=\frac{x^2_2}{2}, \xi_3=\frac{x^2_3}{2},$$

cosichè

$$\frac{3}{2}z^{\frac{4}{3}}=a_1x^2_1+a_2x^2_2+a_3x^2_3+c,$$

dove $a_1a_2a_3=1$, è l'integrale completo della equazione proposta.

2) *Equazioni della forma* $\varphi(z, p, q)=0$. Per integrarle si ponga $z=f(\xi)$, $\xi=x+ay$, cosichè $p=\frac{dz}{d\xi}$, $q=a\frac{dz}{d\xi}$, e si determini

ζ dalla equazione $\varphi\left(\zeta, \frac{d\zeta}{d\xi}, a\frac{d\zeta}{d\xi}\right) = 0$, che è una equazione differenziale ordinaria.

Se si ricava $\frac{d\zeta}{d\xi} = \psi(\zeta, a)$, avremo $\xi = \int \frac{d\zeta}{\psi(\zeta, a)} + b$, e quindi l' integrale completo $x + ay = \int \frac{d\zeta}{\psi(\zeta, a)} + b$ della proposta equazione.

Questo metodo si applica ancora, come si riconoscerà facilmente, alle equazioni con $n+1$ variabili della forma analoga $\varphi(\zeta, p_1, p_2 \ldots p_n) = 0$, ottenendone l' integrale generale

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1} + x_n = \int \frac{d\zeta}{\psi(\zeta, a_1, a_2 \ldots a_{n-1})} + b,$$

avendo ricavato $\frac{d\zeta}{d\xi} = \psi(\zeta, a_1, a_2 \ldots a_{n-1})$ dalla equazione

$$\varphi\left(\zeta, a_1\frac{d\zeta}{d\xi}, a_2\frac{d\zeta}{d\xi}, \ldots a_{n-1}\frac{d\zeta}{d\xi}, \frac{d\zeta}{d\xi}\right) = 0.$$

Esempi. — $\zeta^4 = p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3$; posto $\xi = a_1x_1 + a_2x_2 + x_3$ abbiamo $\zeta^4 = \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2 (a_1a_2 + a_1 + a_2)$, da cui $\frac{d\zeta}{d\xi} = \frac{\zeta^2}{\sqrt{a_1a_2 + a_1 + a_2}}$ che integrata dà $\zeta = -\frac{\sqrt{a_1a_2 + a_1 + a_2}}{\xi + a_3}$ e quindi l' integrale completo della proposta equazione è

$$\zeta = -\frac{\sqrt{a_1a_2 + a_1 + a_2}}{a_1x_1 + a_2x_2 + x_3 + a_3}.$$

Sia ancora l' equazione $\zeta = pq$; applicando il metodo attuale si trova subito l' integrale completo $\zeta = \frac{1}{4}\left(ax + \frac{y}{a} + b\right)^2$.

Col metodo generale, osservando che le equazioni ausiliarie sono

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{d\zeta}{2\zeta} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$$

e quindi $q = x + a$, $p = y + b$, si trova l' integrale completo della forma $\zeta = (x + a)(y + b)$.

Si osservi che l'integrale generale è allora $z=(x+a)[y+\varphi(a)]$, essendo $y+\varphi(a)+(x+a)\varphi'(a)=0$. Prendendo $\varphi(a)=a_1a+b_1$ si ottiene $z=-\frac{1}{4a_1}(y+b_1-a_1x)^2$, che è della forma del primo integrale completo trovato.

3) *Equazioni della forma* $\varphi(x,p)=\psi(y,q)$. Poniamo $\varphi(x,p)=a$, $\psi(y,q)=a$ e ricaviamo da queste $p=f(x,a)$, $q=F(y,a)$; avremo allora dalla prima di esse $z=\int f(x,a)\,dx+$ una funzione arbitraria di y, e dalla seconda $z=\int F(y,a)\,dy+$ una funzione arbitraria di x, cosichè la funzione

$$z=\int f(x,a)\,dx+\int F(y,a)\,dy+b$$

soddisfarà a tutte e due quelle equazioni e quindi alla proposta equazione a derivate parziali e ne sarà l'integrale completo colle due costanti a, b.

Lo stesso metodo è applicabile alle equazioni con $n+1$ variabili della forma

$$f_1(x_1,p_1)+f_2(x_2,p_2)+\ldots+f_n(x_n,p_n)=0.$$

Infatti poniamo

$$f_1(x_1,p_1)=a_1,\ f_2(x_2,p_2)=a_2,\ldots f_n(x_n,p_n)=a_n,$$

colla condizione $a_1+a_2+\ldots+a_n=0$ e da queste equazioni suppongasi ricavare

$$p_1=\varphi_1(x_1,a_1),\ p_2=\varphi_2(x_2,a_2)\ldots p_n=\varphi_n(x_n,a_n);$$

otteniamo allora l'integrale completo della equazione proposta

$$z=\int\varphi_1(x_1,a_1)\,dx_1+\int\varphi_2(x_2,a_2)\,dx_2+\ldots+\int\varphi_n(x_n,a_n)\,dx_n+b.$$

Esempio. — $p_1^{m_1}x_1^{n_1}+p_2^{m_2}x_2^{n_2}+p_3^{m_3}x_3^{n_3}=0.$

Abbiamo subito l'integrale completo

$$z=\frac{m_1a_1^{\frac{1}{m_1}}}{m_1-n_1}x_1^{\frac{m_1-n_1}{m_1}}+\frac{m_2a_2^{\frac{1}{m_2}}}{m_2-n_2}x_2^{\frac{m_2-n_2}{m_2}}+\frac{m_3a_3^{\frac{1}{m_3}}}{m_3-n_3}x_3^{\frac{m_3-n_3}{m_3}}+b,$$

essendo $a_1 + a_2 + a_3 = 0$. Se $m_1 = n_1$ in luogo del primo termine del secondo membro vi sarebbe il termine $a_1^{\frac{1}{n_1}} \log x_1$ etc.

4) *Equazione di* Clairaut. — È la equazione della forma

$$z = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n + \varphi(p_1, p_2, \ldots p_n),$$

il cui integrale completo è, come subito si verifica,

$$z = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + \varphi(a_1, a_2, \ldots a_n);$$

l'integrale singolare si ottiene eliminando le a tra questa equazione e le

$$x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} = 0, \; x_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} = 0, \ldots x_n + \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} = 0.$$

Esempio. — Determinare la superficie per la quale la somma delle intercette sugli assi dal piano tangente in ogni loro punto è una costante h.

L'equazione a derivate parziali della superficie cercata è

$$(px + qy - z)\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\right) = h \text{ ossia } z = px + qy - \frac{hpq}{p + q - pq};$$

l'integrale completo è il sistema di piani

$$z = ax + by - \frac{hab}{a + b - ab}.$$

Per trovare la soluzione singolare elimineremo a, b tra questa equazione e le

$$x - \frac{hb^2}{(a + b - ab)^2} = 0, \quad y - \frac{ha^2}{(a + b - ab)^2} = 0,$$

dalle quali ricaviamo $b^2 y = a^2 x$, e quindi $a = \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{h}}{\sqrt{x}}$.

$$b = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{h}}{\sqrt{y}}, \; a + b - ab = \frac{\sqrt{h}(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{h})}{\sqrt{xy}}$$

ed in conseguenza l'integrale singolare è

$$z = (\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{h})^2 \text{ od anche } \sqrt{z} + \sqrt{h} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

ovvero, rendendo l'equazione razionale,

$$[(z+h-x-y)^2-4(xy+zh)]^2=64hxyz,$$

che rappresenta la superficie inviluppo dei piani che costituiscono l'integrale completo.

5) *Equazioni della forma*

$$f_1(p,q,z-px-qy)+yf_2(p,q,z-px-qy)+f_3(p,q,z-px-qy)=0.$$

La integrazione di queste equazioni dipende da quella di una equazione lineare mediante una trasformazione detta *trasformazione di* Legendre. Poniamo

$$u=z-px-qy \tag{4}$$

da cui $du=-xdp-ydq$ e prendiamo p,q come nuove variabili indipendenti, cosichè allora

$$\frac{\partial u}{dp}=-x, \qquad \frac{\partial u}{\partial q}=-y \tag{5}$$

e la equazione proposta si trasforma nella equazione lineare in u

$$f_1(p,q,u)\frac{\partial u}{\partial p}+f_2(p,q,u)\frac{\partial u}{\partial q}=f_3(p,q,u),$$

il cui integrale generale, della forma

$$\varphi[\alpha(p,q,u),\ \beta(p,q,u)]=0,$$

sarà l'integrale generale dalla equazione proposta, considerandolo unitamente alle equazioni (4), (5). Quando venga assegnata la funzione φ, e si eliminino u,p,q tra quelle equazioni avremo un integrale particolare ed anche, se nella forma assegnata di φ vi saranno contenute costanti arbitrarie, un integrale completo della proposta equazione.

Notiamo che una equazione qualunque a derivate parziali di primo ordine

$$f(x,y,z,p,q)=0$$

si trasforma, mediante la trasformazione di Legendre, nella

$$f\left(-\frac{\partial u}{\partial p},\ -\frac{\partial u}{\partial q},\ u-p\frac{\partial u}{\partial p}-q\frac{\partial u}{\partial q},p,q\right)=0.$$

che potrà riescire qualche volta più facilmente integrabile della proposta.

La trasformazione di LEGENDRE si estende alle equazioni fra $n+1$ variabili, e torna specialmente utile per quelle della forma

$$x_1 f_1(p_1, p_2, \ldots p_n, z - p_1 x_1 - p_2 x_2 - \ldots - p_n x_n) + x_2 f_2(\ldots) + \ldots + x_n f_n(\ldots) + f_{n+1}(\ldots) = 0.$$

Si pone

$$u = z - p_1 x_1 - p_2 x_2 - \ldots - p_n x_n$$

da cui $$du = -x_1 dp_1 - x_2 dp_2 - \ldots - x_n dp_n,$$

e si prendono le p per variabili indipendenti, così che

$$\frac{\partial u}{\partial p_1} = -x_1, \quad \frac{\partial u}{\partial p_2} = -x_2, \ldots \frac{\partial u}{\partial p_n} = -x_n:$$

la equazione trasformata è allora lineare etc.

ESEMPIO. — Sia la equazione

$$\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right)(z - px - qy) + 1 = 0$$

ovvero $$(qx + py)(z - px - qy) + pq = 0;$$

l'equazione trasformata è

$$\left(-q\frac{\partial u}{\partial p} - p\frac{\partial u}{\partial q}\right) u + pq = 0,$$

il cui integrale generale è

$$u^2 - p^2 = \varphi(p^2 - q^2).$$

Per avere l'integrale completo della equazione proposta particolarizzeremo la funzione φ prendendo una funzione, che sceglieremo apposta semplice, con due costanti arbitrarie; prenderemo $\varphi(p^2 - q^2) = a(p^2 - q^2) + b$. Avremo allora

$$u^2 - p^2 = a(p^2 - q^2) + b \quad \text{da cui} \quad u = \sqrt{(1+a)p^2 - aq^2 + b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial p} = -x = \frac{(a+1)p}{u}, \quad \frac{\partial u}{\partial q} = -y = \frac{-aq}{u},$$

e quindi

$$p=\frac{-xu}{a+1},\ q=\frac{yu}{a},\ u^2=\frac{x^2u^2}{a+1}-\frac{u^2y^2}{a}+b,\ u=\frac{b}{\sqrt{a(a+1)-ax^2+(a+1)y^2}},$$

avendo scritto, in questa ultima formola, b in luogo di $b\sqrt{a(a+1)}$; cosichè, posto $A=\sqrt{a(a+1)-ax^2+(a+1)y^2}$, è

$$p=\frac{-xb}{(a+1)A},\ q=\frac{yb}{aA},\ z-px-qy=z+\frac{x^2b}{(a+1)A}-\frac{y^2b}{aA},$$

e l'eguaglianza $u=z-px-qy$ diviene $z=\frac{b}{A}\left(1-\frac{x^2}{a+1}+\frac{y^2}{a}\right)$ che è il richiesto integrale completo, che si riduce a

$$z=b\sqrt{a(a+1)-ax^2+(a+1)y^2}$$

scrivendo b in luogo di $\frac{b}{a\ a+1)}$. Ponendo $ab^2=-a_1$, $(a+1)b^2=b_1$ e poi scrivendo a, b in luogo di a_1, b_1, lo stesso integrale assume l'aspetto

$$z=\sqrt{ax^2+by^2-\frac{ab}{a+b}}.$$

Con procedimento analogo si trova che l'integrale completo della equazione

$$\left(\frac{x_1}{p_1}+\frac{x_2}{p_2}+\ldots+\frac{x_n}{p_n}\right)(z-p_1x_1-p_2x_2-\ldots-p_nx_n)+1=0$$

è $$z=\sqrt{a_1x^2_1+a_2x_2^2+\ldots+a_nx^2_n-A}$$

dove

$$A=\frac{a_1a_2\ldots a_n}{a_2a_3\ldots a_n+a_1a_3a_4\ldots a_n+a_1a_2a_4\ldots a_n+\ldots+a_1a_2a_3\ldots a_{n-1}}.$$

Esercizi

1. $z^2pq-xy=0$, integrale completo $az^2+a^2x^2+y^2=b$, non vi è integrale singolare, l'integrale generale è dato dalle due equa-

zioni $a\zeta^2 + a^2x^2 + y^2 - \varphi(a) = 0$, $\zeta^2 + 2ax^2 - \varphi'(a) = 0$; si trovi a qual forma di φ corrisponde l'integrale, particolare del generale, $\zeta = 4^{\frac{1}{4}}(x^2-1)^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{2}}$.

2. $xp^2 + yq^2 = \zeta$, int. completo $\log \zeta = \dfrac{2\sqrt{ax} + 2\sqrt{y}}{\sqrt{1+a}} + b$.

3. $pq = 1$, $\zeta = ax + \dfrac{y}{a} + b$.

4. $xy = pq$, $\zeta = ax^2 + \dfrac{1}{4a} y^2 + b$.

5. $q = \varphi(p, y)$, $\zeta = ax + \int \varphi(a, y)\, dy + b$.

6. $p + q^2 x\zeta = 0$, $\zeta = \dfrac{y+b}{\sqrt{x^2+a}}$.

7. $\sqrt{p} + \sqrt{q} = 2x$, $\zeta = \dfrac{(2x - \sqrt{a})^2}{6} + ay + b$.

8. $q = e^{\frac{p}{h}}$, $\zeta = ax + e^{\frac{a}{h}} y + b$.

9. $q^2y^2 = \zeta(\zeta - px)$, $\log \zeta = a \log x + b \log y + c$ ovvero $\zeta = cx^a y^b$ essendo $a + b^2 = 1$.

10. $\zeta = x_1^2 p_1^2 + x_2^2 p_2^2 + \ldots + x_n^2 p_n^2$, $2\sqrt{\zeta} = a_1 \log x_1 + a_2 \log x_2 + \ldots + a_n \log x_n + b$ dove $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 1$.

11. $\zeta^2(p^2 - q^2) = y^2 - x^2$,

$$\zeta^2 + b = x\sqrt{a - x^2} + y\sqrt{a - y^2} + a \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{\sqrt{a}} + a \operatorname{arc\,sen} \frac{y}{\sqrt{a}}.$$

12. La integrazione delle equazioni della forma

$$xf(y, p, \zeta - px) = q\varphi(y, p, \zeta - px) + \psi(y, p, \zeta - px)$$

dipende da quella di una equazione lineare ponendo $u = \zeta - xc$ prendendo y, p come nuove variabili indipendenti.

Un procedimento analogo vale per la equazione

$$x_1 f_1 = p_2 f_2 + p_3 f_3 + \ldots + p_n f_n + f$$

dove $f_1, f_2, \ldots f_n, f$ indicano funzioni di $x_2, \ldots x_n, p_1, \zeta - p_1 x_1$. Parimenti l'integrazione della equazione

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 = p_3 f_3 + \ldots + p_n f_n + f,$$

dove le $f_1, f_2, \ldots f_n, f$ indicano funzioni di $x_3 \ldots x_n, p_1, p_2, \zeta - p_1 x_1 - p_2 x_2$, dipende da quella di una equazione lineare ponendo $u = \zeta - p_1 x_1 - p_2 x_2$ e prendendo $p_1, p_2, x_3, x_4 \ldots x_n$ come nuove variabili indipendenti.

Analogamente per la equazione

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 = p_4 f_4 + \ldots + p_n f_n + f,$$

dove le $f_1, f_2 \ldots f_n, f$ indicano funzioni di $x_4, x_5, \ldots x_n, p_1, p_2, p_3, \zeta - p_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3$; e così di seguito.

13. $q = p^m f(x)$, $ax + a^m y = \int \overline{f(\zeta)}^{\frac{1}{m-1}} dx + b$.

14. $q = p^m \mathrm{XYZ}$, dove X, Y, Z indicano funzioni rispettivamente della sola x, della sola y, della sola ζ;

$$a \int \frac{dx}{\sqrt[m]{\mathrm{X}}} + a^m \int \mathrm{Y}\, dy = \int \sqrt[m-1]{\mathrm{Z}}\, d\zeta + b.$$

15. $q = (\zeta + px)^2$, $\zeta = \dfrac{a}{x} - \dfrac{1}{y+b}$.

16. $(\zeta - px)^2 + xp^2 - q(y-h)^2 = 0$, $\dfrac{(1+\sqrt{ax})^2}{\zeta} = \dfrac{1+a}{y-h} + b$.

17. $p_1^m + p_2^m + \ldots + p_n^m = \varphi(\zeta)$,

$$a_n + \int \frac{d\zeta}{\sqrt[m]{\varphi(\zeta)}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2 + 1}} (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1} + x_n).$$

18. $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_n^{m_n} = x_1^{h_1} x_2^{h_2} \ldots x_n^{h_n}$,

$$\zeta = a_1 x_1^{\frac{h_1+m_1}{m_1}} + a_2 x_2^{\frac{h_2+m_2}{m_2}} + \ldots + a_n x_n^{\frac{h_n+m_n}{m_n}} + b,$$

dove $a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_n^{m_n} = \dfrac{m_1^{m_1} m_2^{m_2} \ldots m_n^{m_n}}{(h_1+m_1)^{m_1} (h_2+m_2)^{m_2} \ldots (h_n+m_n)^{m_n}}$.

19. Determinare la superficie per la quale l'area di una sua porzione stia all'area della proiezione della medesima sul piano delle x, y come m sta alla unità.

Equaz. a derivate parziali della superficie $p^2+q^2+1=m^2$, int. completo i piani $z=ax+\frac{z}{\sqrt{m^2-a^2-1}}+b$, non vi è integrale singolare.

20. Superficie per le quali la parte di normale compresa tra il punto sulla superficie e il punto d'incontro col piano x, y sia una data costante h.

Equaz. a der. parz. $z^2(1+p^2+q^2)=h^2$; integrale completo $(x+ay+b)^2=(1+a^2)(h^2-z^2)$, che rappresenta dei cilindri di rotazione i cui assi hanno per equazioni $z=0$, $x+ay+b=0$. L'integrale singolare è dato dai due piani $z=\pm h$. Se nell'integrale generale si pone $b=\varphi(a)=a_1a+b_1$ si ottengono le sfere $(x+b_1)^2+(y+a_1)^2+z^2=h^2$.

21. Superficie le cui normali siano tangenti alla sfera di raggio r col centro nell'origine delle coordinate.

Equaz. a der. parz. $(px+qy)^2+(r^2-x^2-y^2)(p^2+q^2)=0$; int. compl.

$$z+b=a\left\{\sqrt{x^2+y^2-r^2}-r\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{x^2+y^2-r^2}}{r}\pm r\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\right\}.$$

V. Elementi del Calcolo delle Variazioni.

Variazioni.

Variazione prima di un integrale semplice.

237. Sia $y = f(x)$ funzione di x; supponiamo che la y divenga y_1 in seguito ad un cambiamento nella forma del legame che lega y alla variabile indipendente x, e questo cambiamento supponiamo riduca la forma della funzione a $f(x) + \varepsilon\eta$, dove $\eta = \lambda(x)$ indica una funzione qualunque di x, ed ε una quantità infinitesima indipendente da x; cosichè sia $y_1 = f(x) + \varepsilon\eta$. La differenza $y_1 - y = \varepsilon\eta$ si chiama la *variazione* della funzione y, e la si indica col simbolo $\delta y = \varepsilon\eta$; ε rappresenta la piccolezza, η l'arbitrarietà della variazione δy.

Supponiamo ora e nel seguito che la $f(x)$ e la funzione arbitraria $\lambda(x)$ ammettano le derivate di quegli ordini che occorrerà considerare.

Dalla data definizione risulta subito che $d\delta y = \delta dy$. Invero abbiamo

$$y_1 - y = \varepsilon\eta = \delta y,$$

da cui

$$\frac{dy_1}{dx} - \frac{dy}{dx} = \varepsilon\frac{d\eta}{dx} = \delta\frac{dy}{dx},$$

ma $\varepsilon\dfrac{d\eta}{dx} = \dfrac{d\varepsilon\eta}{dx} = \dfrac{d\delta y}{dx}$, quindi $\dfrac{d\delta y}{dx} = \delta\dfrac{dy}{dx}$ da cui $d\delta y = \delta dy$, giacchè $\delta\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\delta dy}{dx}$. In conseguenza abbiamo altresì

$$\delta d^2 y = \delta ddy = dd\delta y = d^2\delta y\ ,\ \delta d^3 y = d^3\delta y, \ldots$$

Sia ora

$$\varphi(x, y, y' \ldots y^{(n)}; z, z', z'', \ldots z^{(m)}; \ldots)$$

una funzione della variabile indipendente x, e delle funzioni di essa $y, z, \ldots$ e delle loro derivate rapporto ad x. Ammettiamo l'esistenza delle derivate di φ rapporto ai suoi argomenti sino a quegli ordini che occorrerà considerare.

Attribuiamo a $y, z \ldots$ le variazioni $\delta y, \delta z, \ldots$ cioè cambiamo $y, z, \ldots$ in $y + \varepsilon\eta$, $z + \varepsilon\zeta, \ldots$ dove $\eta, \zeta \ldots$ sono funzioni arbitrarie di x, colla condizione che ammettano le derivate che dovranno considerarsi. Allora $y', z', \ldots$ si cambieranno in $y' + \varepsilon\eta'$, $z' + \varepsilon\zeta', \ldots$ e la φ in

$$\varphi(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta', \ldots z + \varepsilon\zeta, z' + \varepsilon\zeta', \ldots),$$

che sviluppata colla formola del Taylor diventa

$$\varphi + \varepsilon\varphi_1 + R \quad \text{od anche} \quad \varphi + \varepsilon\varphi_1 + \frac{\varepsilon^2}{2!}\varphi_2 + R_1, \ldots$$

dove

$$\varepsilon\varphi_1 = \varepsilon\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\eta + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}\eta' + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial y^{(n)}}\eta^{(n)} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\zeta + \frac{\partial\varphi}{\partial z'}\zeta' + \ldots\right)$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y' + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}\delta y' + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial y^{(n)}}\delta y^{(n)} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z + \frac{\partial\varphi}{\partial z'}\delta z' + \ldots$$

$$\varepsilon^2\varphi_2 = \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\eta^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}\eta'^2 + \ldots + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\zeta^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z'^2}\zeta'^2 + \ldots + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial y'}\eta\eta' + \ldots\right)$$

$$= \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\delta y^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}\delta y'^2 + \ldots + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial y'}\delta y\,\delta y' \ldots +$$

. . . . . .

nelle quali formole con $\delta y^2, \delta y'^2 \ldots$ intendiamo $(\delta y)^2, (\delta y')^2 \ldots$

Le quantità $\varepsilon\varphi_1, \varepsilon^2\varphi_2, \ldots$ si chiamano le *variazioni prima, seconda* etc. della φ e si indicano coi simboli $\delta\varphi, \delta^2\varphi, \ldots$

In particolare se $\varphi = y$ o $\varphi = z$, o $\varphi = y', \ldots$ otteniamo, nuovamente alla definizione posta in principio $\delta y = \varepsilon\eta$, $\delta z = \ldots$ $\delta y' = \varepsilon\eta'$, $\delta z' = \varepsilon\zeta', \ldots$ ed inoltre $\delta^2 y = 0$, $\delta^2 y' = 0, \ldots$ $\delta^2 z = 0$, $\delta^2 z' = 0, \ldots$

238. La variazione (prima) δI di un integrale

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y, y', \ldots y^{(n)}, z, z', \ldots z^{(m)}, \ldots)\, dx.$$

cioè il termine che contiene la prima potenza di ε nello sviluppo di

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta', \ldots z + \varepsilon\zeta, z' + \varepsilon\zeta' \ldots)\, dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} (\varphi + \varepsilon\varphi_1 + R)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \varphi\, dx + \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \varphi_1\, dx + \int_{x_0}^{x_1} R\, dx,$$

è

$$\delta I = \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \varphi_1\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \delta\varphi\, dx.$$

Qui si è supposto che i limiti x_0, x_1 dell' integrale siano rimasti inalterati. Supponiamo invece che, mentre $y, z \ldots$ subiscono le variazioni $\delta y, \delta z, \ldots$, x_0, x_1 si aumentino di quantità che indicheremo, per uniformità di notazione, con $\delta x_0 = \varepsilon\xi_0$, $\delta x_1 = \varepsilon\xi_1$. Allora δI sarà il coefficiente di ε nello sviluppo di $\int_{x_0+\varepsilon\xi_0}^{x_1+\varepsilon\xi_1} \Phi(x, \varepsilon)\, dx$, avendo posto

$$\Phi(x, \varepsilon) = \varphi(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta', \ldots).$$

Poniamo $x = t + \varepsilon\tau = t + \delta t$, dove τ è una funzione qualunque di t, ma tale che per $t = x_0$ diventi uguale a ξ_0 e per $t = x_1$ diventi ξ_1, come ad esempio

$$\tau = \frac{t - x_1}{x_0 - x_1}\xi_0 + \frac{t - x_0}{x_1 - x_0}\xi_1 + (t - x_0)(t - x_1)\tau_1,$$

essendo τ_1 funzione qualunque di t. Allora quando x assume il valore $x_0 + \varepsilon\xi_0$, t assume il valore x_0, e per $x = x_1 + \varepsilon\xi_1$ si ha $t = x_1$, ed

il precedente integrale diventa

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(t+\varepsilon\tau, \varepsilon)(dt+\varepsilon d\tau) = \int_{x_0}^{x_1} \left[\Phi(t, \varepsilon) + \varepsilon\tau \frac{\partial\Phi(t, \varepsilon)}{\partial t} + R\right](dt+\varepsilon d\tau)$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \Phi(t, \varepsilon)\, dt + \int_{x_0}^{x_1} \left(\Phi(t, \varepsilon)\, \varepsilon d\tau + \varepsilon\tau \frac{\partial\Phi(t, \varepsilon)}{\partial t} dt\right) + \text{termini}$$

che contengono potenze di ε superiori alla prima. L'ultimo integrale è

$$\varepsilon \int_{x_0}^{x_1} d[\tau\Phi(t, \varepsilon)] = \varepsilon[\xi_1 \Phi(x_1, \varepsilon) - \xi_0 \Phi(x_0, \varepsilon)]$$

e perciò il suo termine in ε è

$$\varepsilon\xi_1\varphi_1 - \varepsilon\xi_0\varphi_0 = \varphi_1 \delta x_1 - \varphi_0 \delta x_0,$$

indicando φ_1, φ_0 ciò che diventa φ per $x = x_1$ e per $x = x_0$.

Il termine in ε nello sviluppo di $\int_{x_0}^{x_1} \Phi(t, \varepsilon)\, dt = \int_{x_0}^{x_1} \Phi(x, \varepsilon)\, dx$ è $\int_{x_0}^{x_1} \delta\varphi\, dx$, quindi in ultimo

$$\delta I = \varphi_1 \delta x_1 - \varphi_0 \delta x_0 + \int_{x_0}^{x_1} \delta\varphi\, dx.$$

Posto

$$Y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad Y_r = \frac{\partial\varphi}{\partial y^{(r)}}, \quad Z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad Z_r = \frac{\partial\varphi}{\partial z^{(r)}}, \ldots$$

è

$$\delta\varphi = Y\delta y + Y_1\delta y' + Y_2\delta y'' + \ldots + Y_n\delta y^{(n)} + Z\delta z + Z_1\delta z' + \ldots$$

e quindi

$$\delta I = \varphi_1\delta x_1 - \varphi_0\delta x_0 + \int_{x_0}^{x_1} Y\delta y\, dx + \int_{x_0}^{x_1} Y_1\delta y'\, dx + \ldots + \int_{x_0}^{x_1} Y_n\delta y^{(n)}\, dx + \int_{x_0}^{x_1} Z\delta z\, dx + \ldots$$

Osservando che $\delta y^{(h)} = \delta \frac{d^h y}{dx^h} = \frac{d^h \delta y}{dx^h}$, $\delta z^{(h)} = \delta \frac{d^h z}{dx^h} = \frac{d^h \delta z}{dx^h}$, ...
ed applicando la formola di integrazione per parti al n. 205 vol. I, otteniamo

$$\int Y_h \delta y^{(h)}\, dx = Y_h \delta y^{(h-1)} - \frac{dY_h}{dx} \delta y^{(h-2)} + \frac{d^2 Y_h}{dx^2} \delta y^{(h-3)} - \ldots$$

$$+ (-1)^{h-1} \frac{d^{h-1} Y_h}{dx^{h-1}} \delta y + (-1)^h \int \frac{d^h Y_h}{dx} \delta y\, dx,$$

$$\int Z_h \delta z^{(h)}\, dx = Z_h \delta z^{(h-1)} - \frac{dZ_h}{dx} \delta z^{(h-2)} + \frac{d^2 Z_h}{dx^2} \delta z^{(h-3)} - \ldots$$

$$+ (-1)^{h-1} \frac{d^{h-1} Z_h}{dx^{h-1}} \delta z + (-1)^h \int \frac{d^h Z_h}{dx_h} \delta z\, dx,$$

. . . . . .

cosichè, posto

$$K = Y - \frac{dY_1}{dx} + \frac{d^2 Y_2}{dx^2} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n Y_n}{dx^n},$$

$$K_0 = Y_1 - \frac{dY_2}{dx} - \frac{d^2 Y_3}{dx^2} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} Y_n}{dx^{n-1}},$$

$$K_1 = Y_2 - \frac{dY_3}{dx} + \frac{d^2 Y_4}{dx^2} - \ldots + (-1)^{n-2} \frac{d^{n-2} Y_n}{dx^{n-2}},$$

. . . . . .

$$K_{n-2} = Y_{n-1} - \frac{dY_n}{dx},$$

$$K_{n-1} = Y_n,$$

$$H = Z - \frac{dZ_1}{dx} + \frac{d^2 Z_2}{dx^2} - \ldots + (-1)^m \frac{d^m Z_m}{dx^m},$$

$$H_0 = Z_1 - \frac{dZ_2}{dx} + \ldots + (-1)^{m-1} \frac{d^{m-1} Z_m}{dx^{m-1}},$$

$$H_1 = Z_2 - \frac{dZ_3}{dx} + \ldots\ldots,$$

. . . . . .

$$\Gamma = \mp \delta x + K_0 \delta y + K_1 \delta y' + K_2 \delta y'' + \ldots + K_{n-1} \delta y^{(n-1)} + H_0 \delta z + H_1 \delta z' + \ldots + H_{m-1} \delta z^{(m-1)} - \ldots$$

abbiamo

$$\delta I = \Gamma_1 - \Gamma_0 + \int_{x_0}^{x_1} (K \delta y + H \delta z + \ldots)\, dx,$$

avendo indicato con Γ_1, Γ_0 ciò che diventa Γ quando si faccia $x = x_1$ e $x = x_0$, ed in conseguenza $y = y_1$, $y = y_0$, $y' = y'_1$, $y' = y'_0, \ldots$ $\delta y = \delta y_0$, $\delta y = \delta y_1$ etc. dove $y_1, y'_1 \ldots$ indicano i valori di $y, y', \ldots$ per $x = x_1$, etc.

Problemi di massimo e di minimo relativi al calcolo delle variazioni.

239. Il problema che si propone di risolvere il calcolo delle variazioni è il seguente;

Determinare la forma delle funzioni $y, z \ldots$, tutte arbitrarie e sottoposte a certe leggi, che compariscono in una certa funzione di forma fissa ψ, che quasi sempre è un integrale definito I con limiti fissi o variabili, in modo che il valore corrisponde ψ_1 di ψ sia massimo o minimo; tale cioè che, indicate con $y_1, z_1 \ldots y_1', z_1', \ldots$ le forme così determinate di $y, z, \ldots$ ove si cambi, compatibilmente colle condizioni del problema, $y_1, z_1, \ldots$ in $y_1 + \varepsilon \eta, z_1 + \varepsilon \zeta, \ldots$ esista un numero positivo α tale che, per $|\varepsilon| < \alpha$ e qualunque siano le funzioni finite e che ammettono derivate $\eta, \zeta, \ldots$, risulti sempre $\psi_1 - \psi \leqq 0$, oppure $\psi_1 - \psi \geqq 0$, senza che si abbia sempre il caso dell' uguaglianza.

Osservando che la ψ, che comparisce nelle precedenti disuguaglianze, è $\psi_1 + \delta \psi_1 + \frac{1}{2} \delta^2 \psi_1 + \ldots$, dovrà l' espressione

$\delta\psi_1 + \frac{1}{2}\delta^2\psi_1 + \ldots$ mantenersi sempre dello stesso segno. Ora poichè si può prendere ε così piccolo, che il segno di quella espressione dipenda da $\delta\psi_1$ e, poichè cambiando ε in $-\varepsilon$, $\delta\psi_1$ si cambia in $-\delta\psi_1$, si riconosce che la variazione $\delta\psi_1$ dovrà annullarsi qualunque sia il sistema di variazioni $\varepsilon\eta, \varepsilon\zeta, \ldots$ che si attribuisce, compatibilmente colle condizioni del problema, a $y, z, \ldots$ e pei valori di $|\varepsilon|$ minori di un certo numero positivo.

L'annullarsi della variazione prima $\delta\psi_1$ è condizione necessaria al massimo o al minimo, ma non condizione sufficiente. Per riconoscere se effettivamente a quelle forme delle funzioni $y, z, \ldots$ corrisponda per ψ un massimo o un minimo, o nè massimo nè minimo, occorrerebbe esaminare le variazioni successive di ψ, il che noi non faremo, avendo qui lo scopo di sviluppare i soli elementi del calcolo delle variazioni, e perchè nei problemi, che ordinariamente vengono trattati, la natura stessa del problema indica spesso se si abbia propriamente un massimo o un minimo.

240. Venendo al caso più interessante in cui la ψ non sia altro che l'integrale definito

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \mathfrak{F}(x, y, y', \ldots y^{(n)}, z, z', \ldots z^{(n)}, \ldots)\, dx,$$

le funzioni $y, z, \ldots$ che lo rendono massimo o minimo dovranno essere tali che risulti

$$\delta I = \Gamma_1 - \Gamma_0 + \int_{x_0}^{x_1} (K\delta y + H\delta z + \ldots)\, dx = 0$$

qualunque siano le variazioni $\delta x_0, \delta x_1, \delta y, \delta z, \ldots$ che si attribuiscono a $x_0, x_1, y, z, \ldots$ compatibili colle speciali condizioni del problema.

Supponendo che queste variazioni possano essere completamente arbitrarie, potremo assumere

$$\delta x_0 = \delta x_1 = 0, \quad \delta y = \varepsilon\theta^2 K, \quad \delta z = \varepsilon\theta^2 H, \ldots$$

dove θ è una funzione qualunque di x, sottoposta alla condizione di

annullarsi unitamente alle sue derivate successive che occorre considerare per $x = x_0$ e per $x = x_1$. Allora si annullano per $x = x_0$ e per $x = x_1$ le variazioni

$$\delta y, \delta z, \delta y' = \frac{d\delta y}{dx} = 2\varepsilon\theta \frac{d\theta}{dx} K + \varepsilon\theta^2 \frac{dK}{dx}, \delta z' = 2\varepsilon\theta \frac{d\theta}{dx} H + \varepsilon\theta^2 \frac{dH}{dx}, \ldots,$$

cosichè, pel sistema di variazioni ora scelto, è $\Gamma_1 = 0$, $\Gamma_0 = 0$ e δI si riduce a

$$\delta I = \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \theta^2 (K^2 + H^2 + \ldots) dx,$$

che deve risultare zero, e perciò occorre che sia $K = 0$, $H = 0, \ldots$

In conseguenza la equazione $\delta I = 0$ si scinde nella equazione

$$\Gamma_1 - \Gamma_0 = 0,$$

che chiamasi equazione ai limiti, e nelle equazioni

$$K = 0, \quad H = 0, \ldots$$

le quali sono equazioni differenziali simultanee in y, z,... che servono a determinare queste funzioni.

241. Sviluppiamo il caso in cui la φ contenga una sola funzione y e le sue derivate, cosichè sia

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) dx.$$

Allora abbiamo una sola equazione differenziale

$$K = Y - \frac{dY_1}{dx} + \frac{d^2Y_2}{dx^2} - \ldots + (-1)^n \frac{d^nY^n}{dx^n} = 0,$$

di ordine $2n$, che serve a determinare y; e la quantità Γ si riduce a

$$\Gamma = \varphi\delta x + K_0\delta y + K_1\delta y' + \ldots + K_{n-1}\delta y^{(n-1)}.$$

Sia

$$f(x, y, c_1, c_2, \ldots c_{2n}) = 0,$$

o, più semplicemente,

$$y = \psi(x, c_1, c_2, \ldots c_{2n})$$

l'integrale della equazione $K = 0$, dove le c indicano le costanti arbitrarie.

Potranno presentarsi i casi seguenti:

1. Sono fissi i limiti x_0 e x_1 dell'integrale e sono fissi ed assegnati i valori $y_0, y_0', \ldots y_0^{(n-1)}$; $y_1, y_1', \ldots y_1^{(n-1)}$ di $y, y', \ldots y^{(n-1)}$ per $x = x_0$ e per $x = x_1$. Allora, essendo $\delta x_0 = 0$, $\delta x_1 = 0$, $\delta y_0 = 0$, $\delta y_1 = 0, \ldots$ è, senz'altro, $\Gamma_1 - \Gamma_0 = 0$. Ma dovremo avere

$$(1)\quad \begin{cases} y_0 = \psi(x_0, c_1, c_2 \ldots c_{2n}), & y_1 = \psi(x_1, c_1, c_2 \ldots c_{2n}), \\ y_0' = \psi'(x_0, c_1, c_2 \ldots c_{2n}), & y_1' = \psi'(x_1, c_1, c_2 \ldots c_{2n}), \\ y_0'' = \psi''(x_0, c_1, c_2 \ldots c_{2n}), & y_1'' = \psi''(x_1, c_1, c_2 \ldots c_{2n}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ y_0^{(n-1)} = \psi^{(n-1)}(x_0, c_1, c_2, c_{2n}), & y_1^{(n-1)} = \psi^{(n-1)}(x_1, c_1 \ldots c_{2n}), \end{cases}$$

dove gli apici indicano derivazione rispetto alla x; queste $2n$ equazioni permetteranno di determinare le $2n$ costanti, cosichè la funzione y che risolve il proplema è unica e determinata.

Se per $x = x_0, x = x_1$ fossero assegnati ancora i valori $y^{(n)}, y^{(n+1)} \ldots$, il problema non sarebbe, generalmente, risolubile, come subito si riconosce.

2. Non sono assegnati i limiti x_0, x_1 dell'integrale e nessuna delle quantità $y, y' \ldots$ ai limiti stessi, cosichè il problema è: determinare i limiti dell'integrale e i valori di y e delle derivate ai limiti stessi e la funzione y in modo che il valore dell'integrale risulti massimo oppure minimo. Allora, non dovendo passare alcuna relazione tra $\delta x_0, \delta y_0, \delta y_0', \ldots, \delta x_1, \delta y_1, \ldots$, la equazione ai limiti $\Gamma_1 - \Gamma_0 = 0$ si scinde nelle $2n + 2$ equazioni

$$\varphi_0 = 0,\ K^0_0 = 0,\ K_1^0 = 0, \ldots K^0_{n-1} = 0;\ \varphi_1 = 0,\ K_0^1 = 0,\ K_1^1 = 0, \ldots K^1_{n-1} = 0,$$

avendo indicato con K^0_r, K^1_r ciò che diventa K_r per $x = x_0$, e per $x = x_1$. Sostituendo nelle precedenti equazioni in luogo di $y_0, y_0', \ldots y_1, y_1', \ldots$ i loro valori espressi per $x_0, x_1, c_1, c_2, \ldots c_{2n}$ che si ricavano da $y = \psi(x, c_1, c_2, \ldots c_{2n})$ abbiamo $2n + 2$ equa-

zioni tra le $2n+2$ quantità $c_1, c_2, \ldots c_{2n}, x_0, x_1$, che servono a determinarle.

3. Siano assegnati alcuni dei $2n+2$ valori ai limiti di $x, y, y', \ldots y^{(n-1)}$. Se è assegnato il valore y_0 di y, mentre che non sia fisso il valore x_0, indicando con Δy_0 l'aumento che subisce y_0, dovrà essere $\Delta y_0 = 0$; ora questo aumento proviene dalla variazione che subisce la forma di y cioè da δy_0, e dal fatto che x_0 viene aumentato di δx_0, cosichè tenendo conto delle sole prime potenze di δ, è $\Delta y_0 = \delta y_0 + y_0' \delta x_0$, e quindi dovremo avere $\delta y_0 = -y_0' \delta x_0$. Se fosse assegnato x_0, allora sarebbe $\Delta y_0 = \delta y_0 = 0$. Se fosse assegnato il valore y_0' di y' essendo $\Delta y_0' = \delta y_0' + y_0'' \delta x_0$ sarebbe $\delta y_0' = -y_0'' \delta x_0$; e così via dicendo se $y^{(r)}$ è assegnato in un limite dovremo avere $\delta y^{(r)} = -y^{(r+1)} \delta x$ in quel limite.

Sostituendo questi valori di $\delta y^{(r)}$ nella equazione $\Gamma_1 - \Gamma_0 = 0$, si vedrà facilmente che, se i delle quantità $x, y' \ldots y^{(n-1)}$ ai limiti sono assegnate, la equazione $\Gamma_1 - \Gamma_0 = 0$ si riduce ad una relazione tra le $2n+2-i$ variazioni ai limiti delle $2n+2-i$ quantità non assegnate, ed essa si scinde quindi in $2n+2-i$ equazioni. che unitamente alle $2n$ equazioni (1) danno $4n+2-i$ equazioni per determinare le $2n+2-i$ quantità ai limiti non assegnate e le $2n$ costanti $c_1, c_2, \ldots c_{2n}$.

4. Tra i valori di $x, y, y', \ldots y^{(n-1)}$ ai limiti debbano passare r relazioni $M_1 = 0$, $M_2 = 0, \ldots M_r = 0$.

Allora dovremo avere

$$\frac{\partial M_i}{\partial x_0} \delta x_0 + \frac{\partial M_i}{\partial y_0} \Delta y_0 + \frac{\partial M_i}{\partial y_0'} \Delta y_0' + \ldots + \frac{\partial M_i}{\partial y_0^{(n-1)}} \Delta y_0^{(n-1)} + \frac{\partial M_i}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial M_i}{\partial y_1} \Delta y_1 + \ldots =$$

$(i = 1, 2 \ldots r)$, dove $\Delta y_0^{(s)} = \delta y_0^{(s)} + y_0^{(s+1)} \delta x_0$, $\Delta y_1^{(s)} = \delta y_1^{(s)} + y_1^{(s+1)} \delta x_1$

Queste r relazioni tra $\delta x_0, \delta y_0, \delta y'_0 \ldots \delta x_1, \delta y_1, \ldots$ ne determinano r mediante le rimanenti $2n+2-r$, che rimangono completamente arbitrarie e la equazione $\Gamma_1 - \Gamma_0 = 0$ si scinde allora in $2n+2-r$ equazioni, che unitamente alle r equazioni $M_i = 0$ ed alle (1) serviranno a determinare le $4n+2$ quantità $c_1, c_2, \ldots c_{2n}, x_0, x_1, y_0, y_0', \ldots y_0^{(n-1)}$, $y_1, y_1', \ldots y_1^{(n-1)}$.

Relativamente alla equazione differenziale $K = 0$ faremo le osservazioni seguenti:

1.° Se φ è della forma $\psi(x, y', y'' \ldots y^{(n)}) + y\psi_1(x)$ (se $\psi_1(x)$ è la φ non contiene y), allora è $Y = \psi_1(x)$, e si ha un integrale

primo

$$Y_1 - \frac{dY_2}{dx} + \frac{d^2Y_3}{dx^2} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}Y_n}{dx^{n-1}} = \int \psi_1(x)\,dx + c_1$$

della $K = 0$, e poi, non comparendo y esplicitamente in esso, il suo ordine potrà ancora abbassarsi di una unità; cosichè l'integrazione della $K = 0$ si riduce a quella d'una equazione differenziale d'ordine $2n - 2$.

2.° Supponiamo che la φ non contenga x, cioè si abbia $\varphi(y, y', y'' \ldots y^{(n)})$. Allora abbiamo

$$d\varphi = Y dy + Y_1 dy' + Y_2 dy'' + \ldots + Y_n dy^{(n)},$$

$$K = 0 = Y - \frac{dY_1}{dx} + \frac{d^2Y_2}{dx^2} - \ldots + (-1)^n \frac{d^nY_n}{dx^n},$$

e da queste, come si può facilmente vedere,

$$d\varphi = d(y'Y_1) + d\left(y''Y_2 - y'\frac{dY_2}{dx}\right) + d\left(y'''Y_3 - y''\frac{dY_3}{dx} + y'\frac{d^2Y_2}{dx^2}\right)$$

$$+ d\left(y^{(IV)}Y_4 - y'''\frac{dY_4}{dx^2} + y''\frac{d^2Y_4}{dx^2} - y'\frac{d^3Y_4}{dx_3}\right) + \ldots,$$

da cui si ricava un integrale primo

$$\varphi + c_1 = y'Y_1 + y''Y_2 - y'\frac{dY_2}{dx} + \ldots$$

che è una equazione differenziale di ordine $2n - 1$ non contenente esplicitamente x, e della quale perciò si abbassa l'ordine ancora di una unità.

3.° Se nella φ non compariscono x, nè y, la integrazione della $K = 0$ si riduce a quella d'una equazione di ordine $2n - 3$, giacchè allora è

$$d\varphi = Y_1 dy' + Y_2 dy'' + \ldots + Y_n dy^{(n)},$$

e la $K = 0$ ci dà

$$c_1 = Y_1 - \frac{dY_2}{dx} + \frac{d^2Y_3}{dx^2} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}Y_n}{dx_{n-1}};$$

moltiplicando quest' ultima equazione per dy' e sottraendo dalla penultima, otteniamo

$$d\varphi + c_1 dy' = d(y''Y_2) + d\left(y'''Y_3 - y''\frac{dY_3}{dx}\right) + d\left(y^{IV}Y_4 - y'''\frac{dY_4}{dx} + y''\frac{d^2Y_4}{dx^2}\right) + \ldots$$

che, integrata, dà una equazione differenziale d' ordine $2n-2$. il cui ordine si abbassa di una unità perchè non contiene esplicitamente x.

242. Considerazioni analoghe alle precedenti potrebbero farsi quando la φ contenesse più funzioni $y, z, \ldots$ Senza svilupparle in generale, saranno trattate in alcuni degli esempi che seguono e che si riferiscono a tutta la teoria ora svolta.

Esempi

1) Si voglia determinare la funzione y di x, che per $x = x_0$ prende il valore y_0, per $x = x_1$ il valore y_1 e che rende un massimo o un minimo l' integrale

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \varphi dx = \int_{x_0}^{x_1} (12xy + y'^2 + yy')\, dx.$$

Qui è $Y = 12x + y'$, $Y_1 = 2y' + y$, l' equazione $K = 0$: $12x - 2y'' = 0$, il cui integrale è $y = x^3 + c_1 x + c_2$. Per determinare le costanti c_1, c_2 abbiamo le equazioni

$$y_0 = x_0^3 + c_1 x_0 + c_2\ ,\ y_1 = x_1^3 + c_1 x_1 + c_2\ ,$$

che danno

$$(1) \qquad \begin{cases} c_1 = \dfrac{y_0 - y_1 + x_1^3 - x_0^3}{x_0 - x_1}, \\[2ex] c_2 = \dfrac{x_0 y_1 - x_1 y_0 + x_0 x_1 (x_0^2 - x_1^2)}{x_0 - x_1}, \end{cases}$$

cosichè la funzione cercata è la

$$y = x^3 + \frac{y_0 - y_1 + x_1^3 - x_0^3}{x_0 - x_1} x + \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0 + x_0 x_1 (x_0^2 - x_1^2)}{x_0 - x_1}.$$

Qui si riconosce facilmente se si abbia un massimo oppure un minimo. Poniamo $y+\delta y$, $y'+\delta y'$ in luogo di y, y' nel nostro integrale; esso diviene allora

$$\int_{x_0}^{x_1}(12xy+y'^2+yy')\,dx+\int_{x_0}^{x_1}(12x\delta y+2y'\delta y'+y\delta y'+y'\delta y)\,dx$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}[(\delta y')^2+\delta y\delta y']\,dx\,.$$

Il secondo integrale è zero, come anche si riconosce effettuando il calcolo tenendo presente che le variazioni ai limiti sono nulle; il terzo integrale, che è la variazione seconda, è

$$\int_{x_0}^{x_1}(\delta y')^2\,dx+\left[\frac{(\delta y)^2}{2}\right]_{x_0}^{x_1}=\int_{x_0}^{x_1}(\delta y')^2\,dx \text{ che è sempre positivo se } x_0<x_1.$$

La nostra funzione rende quindi minimo l' integrale I.

Il problema proposto sia ora: Determinare la funzione y e i limiti x_0, x_1 dell' integrale in modo che l'integrale I assuma un valore massimo o minimo. Si trova la stessa funzione y, ma per determinare c_1, c_2, x_0, x_1, osservando che ora è $K_0=2y'+y$, si hanno le quattro equazioni che si ottengono dalle

$$\varphi=12xy+y'^2+yy'=0,\ K_0=2y'+y=0 \text{ per } x=x_0 \text{ e per } x=x_1,$$

ossia dalle equivalenti

$$2y'+y=0\ ,\ (24x+y')y'=0. \tag{2}$$

Dalla prima delle (2) ricaviamo

$$6x_0^2+2c_1+x_0^3+c_1x_0+c_2=0\ ,\ 6x_1^2+2c_1+x_1^3+c_1x_1+c_2=0, \tag{3}$$

dalle quali

$$\begin{cases} c_1=-(x_0+x_1)^2-6(x_0+x_1)+x_0x_1\,, \\ c_2=2(x_0+x_1)^2+12(x_0+x_1)+x_0x_1(x_0+x_1)+5x_0x_1\,. \end{cases} \tag{4}$$

Dalla seconda delle (2) ricaviamo $24x_0+y_0'=0$, $24x_1+y'_1=0$

ossia

$$(5) \qquad 24x_0 + 3x_0^2 + c_1 = 0\,,\ 24x_1 + 3x_1^2 + c_1 = 0$$

dalle quali $(x_0 - x_1)[24 + 3(x_0 + x_1)] = 0$. Non tenendo conto della soluzione $x_0 - x_1 = 0$, perchè i limiti dell' integrale riuscirebbero uguali, rimane $x_0 + x_1 = -8$, cosichè $c_1 = -16 - 8x_0 - x_0^2$, che sostituito nella prima delle (3) la riduce a $x_0^2 + 8x_0 - 8 = 0$, da cui $x_0 = -4 \pm 2\sqrt{6}$, e quindi $x_1 = -4 \mp 2\sqrt{6}$. I valori di c_1, c_2 diventano allora $c_1 = -24$, $c_2 = 64$.

Dalla seconda delle (2) ricaviamo ancora $y'_0 = 0$, $y'_1 = 0$, cioè $3x_0^2 + c_1 = 0$, $3x_1^2 + c_1 = 0$ e quindi $(x_0 - x_1)(x_0 + x_1) = 0$, $x_0 + x_1 = 0$, $c_1 = -x_0^2$, e l' equazione $3x_0^2 + c_1 = 0$ dà $x_0 = 0$, e quindi ancora $x_1 = 0$ e i limiti dell' integrale sono uguali.

Dalla seconda delle (2) ricaviamo ancora $y'_0 = 0$, $24x_1 + y'_1 = 0$ (oppure $y'_1 = 0$, $24x_0 + y_0' = 0$), cioè $3x_0^2 + c_1 = 0$, $24x_1 + 3x_1^2 + c_1 = 0$, ossia

$$(6) \quad 2x_0^2 - x_1^2 - x_0x_1 - 6x_0 - 6x_1 = 0\,,\ 2x_1^2 - x_0^2 - x_0x_1 - 6x_0 + 18x_1 = 0,$$

che, sommate, danno

$$(x_1 - x_0)(x_1 - x_0 + 12) = 0 \quad \text{e quindi} \quad x_1 = x_0 - 12\,;$$

sostituendo questo valore di x_1 nella prima delle (6), otteniamo $24x_0 - 6 \,.\, 12 = 0$, da cui $x_0 = 3$, e quindi $x_1 = -9$.

La combinazione $y'_1 = 0$, $24x_0 + y'_0 = 0$ darebbe $x_0 = -9$, $x_1 = 3$. I valori di c_1, c_2 diventano allora $c_1 = -27$, $c_2 = 54$.

Riassumendo, i valori di x_0, x_1, e la funzione y che possono risolvere il problema sono

$$x_0 = -4 \pm 2\sqrt{6}\,,\ x_1 = -4 \mp 2\sqrt{6}\,.\ y = x_3 - 24x + 64\,;$$

$$x_0 = 3,\ x_1 = -9 \text{ oppure } x_0 = -9\,,\ x_1 = 3 \text{ e } y = x^3 - 27x + 54.$$

Per completare la ricerca occorrerebbe esaminare la variazione seconda dell' integrale I.

Il problema proposto sia ancora: Determinare la funzione y che rende massimo o minimo l' integrale I, essendo fissi i limiti x_0, x_1 dell' integrale.

Si avrebbe ancora la funzione $y = x^3 + c_1x + c_2$, ma, poichè $\delta x_1 = 0$, $\delta x_0 = 0$, la equazione $\Gamma_1 - \Gamma_0 = 0$ darebbe le due equazioni $2y'_0 + y_0 = 0$, $2y'_1 + y_1 = 0$, cioè le (3) dalle quali si ricavano

valori (4) di c_1, c_2; e la funzione y precedente dove c_1, c_2 hanno i valori (4) sarebbe la funzione cercata.

In modo analogo si procede negli altri problemi che si presentano in questo esempio. Così se sono dati y_0, y_1 ma non i limiti dell' integrale, le costanti c_1, c_2 vengono date dalle (1); la equazione $\Gamma_1 - \Gamma_0 = 0$ diviene allora $-(\varphi_0 - y'_0 K_0^0)\delta x_0 + (\varphi_1 - y'_1 K_0^1)\delta x_1 = 0$ che si scinde nelle due $\varphi_0 - y'_0 K_0^0 = 0$, $\varphi_1 - y'_1 K_0^1 = 0$, cioè nelle $12x_0 y_0 - (3x_0^2 + c_1)^2 = 0$, $12x_1 y_1 - (3x_1^2 + c_1)^2 = 0$, e queste equazioni, sostituito per c_1 il valore dato dalle (1), determinano x_0, x_1.

Se fossero dati x_0, y_0 ma non x_1, y_1, la equazione $\Gamma_1 - \Gamma_0 = 0$ darebbe $\varphi_1 = 0$, $K_0^1 = 0$, che, unitamente alle $y_0 = x_0^3 + c_1 x_0 + c_2$, $y_1 = x_1^3 + c_1 x_1 + c_2$, determinerebbero x_1, y_1, c_1, c_2. Analogamente se fossero dati x_0, y_1, oppure x_1, y_0.

2) *Linea più breve tra due punti di coordinate* (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1). Si tratta di determinare le funzioni y, z di x che rendono minimo l' integrale $I = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$.

Abbiamo $Y = 0$, $Z = 0$, $Y_1 = \dfrac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}$, $Z_1 = \dfrac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}$

cosichè le equazioni differenziali $K = 0$, $H = 0$ danno

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = C_1, \quad \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = C_2,$$ dalle quali $y' = c_1$, $z' = c_2$ e quindi $y = c_1 x + c_3$, $z = c_2 x + c_4$; la linea più breve è perciò la retta che unisce i due punti.

Nel nostro caso è

$$\Gamma = \varphi \delta x + K_0 \delta y + H_0 \delta z = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} [(1 + y'^2 + z'^2)\delta x + y' \delta y + z' \delta z]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + c_1^2 + c_2^2}} [(1 + c_1^2 + c_2^2)\delta x + c_1 \delta y + c_2 \delta z].$$

Se i punti (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) sono fissi, la equazione $\Gamma_1 - \Gamma_0 = 0$ è soddisfatta da sè, e le costanti c_1, c_2, c_3, c_4 vengono determinate esprimendo che la retta passa per quei due punti.

Sia dato il punto (x_0, y_0, z_0) e il punto (x_1, y_1, z_1) debba trovarsi sulla superficie $f(x, y, z) = 0$. Allora per determinare le quantità

$c_1, c_2, c_3, c_4, x_1, y_1, z_1$ abbiamo le equazioni

$$(7) \qquad \begin{cases} y_0 = c_1 x_0 + c_3 \ , \ z_0 = c_2 x_0 + c_3 \ , \\ y_1 = c_1 x_1 + c_3 \ ; \ z_1 = c_1 x_1 + c_3 \ , \end{cases}$$

la $f(x_1, y_1, z_1) = 0$ e le due equazioni che provengono da $\Gamma_1 - \Gamma_0 = 0$, ossia, poichè $\delta x_0 = 0$, $\delta y_0 = 0$, $\delta z_0 = 0$, da

$$(1 + c_1^2 + c_2^2)\delta x_1 + c_1 \delta y_1 + c_2 \delta z_1 = 0$$

tenendo conto dalla relazione $f(x_1, y_1, z_1) = 0$, dalla quale si ha

$$(8) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + c_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial z_1}\right)\delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1}\delta z_1 = 0.$$

Senza calcolare effettivamente queste quantità, limitiamoci ad osservare che, eliminando una delle variazioni δx_1, δy_1, δz_1 tra la (7) e la (8), ed uguagliando a zero i coefficienti delle due variazioni rimanenti, otteniamo

$$c_1 = A \frac{\partial f}{\partial y_1}, \ c_2 = A \frac{\partial f}{\partial z_1}, \text{ dove } A = \frac{1 + c_1^2 + c_2^2}{\frac{\partial f}{\partial x_1} + c_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial z_1}},$$

e quindi

$$A = \frac{1 + A^2\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)^2 + A^2\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2}{\frac{\partial f}{\partial x_1} + A\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)^2 + A\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2},$$

da cui $A = \dfrac{1}{\frac{\partial f}{\partial x_1}}$. cosichè $c_1 = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial y_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_1}}$, $c_2 = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_1}}$, e le equazioni della retta, che unisce il punto (x_0, y_0, z_0) al punto (x_1, y_1, z_1) sulla superficie, $y - y_1 = c_1(x - x_1)$, $z - z_1 = c_2(x - x_1)$ diventano

$$\frac{x - x_1}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} = \frac{y - y_1}{\frac{\partial f}{\partial y_1}} = \frac{z - z_1}{\frac{\partial f}{\partial z_1}},$$

cioè quelle della normale alla superficie stessa nel punto (x_1, y_1, z_1)

La linea più breve è quindi la retta che passa per (x_0, y_0, z_0) ed è normale alla superficie.

Se il punto (x_1, y_1, z_1) deve essere sulla superficie $f(x, y, z) = 0$ e il punto (x_0, y_0, z_0) sulla superficie $F(x, y, z) = 0$, per determinare le quantità $c_1, c_2, c_2, c_4, x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1$ si avrebbero le quattro equazioni (7), le due $f(x_1, y_1, z_1) = 0$, $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ e le quattro che si ricavano da $\Gamma_1 - \Gamma_0 = 0$, tenendo conto delle due ultime equazioni. Si otterrebbe allora, in modo completamente analogo a quello del caso precedente, $c_1 = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}} = \dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial y_0}}{\dfrac{\partial F}{\partial x_0}}$, $c_2 = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial z_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}} = \dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial z_0}}{\dfrac{\partial F}{\partial x_0}}$, dalle quali si deduce che la linea più breve tra le due superficie è normale alle due superficie stesse.

Se il punto (x_0, y_0, z_0) è dato e il punto (x_1, y_1, z_1) deve trovarsi sulla curva $f(x, y, z) = 0$, $F(x, y, z) = 0$, abbiamo per determinare le quantità $c_1, c_2, c_3, c_4, x_1, y_1, z_1$ le equazioni $f(x_1, y_1, z_1) = 0$, $F(x_1, y_1, z_1) = 0$. le (7) e quella che si ricava da

$$(1 + c_1^2 + c_2^2)\delta x_1 + c_1 \delta y_1 + c_2 \delta z_1 = 0$$

osservando che

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + c_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial z_1}\right)\delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1}\delta z_1 = 0,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} + c_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial F}{\partial z_1}\right)\delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial F}{\partial z_1}\delta z_1 = 0,$$

cioè la quazione

$$\begin{vmatrix} 1 + c_1^2 + c_2^2 & c_1 & c_2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + c_1 \dfrac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \dfrac{\partial f}{\partial z_1} & \dfrac{\partial f}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f}{\partial z_1} \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_1} + c_1 \dfrac{\partial F}{\partial y_1} + c_2 \dfrac{\partial F}{\partial z_1} & \dfrac{\partial F}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F}{\partial z_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & c_1 & c_2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f}{\partial z_1} \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F}{\partial z_1} \end{vmatrix} = 0.$$

Questa equazione mostra che coesistono le tre equazioni

$$dx_1 + c_1 dy_1 + c_2 dz_1 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1} dz_1 = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial F}{\partial z_1} dz_1 = 0,$$

cioè che i valori di dx_1, dy_1, dz_1, che soddisfanno alle due ultime delle tre precedenti equazioni, soddisfanno anche alla prima, la quale esprime che la retta

$$x - x_1 = \frac{y - y_1}{c_1} = \frac{z - z_1}{c_2}$$

è sul piano normale

$$(x - x_1)\, dx_1 + (y - y_1)\, dy_1 + (z - z_1) dz_1 = 0$$

alla nostra curva nel punto (x_1, y_1, z_1). In conseguenza la linea più breve tra il punto (x_0, y_0, z_0) e la curva data è la normale alla curva passante pel punto.

In modo analogo si proverebbe che la linea più breve tra due linee ed una superficie è la loro normale comune.

3 *Linee geodetiche.* — Si vogliano trovare le funzioni y, z che rendono massimo o minimo l'integrale

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y, y', \ldots y^{(n)}, z, z', \ldots z^{(m)})\, dx,$$

quando tra y, z debba passare una relazione della forma $\psi(x, y, z) = 0$. Allora tra le variazioni $\delta y, \delta z$, che compariscono sotto il segno integrale nella variazione

$$\delta I = \Gamma_1 - \Gamma_0 + \int_{x_0}^{x_1} (K \delta y + H \delta z)\, dx,$$

deve passare la relazione

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \psi}{\partial z} \delta z = 0, \text{ da cui } \delta z = - \frac{\frac{\partial \psi}{\partial y}}{\frac{\partial \psi}{\partial z}} \delta y;$$

cosichè, essendo allora

$$\delta I = \Gamma_1 - \Gamma_0 + \int_{x_0}^{x_1} \left(K - \frac{\frac{\partial \psi}{\partial y}}{\frac{\partial \psi}{\partial z}} H \right) \delta y dx,$$

per determinare y, z abbiamo la equazione differenziale

$$K - \frac{\frac{\partial \psi}{\partial y}}{\frac{\partial \psi}{\partial z}} H = 0, \text{ e la } \psi = 0.$$

Se fosse $\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$, cioè se la relazione $\psi = 0$ non contenesse z, $\psi(x, y) = 0$, allora, dovendosi avere $\frac{\partial \psi}{\partial y} \delta y = 0$, sarebbe $\delta y = 0$, e δI si ridurrebbe a $\Gamma_1 - \Gamma_0 + \int_{x_0}^{x_1} H \delta z dx$, e si avrebbero per determinare y, z la equazione differenziale $H = 0$ e la equazione finita $\psi(x, y) = 0$.

Applichiamo queste considerazioni per determinare la linea *geodetica* sopra una superficie $\psi(x, y, z) = 0$, cioè la linea più breve tracciata sulla superficie stessa tra due suoi punti (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1).

L' integrale che dobbiamo rendere minimo è

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx,$$

colla condizione $\psi(x, y, z) = 0$.

Qui abbiamo

$$K = \frac{1}{(1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} [z'(y'z'' - z'y'') - y''], \quad H = \frac{1}{(1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} [y'(z'y'' - y'z'') - z''],$$

cosichè la equazione differenziale delle geodetiche sulla superficie

$\psi = 0$ è la

$$(9) \qquad \frac{\partial\psi}{\partial z}[z'(y'z'' - z'y'') - y''] + \frac{\partial\psi}{\partial y}[y'(y'z'' - z'y'') + z''] = 0$$

colla condizione $\psi(x, y, z) = 0$.

Indicando con s l'arco di geodetica, è $K = -\frac{d}{dx}\frac{dy}{ds}$, $H = -\frac{d}{dx}\frac{dz}{ds}$, e l'equazione $K\frac{\partial\psi}{\partial z} - H\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$, da cui si è ricavata la (9), diviene

$$(10) \qquad \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{\frac{\partial\psi}{\partial y}} = \frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{\frac{\partial\psi}{\partial z}}.$$

Osserviamo inoltre che

$$(11) \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{dz}{ds} = 0,$$

e che l'equazione $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$ dà

$$(12) \qquad \frac{dx}{ds}\, d\left(\frac{dx}{ds}\right) + \frac{dy}{ds}\, d\left(\frac{dy}{ds}\right) + \frac{dz}{ds}\, d\left(\frac{dz}{ds}\right) = 0,$$

cosichè moltiplicando la (11) per $d\left(\frac{dy}{ds}\right)$, la (12) per $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ e sottraendo l'una dall'altra, col tenere conto della (10), abbiamo $\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{\frac{\partial\psi}{dx}} = \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{\frac{\partial\psi}{\partial y}}$;

quindi per le linee geodetiche vale la relazione

$$\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{\frac{d\psi}{dx}} = \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{\frac{\partial\psi}{\partial y}} = \frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{\frac{\partial\psi}{\partial z}},$$

la quale esprime che la normale principale in ogni punto della geo-

detica coincide colla normale alla superficie, ossia che il piano osculatore in ogni punto di una geodetica di una superficie è normale alla superficie stessa.

Se la superficie data è una superficie cilindrica $\psi(x, y) = 0$ o più semplicemente $y = \psi(x)$, la equazione differenziale delle geodetiche si riduce ad $H = 0$, cioè a $y'(y'z'' - z'y'') + z'' = 0$, ossia, sostituendo a y', y'' le espressioni $\psi'(x) = \psi'$, $\psi''(x) = \psi''$, alla

$$z''(1 + \psi'^2) = z'\psi'\psi'', \quad \text{ossia} \quad \frac{dz'}{z'} = \frac{\psi'\psi'' dx}{1 + \psi'^2},$$

che, integrata, dà $z' = C_1\sqrt{1 + \psi'^2}$ e quindi $z = C_1 \int_a^x \sqrt{1 + \psi'^2} dx + C_2$,

dove a, C_1, C_2 indicano costanti. Esprimendo che la geodetica deve passare pel punto (x_0, y_0, z_0) sulla superficie, abbiamo $z_0 = C_1 \int_a^{x_1} \sqrt{1+\psi'^2} dx + C_2$

e quindi $z - z_0 = C_1 \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \psi'^2} dx$; e poichè la curva passa ancora

pel punto (x_1, y_1, z_1) è $z_1 - z_0 = C_1 \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \psi'^2} dx$, per cui le equazioni della richiesta geodetica sono le

$$y = \psi(x), \quad (z - z_0) \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \psi'^2} dx = (z_1 - z_0) \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \psi'^2} dx.$$

Indicando con γ l'angolo che la tangente in un punto (x, y, z) della geodetica fa coll'asse delle z, è

$$\cos\gamma = \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \frac{(z_1 - z_0)\sqrt{1+\psi'^2}\, dx}{\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+\psi'^2} dx} \; \frac{1}{dx\sqrt{1 + \psi'^2 + \dfrac{(z_1 - z_0)^2(1 + \psi'^2)}{\left(\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \psi'^2} dx\right)^2}}}$$

$$= \frac{z_1 - z_0}{\sqrt{(z_1 - z_0)^2 + \left(\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \psi'^2} dx\right)^2}},$$

cioè $\cos\gamma$ è una costante. La geodetica taglia sotto un angolo costante le generatrici del cilindro. Essa è quindi un' elica, e quando il cilindro si sviluppa sopra un piano, la geodetica si dispone lungo una linea che taglia sotto angolo costante un sistema di rette parallele, cioè lungo una retta.

4) Il problema di determinare una funzione y che renda massima o minima una funzione $\varphi(x, y, y' . y''...)$ è generalmente insolubile, perchè la funzione y dovrebbe soddisfare contemporaneamente alle equazioni $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0, \frac{\partial\varphi}{\partial y'}=0, \frac{\partial\varphi}{\partial y''}=0, ...$ che si ottengono dal doversi annullare, qualunque siano le $\delta y, \delta y', \delta y''.$, la variazione $\delta\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y'+\frac{\partial\varphi}{\partial y''}\delta y''+...$ Però, in casi speciali, o per l'aggiunta di speciali condizioni, il problema potrà essere solubile.

Così ad es.: si voglia la funzione y che rende massima o minima la funzione

$$\varphi=[y+(m-x)y'][y+(n-x)y'].$$

Il problema non è solubile perchè y dovrebbe soddisfare alle due equazioni differenziali

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=2y+(n+m-2x)y'=0, \frac{\partial\varphi}{\partial y'}=(m+n-2x)y+(m-x)(n-x)y'=0.$$

Ma se $m=n$, le due equazioni precedenti hanno il fattore comune $y+(m-x)y'$, e si ha perciò, per determinare y, l' unica equazione differenziale $y+(m-x)y'=0$, il cui integrale $y=C(m-x)$ può rendere massima o minima la funzione $[y+(m-x)y']^2$. Essa assume effettivamente il valore minimo *zero*.

5) Si voglia risolvere ancora il problema: Determinare la curva $y=y(x)$ che, in ogni suo punto, ha la sottonormale massima o minima rispetto alle curve che si ottengono da essa facendo variare $y(x)$ in guisa, che il prodotto della ordinata per la intercetta dalla normale sull' asse delle x a partire dall' origine non subisca alcuna variazione.

La intercetta dalla normale, in un punto (x, y) d' una curva, sull' asse delle x è $x+yy'$, cosichè dobbiamo determinare la funzione y di x che rende massima o minima la funzione yy' colla condizione che la espressione $y(x+yy')$ rimanga invariata quando y, y' subiscono

le variazioni $\delta y, \delta y'$; perciò le equazioni del problema sono

$$(13) \qquad y'\delta y + y\delta y' = 0 \ , \ (x + yy')\,\delta y + y(y'\delta y + y\delta y') = 0,$$

ed avremo quindi, per determinare y, la equazione $x + yy' = 0$, da cui $x^2 + y^2 = c^2$, essendo c una costante. La curva richiesta è un circolo col centro nell' origine delle coordinate.

Per distinguere se si ha un massimo o un minimo di yy', osserviamo che

$$(y + \delta y)(y' + \delta y') = yy' + \delta y\,\delta y'$$

e che la seconda delle (13) ci dà $\delta y' = -\dfrac{x + 2yy'}{y^2}\,\delta y = \dfrac{x}{y^2}\,\delta y$, cosichè, essendo $\delta y\,\delta y' = x\left(\dfrac{\delta y}{y}\right)^2$, avremo un minimo se $x > 0$, un massimo se $x < 0$.

Notiamo che, per la natura del problema, la variazione δy non è arbitraria completamente; essa è determinata da una delle (13).

La prima di esse, posto $\delta y = \varepsilon\eta$, ci dà $\sqrt{c^2 - x^2}\,\eta' + \dfrac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}}\,\eta = 0$, da cui $\eta = \dfrac{c_1}{\sqrt{c^2 - x^2}}$, essendo c_1 una costante. Quindi tra tutte le curve $y = \sqrt{c^2 - x^2} + \dfrac{\varepsilon c_1}{\sqrt{c^2 - x^2}}$, ossia tra le curve $y = \sqrt{c^2 - x^2} + \dfrac{c_2}{\sqrt{c^2 - x^2}}$, o tra le curve $y^2(c^2 - x^2) = (c^2 - x^2 + c_2)^2$, il circolo $x^2 + y^2 = c^2$ è quella che ha la sottonormale massima o minima nei punti corrispondenti alle medesime ascisse.

6) Si vogliano le funzioni y, z di x che rendono massima o minima la funzione

$$\varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 2zx - 2x^3y.$$

Deve essere

$$\delta\varphi = 2(y - x^3)\,\delta y + 2(z - x)\,\delta z = 0,$$

da cui $y - x^3 = 0$, $z - x = 0$, e le funzioni richieste sono $y = x^3$, $z = x$, che rendono minima la φ, perchè

$$x^2 + (y + \delta y)^2 + (z + \delta z)^2 - 2(z + \delta z)\,x - 2x^3(y + \delta y) =$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2zx - 2x^3y + (\delta y)^2 + (\delta z)^2.$$

Problemi di massimi e minimi relativi, nel calcolo delle variazioni.

243. Sotto questa denominazione si sogliono designare i problemi della natura seguente:

Tra le funzioni $y, z, \ldots$ per le quali l'integrale

$$I_1 = \int_{x_0}^{x_1} \varphi_1(x, y, y', \ldots z, z', \ldots)\, dx$$

mantiene un valore costante A, determinare quelle che rendono massimo o minimo l'integrale

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y, y', \ldots, z, z', z'' \ldots)\, dx.$$

Per risolverlo, osserviamo che le funzioni $y, z, \ldots$ cercate dovranno essere tali che risulti

$$\delta I = \Gamma_1 - \Gamma_0 + \int_{x_0}^{x_1} (K\delta y + H\delta z + \ldots)\, dx = 0,$$

e inoltre, poichè $I_1 = A$, anche tali che sia

$$\delta I_1 = \Theta_1 - \Theta_0 + \int_{x_0}^{x_1} (K_1 \delta y + H_1 \delta z + , \ldots)\, dx = 0,$$

dove $\Theta, K_1, H_1 \ldots$ sono espressioni formate colla φ_1 come le $\Gamma, K, H \ldots$ lo sono colla φ.

Qui non possiamo ragionare più come al n. 240, perchè le variazioni $\delta y, \delta z \ldots$ non sono completamente arbitrarie, ma legate da una certa relazione, per trovare la quale poniamo

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{x} (K_1 \delta y + H_1 \delta z + \ldots)\, dx = \psi(x)$$

dove $\psi(x)$ è una qualunque funzione continua di x, sottoposta alla sola condizione di annullarsi per $x = x_0$ e di diventare uguale a $\Theta_0 - \Theta_1$ per $x = x_1$, conformemente a quanto è richiesto dalla equazione $\delta I_1 = 0$. La $\psi(x)$ è perciò una funzione completamente arbitraria nell'intervallo (x_0, x_1), esclusi gli estremi, dove deve prendere i valori precedenti.

Dalla (1) ricaviamo, colla derivazione rispetto ad x,

$$K_1 \delta y + H_1 \delta z + \ldots = \psi'(x)$$

e questa è la relazione che deve passare tra le variazioni $\delta y, \delta z, \ldots$ In virtù di questa relazione la equazione $\delta I = 0$ diviene

$$(2) \quad \Gamma_1 - \Gamma_0 + \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{K}{K_1} \psi'(x) + \left(H - \frac{K}{K_1} H_1 \right) \delta z + \ldots \right] dx = 0.$$

Ma

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{K}{K_1} \psi'(x)\, dx = \left[\frac{K}{K_1} \psi(x) \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \psi(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{K}{K_1} \right) dx$$

$$= \left(\frac{K}{K_1} \right)_{x_1} (\Theta_0 - \Theta_1) - \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{K}{K_1} \right) dx,$$

per cui la (2) diventa

$$\Gamma_1 - \Gamma_0 - \left(\frac{K}{K_1} \right)_{x_1} (\Theta_1 - \Theta_0) + \int_{x_0}^{x_1} \left[- \frac{d}{dx} \left(\frac{K}{K_1} \right) \psi(x) + \left(H - \frac{K}{K_1} H_1 \right) \delta z + \ldots \right] dx = 0$$

la quale, poichè ora $\psi(x), \delta z \ldots$ sono completamente arbitrarie tra x_0 e x_1, si scinde nelle

$$\Gamma_1 - \Gamma_0 - \left(\frac{K}{K_1} \right)_{x_1} (\Theta_1 - \Theta_0) = 0, \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{K}{K_1} \right) = 0, \quad H - \frac{K}{K_1} H_1 = 0, \ldots$$

la seconda delle quali dà $\frac{K}{K_1} = -c$, c essendo una costante, e le altre diventano quindi

$$\Gamma_1 - \Gamma_0 + c(\Theta_1 - \Theta_0) = 0, \quad H + cH_1 = 0, \ldots$$

le quali, unitamente alla $K + cK_1 = 0$, sono, come subito si riconosce, le equazioni pel massimo o minimo dell' integrale

$$\int_{x_0}^{x_1} (\varphi + c\varphi_1)\, dx\,.$$

Il problema di massimo o minimo relativo, che volevamo risolvere, è ridotto perciò al problema di massimo o minimo assoluto del precedente integrale. Nella soluzione che si otterrà comparirà una costante di più, c; ma questa si determinerà in modo che l' integrale I_1 acquisti il valore dato A.

Esempi

1) *Problema degli isoperimetri.* Tra tutte le curve dello stesso perimetro l, aventi un estremo nell' origine delle coordinate e l'altro estremo sull' asse delle x, determinare quella che coll' asse delle x racchiude un' area massima.

Il problema di massimi e minimi relativi che dobbiamo risolvere è il seguente: Determinare la quantità $a > 0$, e quella funzione y di x, che per $x = 0$ è zero ed è pure zero per $x = a$, in modo che l' integrale $\int_0^a y\, dx$ riesca massimo, dovendo allo stesso tempo essere $\int_0^a \sqrt{1 + y'^2}\, dx = l$. Ed il problema corrispondente di massimo assoluto è: Determinare a e y, dovendo essere $y = 0$ per $x = 0$ e per $x = a$, in modo che l' integrale

$$\int_0^a (y - c\sqrt{1 + y'^2})\, dx$$

riesca massimo.

Qui abbiamo $Y = 1$, $Y_1 = \dfrac{-cy}{\sqrt{1 + y'^2}}$, quindi l'equazione $K = 0$

è $1 + \frac{d}{dx} \frac{cy'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$, da cui $x - c_1 = \frac{-cy'}{\sqrt{1+y'^2}}$ dalla quale $y' = \frac{-(x-c_1)}{\sqrt{c^2-(x-c_1)^2}}$, che, integrata, dà

$$y - c_2 = \sqrt{c^2 - (x-c_1)^2},$$

che rappresenta un circolo di raggio c, col centro nel punto (c_1, c_2).

Per determinare le costanti osserviamo che per $x = 0$ e per $x = a$ dobbiamo avere $y = 0$, cosichè

$$(3) \qquad -c_2 = \sqrt{c^2 - c_1^2}\,, \quad -c_2 = \sqrt{c^2 - (a-c_1)^2},$$

dalle quali si trae $c_1 = \frac{a}{2}$. La equazione $\Gamma_1 - \Gamma_0 = 0$, poichè per $x = 0$ è $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, e per $x = a$ è pure $\delta y = 0$, si riduce a ciò che diventa per $x = a$ l'equazione

$y - c\sqrt{1+y'^2} - \frac{cy'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$, cioè a $\frac{c}{\sqrt{1+y_a'^2}} = 0$, e poichè c non può prendersi uguale a zero, dovrà essere y'_a infinito; ma $y'_a = \frac{-a}{2\sqrt{c^2 - \frac{a^2}{4}}}$, cosichè dovrà essere $a = 2c$, quindi $c_1 = c$ e la prima delle (3) dà $c_2 = 0$; il nostro circolo è perciò

$$y = \sqrt{2cx - x^2},$$

e l'area che risulta massima è il semicircolo al di sopra dell'asse delle x.

Rimane da determinare c, che si determina mediante l'integrale $\int_0^{2c} \sqrt{1+y'^2}\, dx = l$ che dà, come si può vedere senza ricorrere al calcolo dell'integrale stesso, $c = \frac{l}{\pi}$.

Senza provare che si ha effettivamente sempre un massimo ci limiteremo a provarlo supponendo di lasciare invariato il limite $2c$

dell' integrale. Invero, essendo

$$\int_0^{2c}[y+\delta y-c\sqrt{1+(y'+\delta y')^2}]dx=\int_0^{2c}\left\{y+\delta y-c(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}\left[1+\frac{\delta y'(2y'+\delta y')}{1+y'^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}dx$$

$$=\int_0^{2c}\left\{y+\delta y-c(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}\left[1+\frac{1}{2}\frac{\delta y'(2y'+\delta y')}{1+y'^2}-\frac{1}{8}\left(\frac{\delta y'(2y'+\delta y')}{1+y'^2}\right)^2+\dots\right]\right\}dx.$$

la variazione seconda dell' integrale, $-\frac{c}{2}\int_0^{2c}\frac{(\delta y')^2}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$, è negativa.

Questo problema risolve immediatamente quello di determinare tra le curve isoperimetre quella che racchiude un' area massima. Si riconosce subito che questa curva è un circolo.

2) Tra i solidi di rotazione che hanno la stessa superficie trovare quello di volume massimo.

Essendo $y=y(x)$ l' equazione della curva che ruotando intorno all' asse delle x genera la superficie, le espressioni della superficie e del volume sono $2\pi\int_{x_0}^{x_1}y\sqrt{1+y'^2}\,dx$, $\pi\int_{x_0}^{x_1}y^2\,dx$; il problema che ci proponiamo risolvere è: determinare la funzione y e i limiti x_0, x_1 dell' integrale in modo che $\int_{x_0}^{x_1}y^2\,dx$ riesca massimo, dovendo essere $\int_{x_0}^{x_1}y\sqrt{1+y'^2}=2a^2$, avendo indicato con $4\pi a^2$ l' area della superficie.

Dovremo perciò rendere massimo l' integrale

$$\int_{x_0}^{x_1}\mathfrak{F}dx=\int_{x_0}^{x_1}(y^2+cy\sqrt{1+y'^2})\,dx.$$

Qui è $Y=2y+c\sqrt{1+y'^2}$, $Y_1=\frac{cyy'}{\sqrt{1+y'^2}}$, e poichè $\mathfrak{F}$ non

contiene x abbiamo un integrale primo $\varphi = y' Y_1 + c_1$ della $K = 0$ (Vedi n. 241), ossia

$$(4) \qquad y^2 + cy\sqrt{1+y'^2} = \frac{cyy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} + c_1 .$$

Poichè x_0, x_1, y_0, y_1 non sono dati, l'equazione $\Gamma_1 - \Gamma_0 = 0$ si scinde nelle equazioni $\varphi_1 = 0$, $K_0^1 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $K_0^0 = 0$, ed è quindi ancora

$$\varphi_1 - y' K_0^1 = \left(y^2 + cy\sqrt{1+y'^2} - \frac{cyy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} \right)_{x=x_1} = 0 ,$$

ossia, in virtù della (4), $c_1 = 0$, che riduce la equazione (4) alla

$$y^2 + cy\sqrt{1+y'^2} = \frac{cyy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} , \text{ da cui } y' = \frac{\pm\sqrt{c^2 - y^2}}{y} ,$$

che, integrata, dà

$$x - c_2 = \pm\sqrt{c^2 - y^2} \text{ ossia } (x - c_2)^2 + y^2 = c^2 ,$$

la quale rappresenta un circolo di raggio c col centro sull'asse delle x.

Le equazioni $K_0^0 = 0$, $K_0^1 = 0$ danno $y_0 = 0$, $y_1 = 0$, e per determinare x_0, x_1 abbiamo le equazioni $x_0 = c_2 \mp c$, $x_1 = c_2 \mp c$, nelle quali non dovremo prendere gli stessi segni per non avere $x_0 = x_1$. Non abbiamo nessuna equazione per determinare c_2 che rimane arbitraria. Ciò si spiega col fatto che trovato un arco di curva che risolva il problema e passante pei punti $(x_0, 0)$, $(x_1, 0)$, qualunque altro arco, ottenuto dal primo facendolo scorrere sul piano (x, y) in modo che i suoi punti percorrano delle rette parallele all'asse delle x, vi soddisfa pure. Potremo perciò, per semplicità, fare $c_2 = 0$, ed allora, poichè supponiamo $x_0 < x_1$, avremo $x_0 = -c$, $x_1 = c$.

La curva che risolve il problema è quindi un circolo di raggio c col centro nell'origine delle coordinate e i punti x_0, x_1 sono i suoi punti d'incontro coll'asse delle x.

Per determinare c abbiamo l'equazione

$$\int_{-c}^{c} y\sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_{-c}^{c} \sqrt{c^2-x^2}\,\frac{c}{\sqrt{c^2-x}}\,dx = 2c^2 = 2a^2, \text{ da cui } c = a.$$

Tra le superfici di rotazione, di area uguale, quella che racchiude il massimo volume è perciò la sfera.

Variazione di un integrale multiplo col campo di integrazione fisso e con valori dati delle funzioni sul contorno del campo stesso, e quando sotto il segno integrale compariscono le sole derivate prime. — Relativi problemi di massimo e minimo.

244. Cominciamo coll' integrale

$$I = \int\int \varphi(x, y, z, p, q)\,dx\,dy,$$

esteso ad un certo campo, essendo $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. Avremo

$$\delta I = \int\int (Z\delta z + P\delta p + Q\delta q)\,dx\,dy$$

avendo posto

$$Z = \frac{\partial \varphi}{\partial z},\ P = \frac{\partial \varphi}{\partial p},\ Q = \frac{\partial \varphi}{\partial q};$$

ma, poichè

$$\delta p = \delta\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial(\delta z)}{\partial x},$$

è $$\int\int P\delta p\,dx\,dy = \int dy \int P\frac{\partial(\delta z)}{\partial x}\,dx = \int dy\left[P\delta z - \int \frac{dP}{dx}\,\delta z\,dx\right].$$

ovvero, osservando che nell' integrale $\int P\delta z\, dy$ il δz si riferisce al contorno del campo di integrazione ed è perciò nullo,

$$\iint P\delta p\, dx\, dy = -\iint \frac{dP}{dx}\, \delta z\, dx\, dy.$$

Analogamente avremo

$$\iint Q\delta q\, dx\, dy = -\iint \frac{dQ}{dy}\, \delta z\, dx\, dy\,,$$

cosichè

$$\delta I = \iint \left(Z - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy}\right) \delta z\, dx\, dy\,,$$

avendo indicato con $\frac{dP}{dx}$, $\frac{dQ}{dy}$ le derivate totali di P, Q rapporto ad x e ad y.

Sia ora

$$I = \iint \ldots \int \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n, z, p_1, p_2 \ldots p_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n\,,$$

dove $p_r = \frac{\partial z}{\partial x_r}$, esteso ad un certo campo; posto $Z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, $P_r = \frac{\partial \varphi}{\partial p_r}$ si trova, in modo completamente analogo,

$$\delta I = \iint \ldots \int \left(Z - \frac{dP_1}{dx_1} - \frac{dP_2}{dx_2} - \ldots - \frac{dP_n}{dx_n}\right) \delta z\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n\,,$$

dove le $\frac{dP_1}{dx_1}$, $\frac{dP_2}{dx_2}$, .. indicano le derivate totali di $P_1, P_2 \ldots$ rapporto ad $x_1, x_2, \ldots$

Una formola analoga si trova facilmente se la funzione φ contiene, oltre alla z, altre funzioni $u, v, \ldots$ delle $x_1, x_2, \ldots x_n$ e le loro derivate prime.

Proposto il problema di determinare la funzione z che rende massimo o minimo l' integrale I, dovrà, qualunque sia δz, essere nulla la variazione prima δI e perciò, procedendo in modo analogo a quello tenuto al n. 240, si troverà che la funzione z dovrà soddisfare

alla equazione a derivate parziali

$$Z - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy} = 0$$

nel caso dell' integrale doppio, o alla equazione

$$Z - \frac{dP_1}{dx_1} - \frac{dP_2}{dx_2} - \dots - \frac{dP_n}{dx_n} = 0$$

nel caso dell' integrale multiplo; e queste equazioni servono alla determinazione della funzione z, che potrà poi venire completata dalle condizioni imposte a z sul contorno del campo di integrazione e da altre condizioni.

Esempi

1). *Superficie d' area minima.* Si tratta di determinare, tra tutte le superficie passanti per una data linea, quella di area minima, cioè di determinare la funzione z che rende un minimo l' integrale

$$I = \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy$$

esteso al campo limitato dalla proiezione della linea data sul piano delle x, y colla condizione che z prenda sul contorno del campo tali valori, che la superficie passi per la linea data.

La equazione a derivate parziali della z è qui

$$\frac{d}{dx} \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} + \frac{d}{dy} \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = 0$$

cioè, sviluppando le derivazioni e facendo astrazione dal fattore positivo $\dfrac{1}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}$,

$$r(1 + q^2) - 2pqs + t(1 + p^2) = 0$$

dove

$$r = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad t = \frac{\partial q}{\partial y}, \quad s = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Senza passare alla sua integrazione ci limiteremo a notare che essa esprime la proprietà, che le superficie d'area minima hanno in ogni loro punto i raggi principali di curvatura uguali e di segno contrario. (Vedi n. 44).

2) Determinare la superficie che, passando per una data curva

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0,$$

rende massimo o minimo l'integrale $\iint \sqrt{p^2 + q^2}\, dx\, dy$ esteso ad un campo sul piano x, y, limitato da una curva, che è la proiezione su esso della curva

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0,$$

per la quale pure supponiamo debba passare la superficie richiesta.

Qui è $Z = 0$, $P = \dfrac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}$, $Q = \dfrac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}$ e perciò la equazione a derivate parziali che serve a determinare z è la

$$rq^2 - 2pqs + tp^2 = 0 \tag{1}$$

Questa equazione si integra facilmente coi metodi conosciuti per integrare alcune equazioni a derivate parziali di secondo ordine. Noi la integreremo con un metodo indiretto e per tentativi.

Osserviamo che se $z = \varphi(x, y)$ fosse un suo integrale, eguagliando z ad una costante c, la equazione $c = \varphi(x, y)$ definirebbe y come una funzione di x tale che $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ sarebbe zero, perchè il primo membro della (1) è, fatta estrazione dal segno, il numeratore della espressione di $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ (Vedi vol. I, n. 113); cioè darebbe $y = -c_1 x - c_2$, dove c_1, c_2 sono costanti; perciò $z = \psi(y + c_1 x + c_2)$ o semplicemente $z = \psi(y + c_1 x)$ dove ψ indica una funzione arbitraria è integrale della (1), e quindi anche $y + c_1 x = \varphi(z)$, dove φ è funzione arbitraria. Ciò ci induce a provare se sostituendo in luogo di c_1 una funzione arbitraria della z sia ancora $y + x\psi(z) = \varphi(z)$ integrale della (1). È ciò che effettivamente ha luogo, come si può verificare derivando la equazione precedente due volte rispetto ad x, rispetto ad y, rispetto x e ad y; otteniamo così, indicando con $\varphi', \varphi'', \psi', \ldots$ le derivate di

$\varphi(z)$, $\psi(z)$ rispetto a z,

$$(\varphi' - x\psi')r + p^2(\varphi'' - x\psi'') - 2\psi' p = 0,$$

$$(\varphi' - x\psi')s + pq(\varphi'' - x\psi'') - \psi' q = 0,$$

$$(\varphi' - x\psi')t + q^2(\varphi'' - x\psi'') \qquad = 0,$$

dalle quali, eliminando le derivate di φ e ψ, si ottiene

$$\begin{vmatrix} r & p^2 & 2p \\ s & pq & q \\ t & q^2 & 0 \end{vmatrix} = -q(rq^2 - 2pqs + tq^2) = 0.$$

La superficie che risolve il problema è quindi quella di equazione

$$\varphi(z) = y + x\psi(z),$$

nella quale le funzioni arbitrarie vengano determinate dalle altre condizioni del problema. La nostra superficie dovendo passare per la curva $f(x, y, z) = 0$, $F(x, y, z) = 0$, dovremo avere

$$f[x, \varphi(z) - x\psi(z), z] = 0, \quad F[x, \varphi(z) - x\psi(z), z] = 0,$$

dalle quali, eliminando x, otteniamo un' equazione della forma

$$\Lambda[z, \varphi(z), \psi(z)] = 0.$$

La superficie dovendo anche passare per la curva $f_1(x, y, z) = 0$, $F_1(x, y, z) = 0$, otterremo, in modo analogo, una equazione della forma

$$\Lambda_1[z, \varphi(z), \psi(z)] = 0;$$

le due equazioni $\Lambda = 0$, $\Lambda_1 = 0$ determinano le due funzioni $\varphi(z)$, $\psi(z)$.

3) Supposto z fissato ai limiti del campo di integrazione, trovare la funzione z che rende massimo o minimo l' integrale

$$\int\int \ldots \int (x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n - z)^m dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

La equazione a derivate parziali per determinare z, posto $A = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n - z$, è

$$A^{m-1} + \frac{d}{dx_1}(x_1 A^{m-1}) + \frac{d}{dx_2}(x_2 A^{m-1}) + \ldots + \frac{d}{dx_n}(x_n A^{m-1}) = 0.$$

cioè

$$(n+1)A^{m-1}+(m-1)A^{m-2}[x_1(x_1p_{11}+x_2p_{21}+\ldots+x_np_{n1})$$
$$+x_2(x_1p_{12}+x_2p_{22}+\ldots+x_np_{n2})+\ldots+x_n(x_1p_{1n}+x_2p_{2n}+\ldots+x_np_{nn})]=0,$$

dove $p_{rs}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_r\,\partial x_s}$, $p_{rs}=p_{sr}$; posto $\dfrac{n+1}{m-1}=-\alpha$, avremo ancora,

$$-\alpha(x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n-z)+\sum_{r=1}^{r=n}x_r(x_1p_{1r}+x_2p_{2r}+\ldots x_np_{nr})=0.$$

Tenendo presente il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee, si trova facilmente l'integrale di questa equazione sotto la forma

$$z=\varphi_1+\varphi_\alpha,$$

dove φ_1 indica una funzione omogenea qualunque di primo, φ_α una funzione omogenea qualunque di grado α delle $x_1, x_2 \ldots x_n$.

Esercizi

1. La funzione y di x che rende massimo o minimo l'integrale $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1}\frac{y^2y''}{y'}dx$, essendo fissi i limiti dell'integrale ed assegnati i valori y_0, y_1 di y per $x=x_0$, $x=x_1$ è la $y=\sqrt{\dfrac{(y^2_1-y^2_0)x+x_1y^2_0-x_0y^2_1}{x_1-x_0}}$.

2. Essendo fissi i limiti dell'integrale $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1}(x^2+y^2+y'^2+2y')dx$ e non assegnati i valori di y nei limiti stessi, la funzione $y=\dfrac{e^x}{e^{-x_1}+e^{-x_0}}-\dfrac{e^{-x}}{e^{x_0}+e^{x_1}}$ rende minimo l'integrale.

3. La funzione $y=\dfrac{6}{5}x^2-\dfrac{12}{5}x+1$ rende minimo l'integrale $\displaystyle\int_0^1 y'^2dx$, colle condizioni $y_0=1$, $\displaystyle\int_0^1\frac{y}{y'}dx=-1$.

4. La funzione che per $x=-a$, $x=a$ è zero, e che rende mi-

nimo l'int. $\int_{-a}^{a}(y''-2y)dx$, è la

$$y=\frac{x^4}{24}-\frac{a^2}{4}x^2+\frac{5}{24}a^4.$$

5. Essendo invariabili i limiti x_0, x_1, trovare la curva che rende minimo l'integrale $\int_{x_0}^{x_1}(ax-by^2)dx$.

La parabola $3by^2=ax$; se $b>0$ si ha massimo pel ramo di parabola al di sopra, minimo per quello sotto all'asse delle x; inversamente se $b<0$.

6. Essendo invariabili i limiti x_0, x_1, trovare la curva che rende massimo o minimo l'int. $\int_{x_0}^{x_1}(15a^2x^2y-15a^3xy+5a^2y^3-3y^5)dx$, $a>0$.

Le parabole $y^2=ax$, $y^2=a^2-ax$. Per la prima si ha minimo pel ramo superiore e pei valori di x da 0 ad $\frac{a}{2}$, massimo per $x>\frac{a}{2}$ ed inversamente pel ramo inferiore; per la seconda e pel ramo superiore si ha massimo se $x<0$ e da $x=0$ a $x=\frac{a}{2}$, minimo da $x=\frac{a}{2}$ a $x=a$, ed inversamente pel ramo inferiore.

7. Curva per la quale la differenza tra l'area del circolo costruito sul raggio vettore come diametro e il rettangolo delle coordinate in ogni punto è minima rispetto alla stessa differenza in ogni punto, corrispondente alla stessa ascissa, di qualunque altra curva.

La retta $y=\frac{2x}{\pi}$.

8. Curva per la quale è minima la sottonormale, le variazioni di y, y' essendo tali che $y\left(x-\frac{y}{y'}\right)$ non subisca variazione alcuna.

La parabola cubica $y=Cx^3$.

9. Sia $I=I_1I_2$ dove $I_1=\int_{x_0}^{x_1}\varphi_1 dx$, $I_2=\int_{x_0}^{x_1}\varphi_2 dx$; per determinare

la funzione y che rende massimo o minimo I dovremo trovare la y per la quale $I_1 \int_{x_0}^{x_1} \delta\varphi_1 dx + I_2 \int_{x_0}^{x_1} \delta\varphi_2 dx = 0$, dove I_1, I_2 sono i valori costanti dei due integrali quando in essi si sostituisce la funzione cercata. Il problema è ridotto così al massimo o minimo dell'integrale $\int_{x_0}^{x_1} (\varphi_1 + c\varphi_2) dx$, dove $c = \frac{I_2}{I_1}$. La c verrà poi determinata dalla precedente equazione.

Così si voglia la curva passante pei punti $(-a, b)$, (a, b) per la quale è minimo il prodotto dell'area per l'arco. Si trova il circolo $y = b + \sqrt{c^2 - a^2} - \sqrt{c^2 - x^2}$, dove c è derminato dalla equazione $2ab + a\sqrt{c^2 - a^2} = 3c^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{a}{c}$.

In particolare se $b = \frac{3\pi a}{4}$ si ha $c = a$.

10. Si provi che per ottenere il massimo o minimo di $\int_{x_0}^{x_1} \varphi dx$, sotto le condizioni $\int_{x_0}^{x_1} \varphi_1 dx = l_1, \int_{x_0}^{x_1} \varphi_2 dx = l_2, \ldots$ basta cercare il massimo o minimo di $\int_{x_0}^{x_1} (\varphi + a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \ldots) dx$, dove $a_1, a_2, \ldots$ sono delle costanti.

Ad es.: si cerchi la funzione y che per $x = -a$ e per $x = a$ è uguale a b e che rende minimo $\int_{-a}^{a} y^2 dx$, colle condizioni

$$\int_{-a}^{a} y dx = 2b \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}}, \quad \int_{-a}^{a} y'^2 dx = \frac{b^2(e^{2a} - e^{-2a} - 4a)}{(e^a + e^{-a})^2}.$$ Si trova la

$$y = \frac{b}{e^a + e^{-a}} (e^x + e^{-x}).$$

11. Superficie $z = z(x, y)$ che rende minimo l'integrale $\int\int p^2 dx dy$ esteso al campo limitato dal circolo $x^2 + y^2 = r^2$, dovendo essere $z = a$ per $x^2 + y^2 = r^2$, e dovendo inoltre la superficie passare pel circolo $x^2 + y^2 = R^2$, $z = b$.

Si trova $z = \dfrac{(a - b)x + b\sqrt{r^2 - y^2} - a\sqrt{R^2 - y^2}}{\sqrt{r^2 - y^2} - \sqrt{R^2 - y^2}}$.